Mechanik des Himmels

von

P. S. Laplace,

Mitgliede des Erhaltungs-Senats der Französischen Republik, des National-Instituts und der Commission für die Meeres-Länge.

Aus dem Französischen übersetzt
und
mit erläuternden Anmerkungen versehen

von

J. C. Burckhardt.

Zweyter Theil.

Berlin
bey F. T. LaGarde,
1802.

Zweyter Band.

Drittes Buch.

Von der Gestalt der himmlischen Körper.

Die Gestalt der himmlischen Körper hängt vom Gesetz der Schwere an ihrer Oberfläche ab, und da diese Schwere selbst das Resultat der Anziehungen aller ihrer Theilchen ist, so hängt sie von ihrer Gestalt ab. Das Gesetz der Schwere an der Oberfläche der himmlischen Körper und ihre Gestalt haben also eine gegenseitige Verbindung unter einander, wodurch die Kenntniſs des einen zur Bestimmung des andern nöthig wird; ihre Untersuchung wird dadurch sehr schwierig, und scheint eine ganz besondere Analysis zu erfordern. Wären die Planeten gänzlich feste Körper, so könnten sie jedwede Gestalt haben; werden sie aber, wie die Erde, von einem Flüssigen bedeckt, so müssen alle Theilchen dieses Flüssigen sich so ordnen, daſs sie im Gleichgewicht sind, und die Gestalt der äuſsern Oberfläche hängt von der des vom Flüssigen bedeckten Kerns und von den Kräften ab, welche auf sie wirken. Wir werden im allgemeinen annehmen, daſs alle himmlischen Körper von einem Flüssigen bedeckt sind, welche Voraussetzung für die Erde Statt hat und welche sehr natürlich auf die übrigen Körper des Weltsystems erstreckt wird, und wir werden in dieser Voraussetzung die Gestalt dieser Körper und das Gesetz der Schwere auf ihrer Oberfläche bestimmen. Die Analysis, deren wir uns bedienen werden, ist eine merkwürdige Anwendung der Rechnung mit partiellen Differenzialen; sie wird durch bloſse Differenziationen uns zu sehr allgemeinen Resultaten führen, welche man nur schwer vermittelst der Integrationen erhält.

Erstes Kapitel.

Von den Anziehungen gleichartiger Sphäroide, welche von Flächen der zweyten Ordnung begrenzt werden.

1. Wir wollen zuerst die Anziehung der Körper bestimmen, deren Gestalt gegeben ist. Wir haben schon im 11ten Satz des zweyten Buches diese Anziehung für eine Kugel und für eine Kugelschale bestimmt: jetzt wollen wir die Anziehung der Sphäroide betrachten, welche von Flächen der zweyten Ordnung begrenzt werden.

Es seyen x, y, z die drey rechtwinklichten Koordinaten eines Theilchens des Sphäroids; man bezeichne dies Theilchen mit dM, und nehme die Dichte des Sphäroids, welches des Voraussetzung gemäſs gleichartig ist, zur Einheit an: so hat man

$$dM = dx \,.\, dy \,.\, dz$$

Es seyen a, b, c die rechtwinklichten Koordinaten des vom Sphäroid angezogenen Punktes; man bezeichne mit A, B, C, die Anziehungen des Sphäroids auf diesen Punkt, parallel mit den Axen der x, der y und der z zerlegt und gegen den Anfangspunkt der Koordinaten gerichtet. Man sieht leicht durch den 11ten Satz des 2ten Buches, daſs man folgende Gleichungen hat:

$$A = \iiint \frac{(a-x) \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

$$B = \iiint \frac{(b-y) \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

$$C = \iiint \frac{(c-z) \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

welche dreyfachen Integrale sämmtlich auf die ganze Masse des Sphäroids erstreckt werden müssen. Die Integrationen bieten unter dieser Gestalt groſse Schwierigkeiten dar, welche man oft heben kann, wenn man die Differenziale auf eine schickliche Art verwandelt, wir geben hierzu den allgemeinen Grundsatz dieser Verwandlungen.

Wir wollen die Differenzialfunktion $P \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$ betrachten, wo P irgend eine Funktion von x, y, z ist. Wir können annehmen, daſs x Funktion der veränderlichen Gröſsen y und z, und einer neuen veränderlichen Gröſse p ist; es sey $\phi(y, z, p)$ diese Funktion. Man wird dann, wenn man y und z als beständige Gröſsen ansieht, $dx = \beta \,.\, dp$ haben, wo β eine Funktion von y, z und p ist. Das vorhergehende Differenzial verwandelt sich so in folgendes: $\beta P \,.\, dp \,.\, dy \,.\, dz$; und man muſs, um es zu integriren, statt x seinen Werth $\phi(y, z, p)$ in die Funktion P substituiren.

Wir können auf eine ähnliche Art in diesem neuen Differenzial $y = \phi'(z, p, q)$ setzen, wo q eine neue veränderliche Gröſse ist, und wo $\phi'(z, p, q)$ irgend eine Funktion der drey veränderlichen Gröſsen z, p und q ist. Man hat nun, wenn man z und p als beständig ansieht, $dy = \beta' \,.\, dq$, wo β' eine Funktion von z, p, q ist; das vorhergehende Differenzial erhält so folgende neue Form: $\beta \,.\, \beta' \,.\, P \,.\, dp \,.\, dq \,.\, dz$, und man muſs, um es zu integriren, in βP statt y seinen Werth $\phi'(z, p, q)$ setzen.

Man kann endlich $z = \phi''(p, q, r)$ setzen, wo r eine neue veränderliche Gröſse ist, und wo $\phi''(p, q, r)$ irgend eine Funktion von p, q, r ist. Man wird dann, wenn man p und q als beständig ansieht, $dz = \beta'' \,.\, dr$ haben, wo β'' eine Funktion von p, q, r ist; das vorhergehende Differenzial verwandelt sich so in $\beta \,.\, \beta' \,.\, \beta'' \,.\, P \,.\, dp \,.\, dq \,.\, dr$, und man muſs, um es zu integriren, in $\beta \,.\, \beta' \,.\, P$ statt z, seinen Werth $\phi''(p, q, r)$ setzen. Die gegebene Differenzialfunktion wird dadurch in eine andere verwandelt, welche sich auf die drey neuen veränderlichen Gröſsen p, q, r bezieht, welche mit den vorhergehenden durch die folgenden Gleichungen verbunden sind:

$$x = \phi(y, z, p); \quad y = \phi'(z, p, q); \quad z = \phi''(p, q, r).$$

Jetzt haben wir nur noch die Werthe von β, β', β'' aus diesen Gleichungen herzuleiten.

Hierzu bemerken wir, daſs sie x, y, z als Funktionen der veränderlichen Gröſsen p, q und r geben; wir werden also die drey erstern veränderlichen Gröſsen als Funktionen der letztern betrachten. Da β'' der Koeffizient von dr im Differenzial von z ist, wenn man dies Differenzial so nimmt, daſs man p und q als beständig ansieht, so hat man

$$\beta'' = \left(\frac{dz}{dr}\right).$$

Die Funktion β' ist der Koeffizient von dq im Differenzial von y, wenn man dies Differenzial so nimmt, daſs man p und z als beständig ansieht. Man erhält also β', wenn man y so differenziirt, daſs man p beständig setzt, und wenn man dann dr vermittelst des Differenzials von z eliminirt, welches Differenzial gleich Null gesetzt und so genommen werden muſs, daſs man p als beständig ansieht; man erhält so die zwey folgenden Gleichungen

$$dy = \left(\frac{dy}{dq}\right).dq + \left(\frac{dy}{dr}\right).dr;$$

$$o = \left(\frac{dz}{dq}\right).dq + \left(\frac{dz}{dr}\right).dr;$$

sie geben

$$dy = dq \,.\, \frac{\left[\left(\frac{dy}{dq}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dr}\right) - \left(\frac{dy}{dr}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dq}\right)\right]}{\left(\frac{dz}{dr}\right)},$$

folglich

$$\beta' = \frac{\left(\frac{dy}{dq}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dr}\right) - \left(\frac{dy}{dr}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dq}\right)}{\left(\frac{dz}{dr}\right)}.$$

Die Funktion β ist endlich der Koeffizient von dp im Differenzial von x, so genommen, daſs man y und z als beständig ansieht; dies giebt die drey folgenden Gleichungen:

$$dx = \left(\frac{dx}{dp}\right).dp + \left(\frac{dx}{dq}\right).dq + \left(\frac{dx}{dr}\right).dr$$

$$o = \left(\frac{dy}{dp}\right).dp + \left(\frac{dy}{dq}\right).dq + \left(\frac{dy}{dr}\right).dr$$

$$o = \left(\frac{dz}{dp}\right).dp + \left(\frac{dz}{dq}\right).dq + \left(\frac{dz}{dr}\right).dr.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \varepsilon = {} & \left(\frac{dx}{dp}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dq}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dr}\right) - \left(\frac{dx}{dp}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dr}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dq}\right) \\ & + \left(\frac{dx}{dq}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dr}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dp}\right) - \left(\frac{dx}{dq}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dp}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dr}\right) \\ & + \left(\frac{dx}{dr}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dp}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dq}\right) - \left(\frac{dx}{dr}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dq}\right)\cdot\left(\frac{dz}{dp}\right); \end{aligned}$$

so erhält man

$$dx = \frac{\varepsilon \,.\, dp}{\left(\frac{dy}{dq}\right) . \left(\frac{dz}{dr}\right) - \left(\frac{dy}{dr}\right) . \left(\frac{dz}{dq}\right)};$$

dies giebt

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{dy}{dq}\right) . \left(\frac{dz}{dr}\right) - \left(\frac{dy}{dr}\right) . \left(\frac{dz}{dq}\right)};$$

und folglich $\beta \,.\, \beta' \,.\, \beta'' = \varepsilon$, und das Differenzial $P \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$ wird so in folgendes verwandelt, $\varepsilon \,.\, P \,.\, dp \,.\, dq \,.\, dr$, wo P der Werth ist, den P erhält, wenn man statt x, y, z ihre durch p, q und r gegebenen Werthe setzt. Die Aufgabe besteht nun darinn, die veränderlichen Gröſsen p, q, r so zu wählen, daſs die Integrationen möglich werden.

Wir wollen die Koordinaten x, y, z in den Radius, welcher vom angezogenen Punkt zum Theilchen dM gezogen worden ist, und in die Winkel, welche dieser Radius mit gegebenen geraden Linien oder Ebenen macht, verwandeln. Es sey r dieser Radius; p der Winkel, welchen er mit einer geraden Linie macht, die durch den angezogenen Punkt parallel mit der Axe der x gezogen worden ist; es sey q der Winkel, welchen dieser auf die Ebene der y und der z projicirte Radius mit der Axe der y macht; so erhält man:

$x = a - r . \cos p$; $y = b - r . \sin p . \cos q$; $z = c - r . \sin p . \sin q$;

und man wird dann $\varepsilon = - r^2 . \sin p$ finden [1]); das Differenzial $dx \,.\, dy \,.\, dz$ wird sich so in folgendes verwandeln: $- r^2 . \sin p \,.\, dp \,.\, dq \,.\, dr$. Dies ist

1) Es ist nämlich $\left(\frac{dx}{dp}\right) = r . \sin p$; $\left(\frac{dx}{dq}\right) = 0$; $\left(\frac{dx}{dr}\right) = - \cos p$; $\left(\frac{dy}{dp}\right) = - r . \cos p . \cos q$; $\left(\frac{dy}{dq}\right) = r . \sin p . \sin q$; $\left(\frac{dy}{dr}\right) = - \sin p . \cos q$; $\left(\frac{dz}{dp}\right) = - r . \cos p . \sin q$; $\left(\frac{dz}{dq}\right) = - r . \sin p . \cos q$; $\left(\frac{dz}{dr}\right) = - \sin p . \sin q$. Substituirt man diese Werthe im Ausdruck von ε, so findet man für das erste und zweyte Glied $- r^2 \sin p^3 . \sin q^2 - r^2 \sin p^3 . \cos q^2$, welches gleich $- r^2 \sin p^3$ ist; das dritte und vierte Glied sind wegen des Factors $\left(\frac{dx}{dq}\right)$ gleich Null; das fünfte und sechste geben $- r^2 \cos p^2 . \sin p . \cos q^2 - r^2 \cos p^2 . \sin p . \sin q^2$ oder $- r^2 \cos p^2 . \sin p$ Man erhält so:

$$\varepsilon = - r^2 \sin p^3 - r^2 \cos p^2 \sin p = - r^2 \sin p \,(\sin p^2 + \cos q^2) = - r^2 \sin p.$$

der Ausdruck für das Theilchen dM, und da dieser Ausdruck positiv seyn muſs, so muſs man, wenn man sin p, dp, dq, dr als positiv ansieht, sein Zeichen ändern, welches eben so viel ist, als das Zeichen ε zu ändern, und $\varepsilon = r^2 \sin p$ zu setzen. Die Ausdrücke für A, B, C, verwandeln sich so in folgende:

$$A = \iiint dr \,.\, dp \,.\, dq \,.\, \sin p \,.\, \cos p$$
$$B = \iiint dr \,.\, dp \,.\, dq \,.\, \sin p^2 \,.\, \cos q$$
$$C = \iiint dr \,.\, dp \,.\, dq \,.\, \sin p^2 \,.\, \sin q.$$

Es ist leicht auf einem andern Weg auf diese Ausdrücke zu kommen, wenn man bemerkt, daſs man das Theilchen dM einem rechtwinklichten Parallelepipedum gleich setzen kann, dessen drey Abmessungen dr, rdp und $rdq \,.\, \sin p$ sind, und wenn man ferner bemerkt, daſs die Anziehung des Theilchens parallel mit den drey Axen der x, der y und der z folgende ist $\frac{dM}{r^2} \,.\, \cos p$; $\frac{dM}{r^2} \,.\, \sin p \,.\, \cos q$ und $\frac{dM}{r^2} \,.\, \sin p \,.\, \sin q$ [2]).

Die dreyfachen Integrale der Ausdrücke von A, B, C müssen auf die ganze Masse des Sphäroids erstreckt werden. Die Integrationen in Beziehung auf r sind leicht, aber verschieden, je nachdem der angezogene Punkt innerhalb oder auſserhalb des Sphäroids ist; im erstern Fall wird die gerade Linie, welche durch den angezogenen Punkt und durch das ganze Sphäroid geht, durch diesen Punkt in zwey Theile getheilt; und wenn man diese Theile r und r' nennt, so erhält man:

2) Bekanntlich ist $[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{1}{2}}$, der Abstand der beiden Punkte von einander, deren Koordinate a, b, c und x, y, z sind; diesen Abstand haben wir mit r bezeichnet; ferner ist $dx \,.\, dy \,.\, dz$ gleich dM, folglich A oder $\iiint \frac{(a-x)\, dx \,.\, dy \,.\, dz}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$ gleich $\iiint \frac{a-x}{r^3} \,.\, dM$. Nun ist $x = a - r \,.\, \cos p$, folglich $a - x = r \,.\, \cos p$, und $A = \iiint \frac{dM}{r^2} \,.\, \cos p$. Eben so ist $B = \iiint \frac{b-y}{r^3}\, dM = \iiint \frac{dM}{r^2} \,.\, \sin p \,.\, \cos q$ und $C = \iiint \frac{c-z}{r^3} \,.\, dM = \iiint \frac{dM}{r^2} \,.\, \sin p \,.\, \sin q$. Man findet ferner in einer Anmerkung zum ersten Band, in der Anmerkung (25) zum 12ten Satz des zweyten Buches, sehr umständlich bewiesen, daſs dM das Product von dr, rdp und $rdq \,.\, \sin p$ ist.

$$A = \iint (r + r') \,.\, dp \,.\, dq \,.\, \sin p \,.\, \cos p;$$
$$B = \iint (r + r') \,.\, dp \,.\, dq \,.\, \sin p^2 \,.\, \cos q;$$
$$C = \iint (r + r') \,.\, dp \,.\, dq \,.\, \sin p^2 \,.\, \sin q;$$

wo die Integrale in Beziehung auf p und q, von p und q gleich Null bis p und q gleich zwey rechten Winkeln genommen werden müssen.

Nennt man im zweyten Fall, r den Halbmesser bey seinem Eintritt ins Sphäroid, und r' denselben Halbmesser beym Austritt, so hat man:

$$A = \iint (r' - r) \,.\, dp \,.\, dq \,.\, \sin p \,.\, \cos p;$$
$$B = \iint (r' - r) \,.\, dp \,.\, dq \,.\, \sin p^2 \,.\, \cos q;$$
$$C = \iint (r' - r) \,.\, dp \,.\, dq \,.\, \sin p^2 \,.\, \sin q;$$

wo die Grenzen der Integrale in Beziehung auf p und auf q in den Punkten genommen werden müssen, wo man $r' - r = o$ hat, das heifst, wo der Radius r die Oberfläche des Sphäroids berührt.

2. Wir wollen nun diese Resultate auf die Späroide anwenden, welche durch Flächen der zweyten Ordnung begrenzt sind. Die allgemeine Gleichung dieser Flächen ist, in Beziehung auf drey rechtwinklichte Koordinaten,

$$o = A + B.x + C.y + E.z + F.x^2 + H.xy + L.y^2 + M.xz + N.yz + O.z^2.$$

Die Aenderung des Anfangspunkts der Koordinaten führt drey willkührliche Gröfsen ein, weil die Lage des neuen Anfangspunkts gegen den erstern von drey willkührlichen Koordinaten abhängt. Die Aenderung der Lage der Koordinaten um ihren Anfangspunkt führt drey willkührliche Winkel ein. Aendert man also zu gleicher Zeit den Anfangspunkt und die Lage der Koordinaten in der vorhergehenden Gleichung, so erhält man eine neue Gleichung vom zweyten Grade, deren Koeffizienten Funktionen der vorhergehenden und sechs willkührlicher Gröfsen seyn werden. Man wird diese willkührlichen Gröfsen dadurch bestimmen, dafs man die ersten Potenzen der Koordinaten und ihre Producte gleich Null setzt, und die allgemeine Gleichung der Flächen der zweyten Ordnung, wird dann folgende sehr einfache Gestalt erhalten:

$$x^2 + my^2 + nz^2 = k^2;$$

wir werden sie unter dieser Gestalt betrachten.

Wir werden in diesen Untersuchungen nur auf diejenigen festen Körper Rücksicht nehmen, welche von endlichen Flächen begrenzt werden, dies setzt voraus, dafs m und n positiv sind. Der feste Körper ist in diesem Fall ein Ellipsoid, dessen drey halbe Axen die Werthe sind, welche die veränderlichen

Gröſsen x, y, z erhalten, wenn man zwey von ihnen gleich Null setzt; man erhält so k, $\frac{k}{\sqrt{m}}$, $\frac{k}{\sqrt{n}}$ für die drey halben Axen, welche respective mit den x, den y und den z parallel sind. Der körperliche Inhalt des Ellipsoids wird $\frac{4\pi \,.\, k^3}{3 \,.\, \sqrt{mn}}$ seyn, wenn man durch π, wie immer, das Verhältniſs des halben Umkreises zum Halbmesser bezeichnet.

Setzt man nun in der vorhergehenden Gleichung statt x, y, z ihre im vorigen Satz durch p, q, r gegebenen Werthe, so erhält man:

$$r^2 . [\cos p^2 + m . \sin p^2 . \cos q^2 + n . \sin p^2 . \sin q^2]$$
$$- 2r . [a . \cos p + mb . \sin p . \cos q + nc . \sin p . \sin q] = k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2$$

so daſs man

$$r = \frac{I \pm \sqrt{R}}{L}$$

erhält, wenn man

$$I = a . \cos p + mb . \sin p . \cos q + nc . \sin p . \sin q;$$
$$L = \cos p^2 + m . \sin p^2 . \cos q^2 + n . \sin p^2 . \sin q^2;$$
$$R = I^2 + (k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) . L$$

setzt; woraus man r' erhält, wenn man die Wurzelgröſse positiv nimmt, und r, wenn man sie negativ nimmt; man hat also

$$r + r' = \frac{2\,I}{L}; \quad r' - r = \frac{2\sqrt{R}}{L}.$$

Dies giebt für die Punkte innerhalb des Sphäroids

$$A = 2 . \iint \frac{dp \,.\, dq \,.\, I \,.\, \sin p \,.\, \cos p}{L}$$

$$B = 2 . \iint \frac{dp \,.\, dq \,.\, I \,.\, \sin p^2 \,.\, \cos q}{L}$$

$$C = 2 . \iint \frac{dp \,.\, dq \,.\, I \,.\, \sin p^2 \,.\, \sin q}{L}$$

und für die äuſsern Punkte

$A =$

$$A = 2 . \iint \frac{dp . dq . \sin p . \cos p . \sqrt{R}}{L}$$

$$B = 2 . \iint \frac{dp . dq . \sin p^2 . \cos q . \sqrt{R}}{L}$$

$$C = 2 . \iint \frac{dp . dq . \sin p^2 . \sin q . \sqrt{R}}{L},$$

wo die beiden letztern Integrale zwischen den zwey Grenzen, welche $R = o$ entsprechen, genommen werden müssen.

3. Da die Ausdrücke für die innern Punkte einfacher sind, so werden wir damit anfangen, sie zu betrachten. Wir bemerken zuerst, daſs die halbe Axe k des Sphäroids, in den Werthen von I und L sich nicht befindet; die Werthe von A, B, C, sind folglich von ihr unabhängig. Es folgt hieraus, daſs man die Lagen des Späroids, welche oberhalb des angezogenen Punktes sind, nach Willkühr vermehren kann, ohne die Anziehung des Sphäroids auf diesen Punkt zu ändern, wofern nur die Werthe von m und von n beständig sind. Hieraus flieſst folgender Lehrsatz:

Ein Punkt, der sich innerhalb einer elliptischen Schale befindet, deren innere und äuſsere Oberfläche einander ähnlich sind, und ähnliche Lage haben, wird gleich stark von allen Seiten angezogen.

Dieser Lehrsatz ist eine Erweiterung desjenigen, welchen wir im 12ten Satz des 2ten Buchs für eine Kugelschale bewiesen haben.

Wir wollen nun den Werth von A wieder vornehmen. Substituirt man in ihm statt I und L ihren Werth; so verwandelt er sich in folgenden:

$$A = 2 . \iint \frac{dp . dq . \sin p . \cos p . (a . \cos p + m . b . \sin p . \cos q + n . c . \sin p . \sin q)}{\cos p^2 + m . \sin p^2 . \cos q^2 + n . \sin p^2 . \sin q^2}.$$

Da die Integrale in Beziehung auf p und auf q, von p und q gleich Null an bis p und q gleich zwey rechten Winkeln genommen werden müssen; so ist klar, daſs man im Allgemeinen $\int P dp . \cos p = o$ hat, wenn P eine rationale Funktion von $\sin p$ und von $\cos p^2$ ist; denn wenn der Werth von p in gleichen Entfernungen über und unter den rechten Winkel genommen wird, so sind die zugehörigen Werthe von $P . \cos p$ einander gleich und entgegengesetzt; man erhält so:

$$A = 2 a . \iint \frac{dp . dq . \sin p . \cos p^2}{\cos p^2 + m . \sin p^2 . \cos q^2 + n . \sin p^2 . \sin q^2}.$$

Integrirt man in Beziehung auf q, von q gleich Null an bis q gleich zwey rechten Winkeln, so erhält man [3]):

$$A = \frac{2\,a\,\pi}{\sqrt{mn}} \cdot \int \frac{dp\,.\,\sin p\,.\,\cos p^2}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{1-m}{m}\right).\cos p^2\right].\left[1 + \left(\frac{1-n}{n}\right).\cos p^2\right]}},$$

wo das Integral von $\cos p = 1$ an, bis $\cos p = -1$ genommen werden muſs. Es sey $\cos p = x$, und man nenne M die ganze Masse des Sphäroids; man hat nach dem ersten Satz $M = \frac{4\,\pi\,.\,k^3}{3\sqrt{mn}}$ und folglich $\frac{4\,\pi}{\sqrt{mn}} = \frac{3\,M}{k^3}$; man erhält so [4])

3) Setzt man statt $\sin q^2$ seinen Werth $1 - \cos q^2$, und $1 - \cos p^2$ statt $\sin p^2$, so erhält man $A = 2\,a \iint \frac{dp\,.\,\sin p\,.\,\cos p^2\,.\,dq}{n + (1-n)\cos p^2 + (m-n)(1-\cos p^2)\cos q^2}$, oder wenn man der Kürze wegen $dp\,.\,\sin p\,.\,\cos p^2 = D$; $n + (1-n)\cos p^2 = E$ und $(m-n)(1-\cos p^2) = F$ setzt, $A = 2a \iint \frac{D\,.\,dq}{E + F\,.\,\cos q^2}$. Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos q^2$ und setzt man $\frac{dq}{\cos q^2} = d\,.\,(\text{tang } q)$ und $\frac{1}{\cos q^2} = \sec q^2 = 1 + \text{tang } q^2$, so erhält man $A = 2a \iint \frac{D\,.\,d\,.\,(\text{tang } q)}{E + F + E.\,\text{tang } q^2}$. Integrirt man nun in Beziehung auf q, so sind D, E und F als beständige Gröſsen anzusehen, weil sie q nicht enthalten; das Integral $\int \frac{a\,dx}{a^2 + x^2}$ ist bekanntlich $\text{arc}\,.\,\text{tang}\,.\,\frac{x}{a}$; giebt man nun der Gröſse A diese Form nämlich $A = 2a \int \frac{D}{E} \cdot \sqrt{\frac{E}{E+F}} \int \frac{\sqrt{\frac{E+F}{E}}\,.\,d\,.\,(\text{tang } q)}{\frac{E+F}{E} + \text{tang } q^2}$, so findet man:

$$A = 2\,a\,.\int \frac{D}{\sqrt{E}\,.\,\sqrt{E+F}}\,.\,\text{arc}\,.\,\text{tang}\,.\left(\frac{\sqrt{E}\,.\,\text{tang } q}{\sqrt{E+F}}\right).$$

Für $q = 0$ ist auch $A = 0$ und für $q = 180^\circ$, ist der Kreisbögen im obigen Integral gleich dem halben Umkreis, oder gleich π; folglich $A = 2\,a\,\pi \int \frac{D}{\sqrt{E}\,.\,\sqrt{E+F}}$. Nimmt man also den Werth von A von $q = 0$ bis $q = 180^\circ$, so erhält man $A = 2\,a\,\pi \int \frac{D}{\sqrt{E}\,.\,\sqrt{E+F}}$; woraus man sogleich den im Text gegebenen Werth findet.

4) Man erhält eigentlich für A nur die Hälfte des im Text gegebenen Werthes, wo aber das Integral von $x = 1$ bis $x = -1$ genommen werden muſs. Da aber das Integral blos x^2 enthält, so ist der negative Theil dem positiven gleich; man kann daher A doppelt nehmen, wenn man das Integral nur von $x = 0$ bis $x = 1$ nimmt.

$$A = \frac{3\,a\,M}{k^3} \cdot \int \frac{x^2 . dx}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{1-m}{m}\right) . x^2\right] . \left[1 + \left(\frac{1-n}{n}\right) . x^2\right]}},$$

wo das Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen werden muſs.

Integrirt man auf diese Art die Ausdrücke von B und von C, so wird man sie auf einfache Integrale zurückführen; es ist aber leichter diese Integrale aus dem vorhergehenden Ausdruck von A herzuleiten. Hierzu muſs man bemerken, daſs dieser Ausdruck als eine Funktion von a, und der Quadrate k^2, $\frac{k^2}{m}$, $\frac{k^2}{n}$ der halben Axen des Sphäroids, die mit den Koordinaten a, b, c des angezogenen Punktes parallel sind, angesehen werden kann. Nennt man nun k'^2 das Quadrat der halben mit b parallelen Axe, und folglich $k'^2 . m$ und $\frac{k'^2 . m}{n}$ die Quadrate der beiden andern halben Axen; so wird B eine ähnliche Funktion von b, k'^2, $k'^2 . m$ und $k'^2 . \frac{m}{n}$ seyn; man muſs also, um B zu erhalten, im Ausdruck von A, a in b, k in k', oder $\frac{k}{\sqrt{m}}$, m in $\frac{1}{m}$, und n in $\frac{n}{m}$ verwandeln; dieses giebt:

$$B = \frac{3\,b\,M}{k^3} \cdot \int \frac{m^{\frac{3}{2}} . x^2 . dx}{\sqrt{[1 + (m-1) . x^2] . \left[1 + \left(\frac{m-n}{n}\right) . x^2\right]}}.$$

Es sey

$$x = \frac{t}{\sqrt{m + (1-m) . t^2}},$$

so erhält man

$$B = \frac{3\,b\,M}{k^3} \cdot \int \frac{t^2 . dt}{\left[1 + \left(\frac{1-m}{m}\right) . t^2\right]^{\frac{3}{2}} . \left[1 + \left(\frac{1-n}{n}\right) . t^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

wo das Integral in Beziehung auf t von $t = 0$ bis $t = 1$, so wie das Integral in Beziehung auf x, genommen werden muſs, weil wenn $x = 0$ auch $0 = t$, und wenn $x = 1$ auch $t = 1$ ist.

Es folgt hieraus, daſs, wenn man

$$\frac{1-m}{m} = \lambda^2; \quad \frac{1-n}{n} = \lambda'^2; \quad F = \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1 - \lambda^2 \cdot x^2) \cdot (1 + \lambda'^2 \cdot x^2)}}$$

setzt, daſs man [5])

$$B = \frac{3\,b\,M}{k^3} \cdot \left(\frac{d \cdot \lambda F}{d\lambda}\right)$$

erhält. Verwandelt man in diesem Ausdruck b in c, λ in λ' und umgekehrt λ' in λ, c in b, so erhält man den Werth von C. Die Anziehungen A, B, C des Sphäroids, welche parallel mit seinen drey Axen sind, werden also durch folgende Formeln gegeben:

$$A = \frac{3\,a\,M}{k^3} \cdot F; \quad B = \frac{3\,b\,M}{k^3} \cdot \left(\frac{d \cdot \lambda F}{d\lambda}\right); \quad C = \frac{3\,c\,M}{k^3} \cdot \left(\frac{d \cdot \lambda' F}{d\lambda'}\right).$$

Man kann bemerken, daſs diese Ausdrücke selbst für Punkte auf der Oberfläche Statt haben, weil sie für alle innere Punkte und folglich für Punkte, welche unendlich nahe an der Oberfläche sind, gelten.

Die Bestimmung der Anziehungen des Sphäroids, hängt so nur vom Werth von F ab; ob nun gleich dieser Werth nur ein bestimmtes Integral ist, so hat er doch alle Schwierigkeiten der unbestimmten Integrale, wenn λ und λ' unbestimmt sind; denn wenn man dies bestimmte Integral, von $x = o$ bis

5) Da das Integralzeichen im Werth von F sich auf x bezieht, so ist $\lambda F = \int \frac{\lambda x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1 + \lambda^2 x^2)(1 + \lambda'^2 x^2)}}$,

oder $= \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 + \lambda'^2 x^2}} \cdot (\lambda^{-2} + x^2)^{-\frac{1}{2}}$, und wenn man in Beziehung auf λ differenziirt,

$$\left(\frac{d \cdot \lambda F}{d\lambda}\right) = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 + \lambda'^2 x^2}} \cdot \lambda^{-3} \cdot (\lambda^{-2} + x^2)^{-\frac{3}{2}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 + \lambda'^2 x^2}} \cdot (1 + \lambda^2 x^2)^{-\frac{3}{2}},$$ oder

$\left(\frac{d \cdot \lambda F}{d\lambda}\right) = \int \frac{x^2\,dx}{(1 + \lambda'^2 x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + \lambda^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Verwandelt man in diesem Integral x in t, so erhält man das Integral, welches im Werth von B sich befindet. Da man aber hier nur das Integral innerhalb der Grenzen $t = o$ und $t = 1$ braucht, und da beide Integrale innerhalb dieser Grenzen einander gleich sind, nämlich

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1 + \lambda'^2 x^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{t^2\,dt}{(1 + \lambda'^2 t^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda^2 t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

weil x und t zugleich gleich Null und gleich Eins sind, so ist $B = \frac{3\,b\,M}{k^3} \cdot \left(\frac{d \cdot \lambda F}{d\lambda}\right)$.

$x = 1$ genommen, durch $\phi(\lambda^2, \lambda'^2)$ bezeichnet, so sieht man leicht, daſs das unbestimmte Integral $x^3 . \phi(\lambda^2 x^2, \lambda'^2 x^2)$ seyn wird; so daſs wenn das erste gegeben ist, das zweyte auch gegeben ist. Das unbestimmte Integral ist aber für sich nur dann möglich, wenn eine der Gröſsen λ und λ' gleich Null ist, oder wenn sie einander gleich sind: in diesen zwey Fällen ist das Sphäroid ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid, und k wird seine halbe Umdrehungsaxe seyn, wenn λ und λ' einander gleich sind. Man hat in diesem letztern Fall [6])

$$F = \int \frac{x^2 . dx}{1 + \lambda^2 x^2} = \frac{1}{\lambda^3} [\lambda - \text{Arc . tang } \lambda].$$

Man bemerke, um hieraus die partiellen Differenziale $\left(\frac{d . \lambda F}{d\lambda}\right)$ und $\left(\frac{d . \lambda' F}{d\lambda'}\right)$ zu finden, welche in den Werthen von B und von C vorkommen, daſs [7])

6) Man kann dieses Integral aus den bekannten allgemeinen Formeln herleiten, die man z. B. in Lacroix 's Traité du Calcul differ. et intégral T. II. p. 24. §. 373. findet; es scheint aber kürzer, die Methode der Reihen hier zu gebrauchen. Es ist nämlich $\frac{1}{1 + \lambda^2 x^2} = 1 - (\lambda x)^2 + (\lambda x)^4 - (\lambda x)^6 + \ldots$ und $\int \frac{x^2\, dx}{1 + \lambda^2 x^2}$ oder $\frac{1}{\lambda^3} \int \frac{(\lambda x)^2 . d(\lambda x)}{1 + (\lambda x)^2}$ gleich

$$\frac{1}{\lambda^3} \int . d(\lambda x)\, [(\lambda x)^2 - (\lambda x)^4 + (\lambda x)^6 - \ldots] = \left[\frac{(\lambda x)^3}{3} - \frac{(\lambda x)^5}{5} + \frac{(\lambda x)^7}{7} \ldots\right] \frac{1}{\lambda^3}.$$

Nun ist bekannntlich $\text{Arc . tang } \lambda x = \lambda x - \frac{(\lambda x)^3}{3} + \frac{(\lambda x)^5}{5} - \frac{(\lambda x)^7}{7} \ldots$ folglich $\frac{(\lambda x)^3}{3} - \frac{(\lambda x)^5}{5} + \frac{(\lambda x)^7}{7} \ldots = \lambda x - \text{Arc . tang } \lambda x$ und $\int \frac{x^2\, dx}{1 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda x - \text{Arc . tang } \lambda x}{\lambda^3}$.

Nimmt man dies Integral von $x = o$ bis $x = 1$, so findet man $\frac{\lambda - \text{Arc . tang } \lambda}{\lambda^3}$.

7) Da F eine Funktion von λ und λ' ist, so ist $dF = \left(\frac{dF}{d\lambda}\right) d\lambda + \left(\frac{dF}{d\lambda'}\right) d\lambda'$ und wenn $\lambda = \lambda'$ ist, so ist $dF = 2\left(\frac{dF}{d\lambda}\right) d\lambda = 2\left(\frac{dF}{d\lambda'}\right) d\lambda'$; man hat auch in diesem Fall $\lambda F = \lambda' F$ und $\left(\frac{d . \lambda F}{d\lambda}\right) = \left(\frac{d . \lambda' F}{d\lambda'}\right)$. Nun ist aber $\left(\frac{d . \lambda F}{d\lambda}\right) = F + \lambda . \left(\frac{dF}{d\lambda}\right) = F + \frac{\lambda}{2} . \frac{dF}{d\lambda} = \frac{1}{2\lambda d\lambda} [F . d . (\lambda^2) + \lambda^2 . dF]$ $= \frac{1}{2\lambda} . \frac{d . (\lambda^2 F)}{d\lambda}$ ferner $\lambda^2 F = 1 - \frac{\text{Arc . tang } \lambda}{\lambda}$ und $\frac{d . (\lambda^2 F)}{d\lambda} = \frac{\text{Arc . tang } \lambda}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda(1 + \lambda^2)}$ folglich $\frac{1}{2\lambda} . \frac{d . (\lambda^2 F)}{d\lambda}$ oder $\left(\frac{d . \lambda F}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2\lambda^3} \left[\text{Arc . tang } \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right] = \left(\frac{d . \lambda' F}{d\lambda'}\right)$.

$$dF = \frac{d\lambda}{\lambda} \cdot \left(\frac{d \cdot \lambda F}{d\lambda}\right) + \frac{d\lambda'}{\lambda'} \cdot \left(\frac{d \cdot \lambda' F}{d\lambda'}\right) - F\left(\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\lambda'}{\lambda'}\right)$$

ist; man hat aber wenn λ gleich λ' ist,

$$\left(\frac{d \cdot \lambda F}{d\lambda}\right) = \left(\frac{d \cdot \lambda' F}{d\lambda'}\right); \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\lambda'}{\lambda'};$$

folglich

$$\left(\frac{d \cdot \lambda F}{d\lambda}\right) \cdot d\lambda = \tfrac{1}{2} \cdot \lambda \cdot dF + F \cdot d\lambda = \frac{1}{2\lambda} \cdot d \cdot \lambda^2 F.$$

Substituirt man statt F seinen Werth, so erhält man

$$\left(\frac{d \cdot \lambda F}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2\lambda^3} \cdot \left(\text{arc} \cdot \text{tang}\, \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right).$$

Man hat also für Ellipsoide, die durch Umdrehung entstanden sind, und deren halbe Umdrehungsaxe k ist, folgende Gleichungen:

$$A = \frac{3aM}{k^3 \cdot \lambda^3} \cdot \left(\lambda - \text{arc} \cdot \text{tang}\, \lambda\right);$$

$$B = \frac{3bM}{2k^3 \lambda^3} \cdot \left(\text{arc} \cdot \text{tang}\, \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right);$$

$$C = \frac{3cM}{2k^3 \cdot \lambda^3} \cdot \left(\text{arc} \cdot \text{tang}\, \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right).$$

4. Wir wollen nun die Anziehung der Sphäroide auf äußere Punkte betrachten. Diese Untersuchung bietet größere Schwierigkeiten dar, als die vorhergehende, wegen der Wurzelgröße $\sqrt{R}$ die sich in den Differenzialausdrücken befindet, und welche in dieser Gestalt die Integrationen unmöglich macht. Man kann sie durch eine schickliche Verwandlung der veränderlichen Größen, deren Funktionen sie sind, möglich machen; ich habe mich aber statt dieses Mittels der folgenden Methode bedient; welche blos auf die Differenziation der Funktionen gegründet ist.

Bezeichnet man durch V die Summe aller Theilchen des Sphäroids, jedes durch seinen Abstand vom angezogenen Punkt dividirt, und nennt man x, y, z, die Koordinaten des Theilchens dM des Sphäroids und a, b, c die des angezogenen Punktes: so erhält man:

$$V = \int \frac{dM}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}.$$

Bezeichnet man ferner, wie vorher, durch A, B, C, die Anziehungen des Sphä-

roids parallel mit den Axen der x, der y und der z und gegen ihren Anfangspunkt gerichtet, so erhält man

$$A = \int \frac{(a-x).dM}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\left(\frac{dV}{da}\right).$$

Man erhält auf eben diese Art

$$B = -\left(\frac{dV}{db}\right); \quad C = -\left(\frac{dV}{dc}\right).$$

Es folgt hieraus, daſs man leicht, sobald man V kennt, durch bloſse Differenziationen die Anziehung des Sphäroids, parallel mit irgend einer geraden Linie wird finden können, wenn man diese gerade Linie wie eine der rechtwinklichten Koordinaten des angezogenen Punktes betrachtet; eine Bemerkung, welche wir schon im 11ten Satz des 2ten Buches gemacht haben.

Verwandelt man den vorhergehenden Werth von V in eine Reihe *), so wird er:

$$V = \int \frac{dM}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}.\frac{(2ax+2by+2cz-x^2-y^2-z^2)}{a^2+b^2+c^2} \\ + \frac{3}{8}.\frac{(2ax+2by+2cz-x^2-y^2-z^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Diese Reihe ist steigend, in Rücksicht auf die Dimensionen des Späroids, und fallend in Beziehung auf die Koordinaten des angezogenen Punktes. Nimmt man nur auf das erste Glied Rücksicht, welches hinreichend ist, wenn der angezogene Punkt sehr entfernt ist; so erhält man:

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

wo M die ganze Masse des Sphäroids ist. Dieser Ausdruck wird noch genauer seyn, wenn man den Anfangspunkt der Koordinaten im Schwerpunckt des Sphäroids setzt. Denn man hat, vermöge der Eigenschaft dieses Punktes,

$$\int x.dM = o; \quad \int y.dM = o; \quad \int z.dM = o.$$

Sieht man dann das Verhältniſs der Abmessungen des Späroids zu seiner Entfernung vom angezogenen Punkte als eine sehr kleine Gröſse der ersten Ordnung an, so wird die Gleichung

*) Vermittelst des Binomischen Lehrsatzes.

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

bis zu den Gröſsen der dritten Ordnung genau seyn. Wir wollen nun einen strengen Ausdruck von V für elliptische Sphäroide suchen.

5. Behält man die Benennungen des ersten Satzes bey, so erhält man:

$$V = \int \frac{dM}{r} = \iiint r\,dr\,.\,dp\,.\,dq\,.\sin p = \tfrac{1}{2}\iint (r'^2 - r^2)\,.\,dp\,.\,dq\,.\sin p.$$

Substituirt man statt r und r' ihre im ersten Satz gefundenen Werthe, so erhält man

$$V = 2\,.\iint \frac{dp\,.\,dq\,.\sin p\,.\,I\,.\sqrt{R}}{L^2}.$$

Wir wollen nun die im 2ten Satz für äuſsere Punkte gegebenen Werthe von A, B, C wieder vornehmen,

$$A = 2\,.\iint .\,\frac{dp\,.\,dq\,.\sin p\,.\cos p\,.\sqrt{R}}{L};$$

$$B = 2\,.\iint .\,\frac{dp\,.\,dq\,.\sin p^2\,.\cos q\,.\sqrt{R}}{L};$$

$$C = 2\,.\iint .\,\frac{dp\,.\,dq\,.\sin p^2\,.\sin q\,.\sqrt{R}}{L}.$$

Da man an den Grenzen der Integrale $\sqrt{R} = o$ hat, so kann man leicht sehen, daſs man, wenn man die ersten Differenziale von V, A, B, C in Beziehung auf irgend eine der sechs Gröſsen a, b, c, k, m und n nimmt, daſs man nicht auf die Aenderungen der Grenzen Acht zu haben braucht, so daſs man zum Beyspiel

$$\left(\frac{dV}{da}\right) = 2\,.\iint dp\,.\,dq\,.\sin p\,.\left\{\frac{d\,.\,\frac{I\,.\sqrt{R}}{L^2}}{da}\right\}$$

hat; denn das Integral $\int \frac{dp\,.\sin p\,.\,I\,.\sqrt{R}}{L^2}$ ist gegen diesen Grenzen sehr nahe der Gröſse $R^{\frac{3}{2}}$ proportional, wodurch sein Differenzial bey diesen Grenzen gleich Null wird. Dieses festgesetzt, kann man sich leicht durch die Differenziation versichern, daſs man, wenn man der Kürze wegen,

$$a\,.\,A + b\,.\,B + c\,.\,C = F$$

setzt, zwischen den vier Gröſsen B, C, F und V folgende partielle Differenzial-

gleichung

gleichung haben wird [9]):

$$o = \left(\frac{a^2+b^2+c^2-k^2}{2}\right).k.\left[\left(\frac{dV}{dk}\right)-\left(\frac{dF}{dk}\right)\right]+k^2.(V-F)$$
$$+k^2.\left(\frac{m-1}{m}\right).b.\left[\left(\frac{dF}{db}\right)-\tfrac{1}{2}.\left(\frac{dV}{db}\right)-B\right]$$
$$+k^2.\left(\frac{n-1}{n}\right).c.\left[\left(\frac{dF}{dc}\right)-\tfrac{1}{2}.\left(\frac{dV}{dc}\right)-C\right]$$
$$-k^2.(m-1).\left(\frac{dF}{dm}\right)-k^2.(n-1).\left(\frac{dF}{dn}\right).$$

9) Da die Gröſsen A, B, C, F, V und ihre partiellen Differenziale sämmtlich den Factor $2dp.dq.\sin p$ enthalten, so kann man ihn, so wie auch das doppelte Integralzeichen, bey der Prüfung der gegebenen Differenzialgleichung der Kürze wegen weglassen. Man erhält so $V=\frac{I.\sqrt{R}}{L^2}$; $A=\frac{\sqrt{R}}{L}.\cos p$;

$B=\frac{\sqrt{R}}{L}\sin p.\cos q$; $C=\frac{\sqrt{R}}{L}.\sin p.\sin q$ und $F=\frac{\sqrt{R}}{L}(a.\cos p+b.\sin p.\cos q+c.\sin p.\sin q)$,

oder wenn man $W=a.\cos p+b.\sin p.\cos q+c.\sin p.\sin q$ setzt, $F=\frac{\sqrt{R}}{L}.W$ und

$F-\frac{1}{2}V=\frac{\sqrt{R}}{L}\left(W-\frac{I}{2L}\right)$; ferner, da L die Gröſse b nicht enthält, so ist

$$\left(\frac{d.(F-\frac{1}{2}V)}{db}\right)=\left(\frac{dR}{db}\right).\frac{1}{2L\sqrt{R}}.\left(W-\frac{I}{2L}\right)+\frac{\sqrt{R}}{L}\left[\left(\frac{dW}{db}\right)-\left(\frac{dI}{db}\right).\frac{1}{2L}\right].$$

Nun ist $\frac{\sqrt{R}}{L}.\left(\frac{dW}{db}\right)=\frac{\sqrt{R}}{L}.\sin p.\cos q=B$; $\left(\frac{dI}{db}\right)=m.\sin p.\cos q$;

$\left(\frac{dR}{db}\right)=2I.m.\sin p.\cos q-2mbL$; substituirt man diese Werthe, so findet man

$$\left(\frac{d.(F-\frac{1}{2}V)}{db}\right)-B=\frac{m}{L.\sqrt{R}}.\sin p.\cos q.\left(IW-\frac{I^2}{2L}\right)-\frac{mb}{\sqrt{R}}\left(W-\frac{I}{2L}\right)-\frac{m.\sqrt{R}.\sin p.\cos q}{2L^2}.$$

Substituirt man nun statt $\frac{2I}{L}$ seinen Werth $r+r'$ und $r'-r$ statt $\frac{2\sqrt{R}}{L}$ und multiplizirt man die vorhergehende Gleichung mit $k^2.\left(\frac{m-1}{m}\right).b$, so erhält man

$$\frac{k^2.(m-1)}{(r'-r).L}.\left[W.[(r'+r)b.\sin p.\cos q-2b^2]-\frac{r'^2+r^2}{2}.b.\sin p.\cos q+\frac{r'+r}{2}.b^2\right]\ldots(1),$$

dies ist der Werth der zweyten Zeile der gegebenen Differenzialgleichung. Man suche nun den Werth des Glieds $-k^2(m-1)\left(\frac{dF}{dm}\right)$, weil man wegen des gemeinschaftlichen Factors $(m-1)$ hoffen kann, daſs die Theile dieses Gliedes und der vorher gefundenen Gleichung (1) einander zum Theil

Man kann aus dieser Gleichung die Gröſsen B, C und F vermittelst ihrer Werthe $-\left(\frac{dV}{db}\right)$, $-\left(\frac{dV}{dc}\right)$ und $-a\,.\left(\frac{dV}{da}\right)-b\,.\left(\frac{dV}{db}\right)-c\,.\left(\frac{dV}{dc}\right)$

aufheben werden. Es ist aber $\left(\frac{dF}{dm}\right)=\left(\frac{dR}{dm}\right)\frac{W}{2L\,.\,\sqrt{R}}-\left(\frac{dL}{dm}\right)\cdot\frac{W\,.\,\sqrt{R}}{LL}$

$$=\frac{W}{(r'-r)\,.\,L}\left[\left(\frac{dR}{dm}\right).\frac{1}{L}-\left(\frac{dL}{dm}\right)\frac{(r'-r)^2}{2}\right];$$ ferner $\left(\frac{dL}{dm}\right)=\sin p^2\,.\,\cos q^2$,

und $$\left(\frac{dR}{dm}\right)=2I\,.\,b\,.\,\sin p\,.\,\cos q-b^2.\,L+(k^2-a^2-mb^2-nc^2)\,.\,\sin p^2\,.\,\cos q^2$$

$$=2I\,.\,b\,.\,\sin p\,.\,\cos q-b^2.\,L+\left(\frac{R-I^2}{L}\right).\,\sin p^2\,.\,\cos q^2;$$

und $$\left(\frac{dR}{dm}\right).\frac{1}{L}=(r'+r)\,.\,b\,.\,\sin p\,.\,\cos q-b^2-rr'\,.\,\sin p^2\,.\,\cos q^2,$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man:

$$-(m-1)\,.\,k^2.\left(\frac{dF}{dm}\right)=\frac{(m-1)\,.\,k^2}{(r'-r)\,.\,L}\left[-(r'+r)\,W.b.\sin p.\cos q+b^2W+\left(\frac{r'^2+r^2}{2}\right).W.\sin p^2\cos q^2\right]\ldots(2).$$

Die Summe der in (1) und (2) gefundenen Ausdrücke giebt

$$k^2\left(\frac{m-1}{m}\right).\,b\left[\left(\frac{dF}{db}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{dV}{db}\right)-B\right]-k^2\,.\,(m-1).\left(\frac{dF}{dm}\right)$$

$$=\frac{k^2.(m-1)}{(r'-r)\,.\,L}\cdot\left(-b^2W+\frac{r'^2+r^2}{2}.\,W.\sin p^2\,.\cos q^2-\frac{r'^2+r^2}{2}.\,b.\sin p\,.\cos q+\frac{r'+r}{2}\,.\,b^2\right)\ldots\quad(3).$$

Verwandelt man hier B in C; b in c; m in n; $b.\sin p\,.\,\cos q$ in $c.\sin p\,.\sin q$, so erhält man

$$k^2.\left(\frac{n-1}{n}\right)\,.\,c\,.\left[\left(\frac{dF}{dc}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{dV}{dc}\right)-C\right]-k^2\,.\,(n-1)\left(\frac{dF}{dn}\right)$$

$$=\frac{k^2.(n-1)}{(r'-r)\,.\,L}\cdot\left(-c^2W+\frac{r'^2+r^2}{2}.\,W.\sin p^2.\sin q^2-\frac{r'^2+r^2}{2}.\,c.\sin p\,.\sin q+\frac{r'+r}{2}\,.\,c^2\right)\ldots\quad(4).$$

Addirt man nun die zweyten Theile der Gleichungen (3) und (4), wobey zu bemerken ist, daſs $(m-1)\,.\,\sin p^2\,.\,\cos q^2+(n-1)\,.\,\sin p^2\,.\,\sin q^2=L-\cos p^2-\sin p^2=L-1$ und daſs $(m-1)\,b.\sin p\,.\cos q+(n-1)\,c.\sin p\,.\sin q=I-W$ ist, so erhält man:

$$\frac{k^2}{(r'-r)\,.\,L}\cdot\left[\left[-(n-1)\,.\,c^2-(m-1)b^2+\left(\frac{r'^2+r^2}{2}\right)L\right].W-\left(\frac{r'^2+r^2}{2}\right)I+\left(\frac{r'+r}{2}\right)[(m-1).b^2+(n-1)c^2]\right]\ldots(5).$$

Wir wollen nun die beiden ersten Glieder der gegebenen Differenzialgleichung betrachten. Man hat $V-F=\frac{\sqrt{R}}{L}\,.\left(\frac{I}{L}-W\right)$ und $\left(\frac{d\,.\,(V-F)}{dk}\right)=\left(\frac{dR}{dk}\right)\cdot\frac{1}{2L\,\sqrt{R}}\left(\frac{I}{L}-W\right)$, wo $\left(\frac{dR}{dk}\right)=2kL$ ist; man erhält hierdurch

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2-k^2}{2}\right)k\left[\left(\frac{dV}{dk}\right)-\left(\frac{dF}{dk}\right)\right]+k^2\,(V-F)$$

$$=k^2\left(\frac{I}{L}-W\right)\left[\frac{\sqrt{R}}{L}+\left(\frac{a^2+b^2+c^2-k^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{R}}\right]$$

$$=\frac{k^2}{(r'-r)\,L}\left(\frac{r'+r}{2}-W\right)\left(\frac{(r'-r)^2}{2}L+\frac{a^2+b^2+c^2-k^2}{4}\right)\ldots\quad(6).$$

eliminiren, und man wird dann eine Gleichung zwischen den partiellen Differenzialen von V allein erhalten. Es sey also

$$V = \frac{4\pi \,.\, k^3}{3 \,.\, \sqrt{mn}} \,.\, v = M \,.\, v$$

wo M nach dem ersten Satz die Masse des elliptischen Sphäroids ist; man führe statt der willkührlichen Gröſsen m und n zwey andere θ und ϖ ein, welche so beschaffen sind, daſs man

$$\theta = \left(\frac{1 - m}{m}\right) . k^2; \quad \varpi = \left(\frac{1 - n}{n}\right) . k^2$$

hat; θ wird der Unterschied des Quadrats der mit y parallelen Axe des Sphäroids und des Quadrats der mit x parallelen Axe seyn; ϖ wird der Unterschied zwischen dem Quadrat der Axe der z und dem Quadrat der Axe x seyn; so daſs $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ die beiden Eccentrizitäten des Sphäroids seyn werden, wenn man die kleinste seiner drey Axen für die Axe der x nimmt. Man erhält so [10]):

Da die in (6) und (5) gefundenen Ausdrücke zusammen gleich Null seyn sollen, so muſs man die Gröſsen a^2 und k^2 aus dem Ausdruck (6) wegschaffen, weil sie sich nicht im Ausdruck (5) befinden. Die Gleichung für R giebt $a^2 - k^2 = \frac{I^2 - R}{L} - m b^2 - n c^2$ und folglich

$$a^2 + b^2 + c^2 - k^2 = \frac{I^2 - R}{L} - (m - 1) . b^2 - (n - 1) . c^2 = r' r L - (m - 1) . b^2 - (n - 1) . c^2.$$

Hierdurch verwandelt sich der in (6) gegebene Ausdruck in folgenden

$$\frac{k^2}{(r' - r) . L} \left(\frac{r' + r}{2} - W\right) \left(\frac{r'^2 + r^2}{2} . L - (m - 1) . b^2 - (n - 1) . c^2\right) \ldots (7).$$

Die Summe der in (5) und (7) gefundenen Ausdrücke giebt folgenden:

$$\frac{k^2}{(r' - r) . L} \left[- \left(\frac{r^2 + r'^2}{2}\right) I + \left(\frac{r^2 + r'^2}{2}\right) . \left(\frac{r' + r}{2}\right) L \right]$$

$$= \frac{k^2}{(r' - r)} \left(\frac{r^2 + r'^2}{2}\right) \left[- \frac{I}{L} + \left(\frac{r' + r}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{k^2}{(r' - r)} . \left(\frac{r^2 + r'^2}{2}\right) \left\{ - \left(\frac{r' + r}{2}\right) + \left(\frac{r' + r}{2}\right) \right\} = 0.$$

10) Da V eine Funktion von m, n und k, v hingegen vom θ, ϖ, und k ist, so hat man

$$\left(\frac{dV}{dk}\right) dk + \left(\frac{dV}{dm}\right) dm + \left(\frac{dV}{dn}\right) dn = dV$$ und da $V = Mv$, so ist auch

$$dV = \left\{ v . \left(\frac{dM}{dk}\right) + \left(\frac{dv}{dk}\right) M \right\} dk + \left\{ v . \left(\frac{dM}{d\varpi}\right) + M . \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) \right\} d\varpi + \left\{ v . \left(\frac{dM}{d\theta}\right) + M . \left(\frac{dv}{d\theta}\right) \right\} d\theta.$$

Nun ist $m = \frac{k^2}{k^2 + \theta}$; $n = \frac{k^2}{k^2 + \varpi}$; M oder $\frac{4 \pi k^3}{3 \sqrt{mn}} = \frac{4}{3} \pi . k . \sqrt{k^2 + \theta} . \sqrt{k^2 + \varpi}$ folglich

$$k \cdot \left(\frac{dV}{dk}\right) = M \cdot \left[2\,\theta \cdot \left(\frac{dv}{d\theta}\right) + 2\,\varpi \cdot \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + k \cdot \left(\frac{dv}{dk}\right) + 3\,v\right];$$

$$\left(\frac{dV}{dm}\right) = -M \cdot \left[\frac{k^2}{m^2} \cdot \left(\frac{dv}{d\theta}\right) + \frac{v}{2m}\right];$$

$$\left(\frac{dV}{dn}\right) = -M \cdot \left[\frac{k^2}{n^2} \cdot \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{v}{2n}\right];$$

wo V in den ersten Theilen dieser Gleichungen als eine Funktion von a, b, c, k, m, n; und v in den zweyten Theilen als eine Funktion von a, b, c, θ, ϖ und k angesehen wird. Setzt man nun

$$Q = a \cdot \left(\frac{dv}{da}\right) + b \cdot \left(\frac{dv}{db}\right) + c \cdot \left(\frac{dv}{dc}\right);$$

$$\left(\frac{dM}{dk}\right) = \tfrac{4}{3}\pi \sqrt{k^2+\theta} \cdot \sqrt{k^2+\varpi} + \frac{\tfrac{4}{3}\pi k^2 \cdot \sqrt{k^2+\varpi}}{\sqrt{k^2+\theta}} + \frac{\tfrac{4}{3}\pi k^2 \sqrt{k^2+\theta}}{\sqrt{k^2+\varpi}} = \frac{M}{k} + \frac{kM}{k^2+\theta} + \frac{kM}{k^2+\varpi} = \frac{M}{k}(1+m+n).$$

ferner $\left(\frac{dM}{d\varpi}\right) = \frac{\tfrac{2}{3}\pi \cdot k \sqrt{k^2+\theta}}{\sqrt{k^2+\varpi}} = \frac{M}{2(k^2+\varpi)} = \frac{M}{k} \cdot \frac{n}{2k}$ und eben so $\left(\frac{dM}{d\theta}\right) = \frac{M}{k} \cdot \frac{m}{2k}$.

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung, so findet man

$$dV = M \cdot \left[\frac{v \cdot (1+m+n)}{k} + \left(\frac{dv}{dk}\right)\right] dk + \left[\frac{v \cdot n}{2k^2} + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right)\right] M \cdot d\varpi + \left[\frac{v \cdot m}{2k^2} + \left(\frac{dv}{d\theta}\right)\right] M \cdot d\theta.$$

Da aber $\varpi = \left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdot k^2$, so ist $d\varpi = 2\left(\frac{1}{n} - 1\right) k \cdot dk - \frac{k^2\, dn}{n^2} = \frac{2\varpi}{k}\, dk - \frac{k^2}{n^2}\, dn$; eben so ist $d\theta = \frac{2\theta}{k} \cdot dk - \frac{k^2}{m^2} \cdot dm$. Dadurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$dV = \frac{M}{k} \cdot dk \cdot \left[v(1+m+n) + k \cdot \left(\frac{dv}{dk}\right) + \frac{v n \varpi}{k^2} + 2\varpi \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{v \cdot m \cdot \theta}{k^2} + 2\,\theta \cdot \left(\frac{dv}{d\theta}\right)\right]$$
$$- M \cdot dm \cdot \left[\frac{vm}{2k^2} + \left(\frac{dv}{d\theta}\right)\right] \cdot \frac{k^2}{m^2} - M \cdot dn \cdot \left[\frac{vn}{2k^2} + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right)\right] \cdot \frac{k^2}{n^2}.$$

Es ist aber auch $dV = \left(\frac{dV}{dk}\right) dk + \left(\frac{dV}{dm}\right) dm + \left(\frac{dV}{dn}\right) dn$. Die Koeffizienten von dk, dm, dn sind also in beiden Gleichungen einander gleich; hierdurch erhält man die im Text gegebenen Werthe der partiellen Differenziale von V. Wir bemerken nur noch, daſs die in v multiplizirten Glieder des Koeffizienten von dk, nämlich $v(1+m+n) + \frac{v \cdot n\varpi}{k^2} + \frac{v \cdot m\theta}{k^2}$ gleich

$$v\left[1 + m\left(1 + \frac{\theta}{k^2}\right) + n\left(1 + \frac{\theta}{k^2}\right)\right] \text{ gleich } v\left(1 + \frac{m}{m} + \frac{n}{n}\right) \text{ gleich } 3v \text{ sind.}$$

so hat man $F = -MQ$ [11]), und man erhält die Werthe von $k\left(\frac{dF}{dk}\right)$, $\left(\frac{dF}{dm}\right)$, $\left(\frac{dF}{dn}\right)$ wenn man in den vorhergehenden Werthen von $k \,.\left(\frac{dV}{dk}\right)$, $\left(\frac{dV}{dm}\right)$ und $\left(\frac{dV}{dn}\right)$, v in $-Q$ verwandelt. Ueberdies sind V und F homogene Funktionen von a, b, c, k, $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$, von zwey Abmessungen; denn da V die Summe der Theilchen des Sphäroids ist, jedes durch seine Entfernung vom angezogenen Punkt dividirt, und da jedes Theilchen drey Abmessungen hat; so ist V nothwendig von zwey Abmessungen, eben so wie F, welches eben so viel Abmessungen als V hat; v und Q sind also homogene Funktionen derselben Gröſsen von der Abmessung -1, und man hat vermöge der Natur der homogenen Funktionen [12])

$$a.\left(\frac{dv}{da}\right)+b.\left(\frac{dv}{db}\right)+c.\left(\frac{dv}{dc}\right)+2\,\theta.\left(\frac{dv}{d\theta}\right)+2\,\varpi.\left(\frac{dv}{d\varpi}\right)+k.\left(\frac{dv}{dk}\right)=-v;$$

eine Gleichung, welcher man folgende Gestalt geben kann:

$$2\,\theta\,.\left(\frac{dv}{d\theta}\right)+2\,\varpi.\left(\frac{dv}{d\varpi}\right)+k.\left(\frac{dv}{dk}\right)=-v-Q.$$

Man erhält auf eben diese Art

$$a.\left(\frac{dQ}{da}\right)+b.\left(\frac{dQ}{db}\right)+c.\left(\frac{dQ}{dc}\right)+2\theta.\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)+2\varpi.\left(\frac{dQ}{d\varpi}\right)+k.\left(\frac{dQ}{dk}\right)=-Q.$$

dieses festgesetzt, substituirt man in die Gleichung (1) statt V, F und statt ihrer partiellen Differenziale, ihre vorhergehenden Werthe; man substituire ferner

11) Es ist nämlich $F = aA + bB + cC = -a\left(\frac{dV}{da}\right) - b\left(\frac{dV}{db}\right) - c\left(\frac{dV}{dc}\right)$
$= -a\left(\frac{d.Mv}{da}\right) - b\left(\frac{d.Mv}{db}\right) - c\left(\frac{d.Mv}{dc}\right)$ und da M die Gröſsen a, b, c nicht enthält, so ist $\left(\frac{d.Mv}{da}\right) = M.\left(\frac{dv}{da}\right)$; $\left(\frac{d.Mv}{db}\right) = M.\left(\frac{dv}{db}\right)$ u. s. w.; folglich

$$F = -M\left[a\left(\frac{dv}{da}\right) + b\left(\frac{dv}{db}\right) + c\left(\frac{dv}{dc}\right)\right] = -MQ.$$

12) Man sehe die Anmerkung (116) zum 49sten Satz des 2ten Buches.

$\frac{k^2}{k^2+\theta}$ statt m und $\frac{k^2}{k^2+\varpi}$ statt n, so erhält man [13]):

$$o = (a^2+b^2+c^2).\left[v + \tfrac{1}{2}Q - \tfrac{1}{2}.\left[a.\left(\frac{dQ}{da}\right) + b.\left(\frac{dQ}{db}\right) + c.\left(\frac{dQ}{dc}\right)\right]\right]$$

$$+\theta^2.\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) + \varpi^2.\left(\frac{dQ}{d\varpi}\right) - \frac{k^3}{2}.\left(\frac{dQ}{dk}\right) + \tfrac{1}{2}(\theta+\varpi).Q \qquad (2).$$

$$+b\theta.\left(\frac{dQ}{db}\right) + c\varpi.\left(\frac{dQ}{dc}\right) - \tfrac{1}{2}.b\theta.\left(\frac{dv}{db}\right) - \tfrac{1}{2}.c\varpi.\left(\frac{dv}{dc}\right)$$

6. Wir wollen uns nun vorstellen, daſs die Funktion v in eine Reihe verwandelt sey, welche nach den Dimensionen des Sphäroids nämlich nach k, $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ steigt, und folglich in Rücksicht auf die Gröſsen a, b, c fällt; diese Reihe wird folgende Form haben:

13) Man findet, wenn man diese Werthe substituirt $k.\left(\frac{dV}{dk}\right) = M\,(-v - Q + 3v) = M\,(2v - Q)$,

ferner $-k\left(\frac{dF}{dk}\right) = +M\left[2\theta.\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) + 2\varpi\left(\frac{dQ}{d\varpi}\right) + k\left(\frac{dQ}{dk}\right) + 3Q\right]$

$$= -M\left[a\left(\frac{dQ}{da}\right) + b\left(\frac{dQ}{db}\right) + c\left(\frac{dQ}{dc}\right) - 2Q\right].$$

Braucht man diese beiden Werthe von $k\left(\frac{dF}{dk}\right)$ und den gegebenen Werth von $k\left(\frac{dV}{dk}\right)$, so erhält man

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2-k^2}{2}\right).k\left[\left(\frac{dV}{dk}\right)-\left(\frac{dF}{dk}\right)\right] = M.(a^2+b^2+c^2).\left[v+\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}\left[a\left(\frac{dQ}{da}\right)+b\left(\frac{dQ}{db}\right)+c\left(\frac{dQ}{dc}\right)\right]\right]$$

$$-M\left[+k^2(v+Q) + k^2\theta.\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) + k^2.\varpi.\left(\frac{dQ}{d\varpi}\right) + \frac{k^3}{2}.\left(\frac{dQ}{dk}\right)\right] \ldots \quad (1).$$

Man hat ferner $k^2\,(V-F) = k^2 M\,(v+Q) \ldots$ (3); und da $k^2\left(\frac{m-1}{m}\right) = -\theta$, so ist

$$k^2\left(\frac{m-1}{m}\right).b.\left[\left(\frac{dF}{db}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dV}{db}\right) - B\right] = -\theta.b.M.\left[-\left(\frac{dQ}{db}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{db}\right) + \left(\frac{dv}{db}\right)\right] \quad (4);$$

und $k^2\left(\frac{n-1}{n}\right).c.\left[\left(\frac{dF}{dc}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dV}{dc}\right) - C\right] = -\varpi.c.M.\left[-\left(\frac{dQ}{dc}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{dc}\right) + \left(\frac{dv}{dc}\right)\right]$ (5);

endlich $-k^2\,(m-1).\left(\frac{dF}{dm}\right) = -\theta.m.M\left[-\frac{k^2}{m^2}.\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) - \frac{Q}{2m}\right]$

$$= \frac{M.k^2.\theta}{m}.\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) + \tfrac{1}{2}\theta.QM = M.\theta\,(k^2+\theta)\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) + \tfrac{1}{2}\theta.Q.M \ldots \quad (6),$$

und eben so $-k^2\,(n-1)\left(\frac{dF}{dn}\right) = M.\varpi\,(k^2+\varpi)\left(\frac{dQ}{d\varpi}\right) + \tfrac{1}{2}\varpi.Q.M \ldots$ (7).

Die Summe der in (1), (3), (4), (5), (6) und (7) gefundenen Werthe giebt, wenn man den gemeinschaftlichen Factor M wegläſst, die im Text gegebene Gleichung (2).

$$v = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \text{etc.}$$

wo $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, etc. homogene Funktionen von a, b, c, k, $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ und zwar sowohl in Beziehung auf die drey erstern allein als auch in Beziehung auf die drey letztern dieser sechs Gröſsen homogene sind; und wo die Abmessungen in Rücksicht auf die drey erstern immer abnehmen, und in Rücksicht auf die drey letztern immer zunehmen. Da nun diese Funktionen immer mit v einerley Abmessungen haben, so sind sie alle von der Abmessung -1.

Substituirt man in die Gleichung (2) statt v seinen vorhergehenden Reihenwerth; nennt man s die Abmessung von $U^{(i)}$ in Rücksicht auf k, $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ und folglich $-s-1$, seine Abmessung in Rücksicht auf a, b, c; nennt man ferner s' die Abmessungen von $U^{(i+1)}$ in Rücksicht auf k, $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ und folglich $-s'-1$ seine Abmessungen in Rücksicht auf a, b, c; überlegt man dann, daſs vermöge der Natur der homogenen Funktionen

$$a.\left(\frac{dU^{(i)}}{da}\right) + b.\left(\frac{dU^{(i)}}{db}\right) + c.\left(\frac{dU^{(i)}}{dc}\right) = -(s+1)\,U^{(i)}$$

$$a.\left(\frac{dU^{(i+1)}}{da}\right) + b.\left(\frac{dU^{(i+1)}}{db}\right) + c.\left(\frac{dU^{(i+1)}}{dc}\right) = -(s'+1)\,U^{(i+1)}$$

ist; so erhält man, wenn man die Glieder wegläſst, welche in Rücksicht auf k, $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ von höherer Dimension sind, als die Glieder, welche man beybehält [14]),

14) Es ist nämlich, wenn man vom Reihenwerth von v bloſs die zwey Glieder $U^{(i)}$ und $U^{(i+1)}$ behält,

$$Q = a\left(\frac{dU^{(i)}}{da}\right) + b\left(\frac{dU^{(i)}}{db}\right) + c\left(\frac{dU^{(i)}}{dc}\right) + a\left(\frac{dU^{(i+1)}}{da}\right) + b\left(\frac{dU^{(i+1)}}{db}\right) + c\left(\frac{dU^{(i+1)}}{dc}\right)$$

$$= -(s+1)\,U^{(i)} - (s'+1)\,U^{(i+1)};$$ und hieraus $$a\left(\frac{dQ}{da}\right) + b\left(\frac{dQ}{db}\right) + c\left(\frac{dQ}{dc}\right)$$

$$= -(s+1)\left[a\left(\frac{dU^{(i)}}{da}\right) + b\left(\frac{dU^{(i)}}{db}\right) + c\left(\frac{dU^{(i)}}{dc}\right)\right]$$

$$-(s'+1)\left[a\left(\frac{dU^{(i+1)}}{da}\right) + b\left(\frac{dU^{(i+1)}}{db}\right) + c\left(\frac{dU^{(i+1)}}{dc}\right)\right]$$

$$= +(s+1)^2 . U^{(i)} + (s'+1)^2 . U^{(i+1)}.$$ Substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$(a^2+b^2+c^2)\left[v^2 + \tfrac{1}{2}Q - \tfrac{1}{2}\left[a\left(\frac{dQ}{da}\right) + b\left(\frac{dQ}{db}\right) + c\left(\frac{dQ}{dc}\right)\right]\right]$$

$$= -(a^2+b^2+c^2)\left[s.(s+3).U^{(i)} + s'.(s'+3).U^{(i+1)}\right].$$

$$U^{(i+1)} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(s+1)\,.\,k^2\,.\left(\frac{dU^{(i)}}{dk}\right) - (s+1)\,.\,\theta^2\,.\left(\frac{dU^{(i)}}{d\theta}\right) \\ -(s+1)\,.\,\varpi^2\,.\left(\frac{dU^{(i)}}{d\varpi}\right) - \frac{(s+1)}{2}\,.\,(\theta+\varpi)\,.\,U^{(i)} \\ -(s+\frac{3}{2})\,.\,b\theta\,.\left(\frac{dU^{(i)}}{db}\right) - (s+\frac{3}{2})\,.\,c\varpi\,.\left(\frac{dU^{(i)}}{dc}\right) \end{array}\right\}}{s'\,.\left(\frac{s'+3}{2}\right).\,(a^2+b^2+c^2)} \quad (3).$$

Diese Gleichung giebt den Werth von $U^{(i+1)}$ vermittelst $U^{(i)}$ und seiner partiellen Differenziale; man hat aber

$$U^{(0)} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}};$$

weil wir im 4ten Satz, wenn wir nur auf das erste Glied der Reihe Rücksicht nehmen,

$$V = \frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

gefunden haben. Substituirt man diesen Werth von $U^{(0)}$ in die vorhergehende Formel, so wird man den Werth von $U^{(1)}$ erhalten; vermittelst dieses Werths von $U^{(1)}$ wird man den Werth von $U^{(2)}$ erhalten, u. s. w. Es ist aber merkwürdig, daſs keine dieser Gröſsen k enthält; denn es ist aus der Formel (3) klar, daſs $U^{(1)}$ die Gröſse k nicht enthalten wird, weil $U^{(0)}$ sie nicht enthält, und daſs $U^{(2)}$ sie nicht enthalten wird, weil $U^{(1)}$ sie nicht enthält, und so für die übrigen; so daſs die ganze Reihe $U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} +$ etc. von k unabhän-

Man muſs im zweyten Theil dieser Gleichung $U^{(i)}$ weglassen, weil die übrigen Glieder, welche die Gleichung (2) enthält, alle von höheren Abmessungen sind, als $U^{(i)}$; und folglich nur mit $U^{(i+1)}$ zusammengenommen, sich aufheben können. Aus eben diesem Grund muſs man in den übrigen Gliedern der Gleichung (2) statt Q bloſs das Glied $-(s+1).U^{(i)}$ brauchen, weil die aus dem Glied $U^{(i+1)}$ entspringenden Theile von höhern Abmessungen sind. Man hat also für alle übrigen Glieder der Gleichung (2), $Q = -(s+1)\,U^{(i)}$; $\nu = U^{(i)}$; und man erhält nun ohne Schwürigkeit die im Text gegebene Gleichung (3).

hängig ist, oder welches dasselbe ist, $\left(\frac{dv}{dk}\right) = o$. Die Werthe von v, $-\left(\frac{dv}{da}\right)$, $-\left(\frac{dv}{db}\right)$, $-\left(\frac{dv}{dc}\right)$ sind also für alle elliptische Sphäroide, welche ähnliche Lage, und dieselben Eccentricitäten $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ haben, gleich groſs; da aber $-M.\left(\frac{dv}{da}\right)$, $-M.\left(\frac{dv}{db}\right)$, $-M.\left(\frac{dv}{dc}\right)$ nach dem 4ten Satz die Anziehungen des Sphäroids parallel mit seinen drey Axen ausdrücken; so verhalten sich die Anziehungen verschiedener elliptischer Sphäroide auf einen äuſsern Punkt, wie ihre Massen, wenn sie denselben Mittelpunkt, dieselbe Lage der Axen, und gleiche Eccentricitäten haben.

Man sieht leicht aus der Formel (3), daſs die Abmessungen von $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ etc.; in Rücksicht auf $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ successive um zwey Einheiten wachsen, so daſs $s = 2i$ und $s' = 2i + 2$ ist; man hat überdies durch die Natur homogener Funktionen

$$\varpi.\left(\frac{dU^{(i)}}{d\varpi}\right) = i\,.\,U^{(i)} - \theta\,.\left(\frac{dU^{(i)}}{d\theta}\right).$$

Die Formel (3) verwandelt sich so in folgende:

$$U^{(i+1)} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(2i+1).\theta.(\varpi-\theta).\left(\frac{dU^{(i)}}{d\theta}\right) - (2i+\frac{3}{2}).\,b\theta.\left(\frac{dU^{(i)}}{db}\right)\\ -(2i+\frac{3}{2}).\,c\,.\,\varpi.\left(\frac{dU^{(i)}}{dc}\right) - \frac{1}{2}(2i+1).[\theta+(2i+1)\varpi].\,U^{(i)}\end{array}\right\}}{(i+1).(2i+s).(a^2+b^2+c^2)} \quad (4).$$

Man wird vermittelst dieser Gleichung den Werth von v durch eine sehr convergirende Reihe erhalten, so oft die Eccentricitäten $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ sehr klein sind, oder wenn die Entfernung $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ des angezogenen Punktes vom Mittelpunkt des Sphäroids, in Vergleichung mit den Dimensionen des Sphäroids sehr groſs ist.

Ist das Sphäroid eine Kugel, so hat man $\theta = o$; $\varpi = o$, dies giebt $U^{(1)} = o$, $U^{(2)} = o$, u. s. w.; folglich

$$v = U^{(0)} = \frac{M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

und

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

Es folgt hieraus, daſs V denselben Werth hat, als ob die ganze Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre, und daſs folglich eine Kugel jeden äuſsern Punkt so anzieht, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre; ein Resultat, auf welches wir schon im 12ten Satz des zweyten Buches gekommen sind.

7. Die Eigenschaft der Funktion v, daſs sie von k unabhängig ist, verschaft ein sehr einfaches Mittel, ihrem Werth die einfachste Gestalt zu geben, deren er fähig ist; denn da man k willkührlich ändern kann, ohne diesen Werth zu ändern, wofern man nur dem Sphäroid dieselben Eccentricitäten $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ läſst; so kann man k so annehmen, daſs das Sphäroid unendlich abgeplattet ist, oder so, daſs seine Oberfläche durch den angezogenen Punkt geht. In diesen beiden Fällen wird die Untersuchung der Anziehungen des Sphäroids einfacher; da wir aber die Anziehungen der elliptischen Sphäroide auf Punkte, welche auf ihrer Oberfläche sich befinden, vorher bestimmt haben, so werden wir k so annehmen, daſs die Fläche des Sphäroids durch den angezogenen Punkt geht.

Nennt man für dies neue Sphäroid k', m', n' die Gröſsen, welche wir im ersten Satz für das bisher betrachtete Sphäroid k, m, n genannt haben; so wird die Bedingung, daſs der angezogene Punkt auf seiner Oberfläche ist, und daſs folglich a, b, c die Koordinaten eines Punktes dieser Fläche sind, folgende Gleichung geben:

$$a^2 + m' . b^2 + n' . c^2 = k'^2;$$

und da man annimmt, daſs die Eccentrizitäten $\sqrt{\theta}$ und $\sqrt{\varpi}$ dieselben bleiben, so erhält man

$$\left(\frac{1 - m'}{m'}\right) . k'^2 = \theta; \quad \left(\frac{1 - n'}{n'}\right) . k'^2 = \varpi.$$

Hieraus findet man:

$$m' = \frac{k'^2}{k'^2 + \theta}; \quad n' = \frac{k'^2}{k'^2 + \varpi}.$$

Man erhält also zur Bestimmung von k' folgende Gleichung:

$$a^2 + \frac{k'^2}{k'^2 + \theta} \cdot b^2 + \frac{k'^2}{k'^2 + \varpi} \cdot c^2 = k'^2. \quad (5)$$

Man kann hieraus leicht schliefsen, dafs es nur ein Sphäroid giebt, dessen Oberfläche durch den angezogenen Punkt geht, wenn θ und ϖ unverändert bleiben. Denn wenn man annimmt, dafs θ und ϖ positiv sind, welches man immer thun kann; so ist klar, dafs, wenn man in der vorhergehenden Gleichung k'^2 um irgend eine Gröfse wachsen läfst, welche wir als einen aliquoten Theil von k'^2 ansehen können, dafs jedes Glied des ersten Theils dieser Gleichung, in einem geringern Verhältnifs wachsen wird als k'^2; wenn also im ersten Zustand von k'^2 Gleichheit zwischen den beiden Theilen dieser Gleichung vorhanden war, so wird diese Gleichheit nicht mehr im zweyten Zustand Statt finden; woraus folgt, dafs k'^2 nur eines einzigen reellen und positiven Werthes fähig ist.

Es sey nun M' die Masse des neuen Sphäroids; es seyen A', B', C' seine mit den Axen der a, der b und der c parallelen Anziehungen; setzt man

$$\frac{1 - m'}{m'} = \lambda^2; \qquad \frac{1 - n'}{n'} = \lambda'^2;$$

$$F = \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1 + \lambda^2 \cdot x^2) \cdot (1 + \lambda'^2 \cdot x^2)}},$$

so erhält man nach dem dritten Satz

$$A' = \frac{3\,a M' . F}{k'^3}; \quad B' = \frac{3\,b M'}{k'^3} \cdot \left(\frac{d \,.\, \lambda F}{d\lambda}\right); \quad C' = \frac{3\,c . M'}{k'^3} \cdot \left(\frac{d . \lambda' F}{d\lambda'}\right).$$

Verwandelt man in diesen Werthen von A', B', C' die Gröfse M' in M, so erhält man, vermöge des vorhergehenden Satzes, die Werthe von A, B, C in Beziehung auf das erste Sphäroid. Die Gleichungen

$$\left(\frac{1 - m'}{m'}\right) . k'^2 = \theta; \qquad \left(\frac{1 - n'}{n'}\right) . k'^2 = \varpi,$$

geben aber

$$\lambda^2 = \frac{\theta}{k'^2}; \quad \lambda'^2 = \frac{\varpi}{k'^2};$$

und da k'^2 durch die Gleichung (5) gegeben ist, welcher man folgende Gestalt geben kann:

$$o = k'^6 - (a^2 + b^2 + c^2 - \theta - \varpi) . k'^4 - [(a^2 + c^2) . \theta + (a^2 + b^2) . \varpi - \theta\varpi] k'^2 - a^2 . \theta\varpi,$$

so hat man

$$A = \frac{3\,a\,M}{k'^3} . F; \quad B = \frac{3\,b\,M}{k'^3} . \left(\frac{d . \lambda F}{d\lambda}\right); \quad C = \frac{3\,c\,M}{k'^3} . \left(\frac{d . \lambda' F}{d\lambda'}\right).$$

Diese Werthe haben für alle Punkte außerhalb des Sphäroids Statt, und man darf, um sie auf die Punkte der Oberfläche und selbst auf die innern Punkte zu erstrecken, nur k' in k verwandeln.

Ist das Sphäroid ein Umdrehungssphäroid, so daſs $\theta = \varpi$ ist, so giebt die Gleichung (5)

$$2\,k'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \theta + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - \theta)^2 + 4\,a^2 . \theta},$$

und man hat nach Satz 3.

$$A = \frac{3\,a\,M}{k'^3 . \lambda^3} . \left(\lambda - \text{arc . tang}\ \lambda\right);$$

$$B = \frac{3\,b\,M}{2\,k'^3\,\lambda^3} . \left(\text{arc . tang}\ \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right);$$

$$C = \frac{3\,c\,M}{2\,k'^3 . \lambda^3} . \left(\text{arc . tang}\ \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right).$$

Wir haben nun eine vollständige Theorie der Anziehungen elliptischer Sphäroide erlangt; denn das einzige, was noch zu wünschen übrig ist, ist die Integration des Differenzialausdrucks von F, und diese Integration ist in dem allgemeinen Fall nicht nur durch die bekannten Methoden, sondern an sich selbst unmöglich. Der Werth von F kann nicht durch eine endliche Anzahl Glieder von algebraischen Gröſsen, Logarithmen oder Kreisbogen ausgedrückt werden, oder welches dasselbe ist, durch keine algebraische Funktion von Gröſsen, deren Exponenten beständig, Null, oder veränderlich sind. Da nun die Funktionen dieser Art die einzigen sind, welche man unabhängig vom Zeichen $\int$ ausdrücken kann, so ist

es unmöglich, Integrale, welche nicht auf ähnliche Funktionen zurückgeführt werden können, durch eine endliche Anzahl Glieder auszudrücken.

Wenn das elliptische Sphäroid nicht gleichartig ist und wenn es aus elliptischen Schichten besteht, welche ihre Lage, Eccentricität und Dichte nach irgend einem Gesetz ändern: so erhält man die Anziehung einer seiner Schichten, wenn man nach dem vorhergehenden den Unterschied der Anziehungen zweyer elliptischen gleichartigen Sphäroide bestimmt, welche mit der Schichte einerley Dichtigkeit haben, und wovon das erstere die äuſsere Oberfläche der Schichte, das zweyte hingegen die innere Oberfläche derselben Schichte zur Oberfläche hat. Summirt man hernach diese Differenzialanziehungen, so wird man die Anziehung des ganzen Sphäroids erhalten.

Zweytes Kapitel.

Von der Entwicklung der Anziehungen irgend eines Sphäroids in Reihen

8. Wir werden im allgemeinen die Anziehungen irgend eines Sphäroids betrachten. Wir haben im 4ten Satz gesehen, daſs der Ausdruck V der Summe aller Theilchen des Sphäroids, jedes durch seinen Abstand vom angezogenen Punkt dividirt, den Vortheil hat, durch seine Differenziation die Anziehung dieses Sphäroids, parallel mit irgend einer geraden Linie zu geben. Wir werden überdies sehen, wenn wir von der Figur der Planeten handeln werden, daſs die Anziehung ihrer Theilchen sich unter dieser Gestalt in der Gleichung ihres Gleichgewichts darbietet; wir wollen uns also vorzüglich mit der Untersuchung von V beschäftigen.

Wir werden die Gleichung des 4ten Satzes

$$V = \int \frac{dM}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$$

wieder vornehmen, wo a, b, c die Koordinaten des angezogenen Punktes sind; wo x, y, z die Koordinaten des Theilchens dM, des Sphäroids sind, und wo der Anfangspunkt der Koordinaten im Innern des Sphäroids ist. Dies Integral muſs in Beziehung auf die veränderlichen Gröſsen x, y, z genommen werden, und seine Grenzen sind von a, b, c unabhängig; man findet dann durch die Differenziation [15])

15) Man hat $\left(\frac{dV}{da}\right) = -\int \frac{dM.(a-x)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$ und wenn man von neuem differenzürt

$$\left(\frac{d^2V}{da^2}\right) = -\int \frac{dM}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} + 3\int \frac{dM.(a-x)^2}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{5}{2}}}.$$

Hieraus findet man unmittelbar

$$o = \left(\frac{d^2V}{da^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{db^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dc^2}\right); \qquad (1)$$

eine Gleichung, auf welche wir schon im 11ten Satz des zweyten Buches gekommen sind.

Wir wollen nun die Koordinaten in andere bequemere verwandeln. Es sey hierzu r der Abstand des angezogenen Punktes vom Anfangspunkt der Koordinaten; θ der Winkel, welchen der Radius r mit der Axe der a macht; ϖ der Winkel, welchen die durch diesen Radius und diese Axe gehende Ebene mit der Ebene der Axen der a und der b macht; so hat man

$$a = r.\cos\theta; \qquad b = r.\sin\theta.\cos\varpi; \qquad c = r.\sin\theta.\sin\varpi.$$

Nennt man eben so R, θ', ϖ' die Werthe, welche r, θ und ϖ in Beziehung auf das Theilchen dM des Sphäroids erhalten; so hat man

$$x = R.\cos\theta'; \qquad y = R.\sin\theta'.\cos\varpi'; \qquad z = R.\sin\theta'.\sin\varpi'.$$

Das Theilchen dM des Sphäroids ist überdies einem rechtwinklichten Parallelepipedum gleich, dessen Dimensionen dR, $Rd\theta'$, $Rd\varpi'.\sin\theta'$ sind, und welches folglich gleich $\varrho.R^2.dR.d\theta'.d\varpi'.\sin\theta'$ ist, wenn ϱ seine Dichte ist; man erhält so

$$V = \iiint \frac{\varrho.R^2.dR.d\theta'.d\varpi'.\sin\theta'}{\sqrt{r^2 - 2rR\,[\cos\theta.\cos\theta' + \sin\theta.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)] + R^2}};$$

wo das Integral in Beziehung auf R von $R = o$ bis zum Werth von R an der Oberfläche des Sphäroids genommen werden muſs; in Beziehung auf ϖ' von $\varpi' = o$ bis ϖ' gleich dem Umkreis, und in Beziehung auf θ' von $\theta' = o$ bis θ' gleich dem halben Umkreis. Differenziirt man diesen Ausdruck von V, so findet man [16])

$$\left(\frac{d^2V}{db^2}\right) = -\int \frac{dM}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} + 3\int \frac{dM.(b-y)^2}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{5}{2}}};$$

$$\left(\frac{d^2V}{dc^2}\right) = -\int \frac{dM}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} + 3\int \frac{dM.(c-z)^2}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{5}{2}}}.$$

Die Summe dieser drey partiellen Differenziale von V ist gleich Null, weil

$$3\int \frac{dM.[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{5}{2}}} = 3\int \frac{dM}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \text{ ist.}$$

16) Man setze der Kürze wegen $\varrho R^2.dR.d\theta'.d\varpi'.\sin\theta' = N$ und $r^2 - 2rR[\cos\theta.\cos\theta' + \sin\theta.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)] + R^2 = Q$, so ist $V = \iiint .N.Q^{-\frac{1}{2}}$; ferner

$$o = \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\left(\frac{dV}{d\theta}\right) + \frac{\left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)}{\sin\theta^2} + r\cdot\left(\frac{d^2.rV}{dr^2}\right); \quad (2)$$

eine Gleichung, welche nur eine Verwandelung der Gleichung (1) ist.

Setzt man $\cos\theta = \mu$, so kann man ihr folgende Gestalt geben:

$$o = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dV}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + r.\left(\frac{d^2.rV}{dr^2}\right). \quad (3)$$

Wir sind schon auf diese verschiedenen Gleichungen im 11ten Satze des zweyten Buches gekommen.

9. Wir wollen Anfangs den angezogenen Punkt außerhalb des Sphäroids anneh-

$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right) = \int\int\int . N . Q^{-\frac{3}{2}} . [-rR.\sin\theta.\cos\theta' + rR.\cos\theta.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)];$$

$$\left(\frac{dV}{d\varpi}\right) = \int\int\int . N . Q^{-\frac{3}{2}} . rR.\sin\theta.\sin\theta'.\sin(\varpi'-\varpi);$$

$$\left(\frac{d.rV}{dr}\right) = \int\int\int . N . Q^{-\frac{1}{2}} + \int\int\int . N . Q^{-\frac{3}{2}} . [-rr + rR.(\cos\theta.\cos\theta' + \sin\theta.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)].$$

Differenziirt man diese partiellen Differenziale von neuem in Beziehung auf θ, ϖ und r, so findet man:

$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right) = \int\int\int 3N.Q^{-\frac{5}{2}} . [r^2R^2.\sin\theta^2.\cos\theta'^2 - 2r^2R^2.\sin\theta.\cos\theta.\sin\theta'.\cos\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)$$
$$+ r^2R^2.\cos\theta^2.\sin\theta'^2.\cos(\varpi'-\varpi)^2] - \int\int\int N.Q^{-\frac{3}{2}} . [rR.\cos\theta.\cos\theta'$$
$$+ rR.\sin\theta.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)];$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.\left(\frac{dV}{d\theta}\right) = \int\int\int N.Q^{-\frac{3}{2}} . [-rR.\cos\theta.\cos\theta' + rR.\frac{\cos\theta^2}{\sin\theta}.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)];$$

$$\frac{\left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)}{\sin\theta^2} = \int\int\int 3N.Q^{-\frac{5}{2}} . r^2R^2.\sin\theta'^2.\sin(\varpi'-\varpi) - \int\int\int N.Q^{-\frac{3}{2}} . rR.\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}.\cos(\varpi'-\varpi);$$

$$r.\left(\frac{d^2.rV}{dr^2}\right) = \int\int\int .N.Q^{-\frac{3}{2}} . [-3r^2 + 2rR.\cos\theta.\cos\theta' + 2rR.\sin\theta.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)]$$
$$+ \int\int\int .3N.Q^{-\frac{5}{2}} . [r^4 - 2r^3R.\cos\theta.\cos\theta' - 2r^3R.\sin\theta.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi) + r^2R^2.\cos\theta^2.\cos\theta'^2$$
$$+ r^2R^2.\sin\theta^2.\sin\theta'^2.\cos(\varpi'-\varpi)^2 + 2r^2R^2.\sin\theta.\cos\theta.\sin\theta'.\cos\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)].$$

Addirt man diese vier Gleichungen, so ist die Summe der in $Q^{-\frac{5}{2}}$ multiplicirten Glieder gleich

$$\int\int\int 3N.Q^{-\frac{5}{2}}.r^2.[r^2 - 2rR.(\cos\theta.\cos\theta' + \sin\theta.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)) + R^2] = \int\int\int 3N.Q^{-\frac{3}{2}}.r^2.$$

Die Summe der in $Q^{-\frac{3}{2}}$ multiplicirten Glieder ist gleich $-\int\int\int 3N.Q^{-\frac{3}{2}}.r^2$; folglich ist die Summe der vier partiellen Differenziale gleich Null.

annehmen. Verwandelt man V in eine Reihe, so muſs sie in diesem Fall, in Beziehung auf die Potenzen von r fallend, und folglich von folgender Gestalt seyn:

$$V = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \frac{U^{(3)}}{r^4} + \text{etc.}$$

Substituirt man diesen Werth von V in die Gleichung (3) des vorhergehenden Satzes, so wird die Vergleichung der gleichen Potenzen von r für jeden Werth von i folgende Gleichung geben.

$$o = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 U^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).U^{(i)}.$$

Es erhellet aus dem bloſsen Integralausdruck von V, daſs $U^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ, $\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi$, und $\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi$ ist, welche von der Natur des Sphäroids abhängt. Diese Funktion verwandelt sich, wenn $i = o$ ist, in eine beständige Gröſse, und sie ist, wenn $i = 1$ ist, von der Form

$$H.\mu + H'.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi + H''.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi$$

wo H, H', H'' beständige Gröſsen sind.

Man setze um im allgemeinen $U^{(i)}$ zu bestimmen, die Wurzelgröſse

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2Rr.[\cos\theta.\cos\theta' + \sin\theta.\sin\theta'.\cos(\varpi'-\varpi)] + R^2}} = T,$$

so hat man [17])

$$o = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dT}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 T}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + r.\left(\frac{d^2.rT}{dr^2}\right).$$

Diese Gleichung wird noch Statt finden, wenn man in ihr θ in θ', ϖ in ϖ' und umgekehrt ϖ', θ' in ϖ, θ verwandelt; weil T eine ähnliche Funktion von θ' und ϖ', und von θ und ϖ ist.

Verwandelt man T in eine, in Beziehung auf r, fallende Reihe, so erhält man

17) Der Integralausdruck von V enthält die Gröſsen μ, ϖ und r bloſs in der Wurzelgröſse T, man kann daher unmittelbar in der Gleichung (3) statt V die Gröſse T setzen.

$$T = \frac{Q^{(0)}}{r} + Q^{(1)} . \frac{R}{r^2} + Q^{(2)} . \frac{R^2}{r^3} + Q^{(3)} . \frac{R^3}{r^4} + \text{etc.}$$

wo $Q^{(i)}$, für jeden Werth von i, folgender Gleichung Genüge thun muſs

$$o = \left\{ \frac{d . \left[(1-\mu^2) . \left(\frac{dQ^{(i)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 Q^{(i)}}{d\varpi^2} \right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).Q^{(i)}.$$

Es ist überdies augenscheinlich sichtbar, daſs $Q^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ und $\sqrt{1-\mu^2} . \cos(\varpi' - \varpi)$ ist; und ist $Q^{(i)}$ bekannt, so hat man $U^{(i)}$ vermittelst der Gleichung

$$U^{(i)} = \int \varrho . R^{(i+2)} . dR . d\varpi' . d\theta' . \sin\theta' . Q^{(i)}.$$

Man nehme nun den angezogenen Punkt innerhalb des Sphäroids an; man muſs alsdann den Integralausdruck von V in eine in Beziehung auf r steigende Reihe entwickeln; dieses giebt für V eine Reihe von dieser Form

$$V = v^{(0)} + r . v^{(1)} + r^2 . v^{(2)} + r^3 . v^{(3)} + \text{etc.}$$

wo $v^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ, $\sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi$ und $\sqrt{1-\mu^2} . \cos\varpi$, welche der nämlichen partiellen Differenzialgleichung wie $U^{(i)}$ Genüge thut, so daſs man hat

$$o = \left\{ \frac{d . \left[(1-\mu^2) . \left(\frac{dv^{(i)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 v^{(i)}}{d\varpi^2} \right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).v^{(i)}.$$

Man muſs nun, um $v^{(i)}$ zu bestimmen, die Wurzelgröſse T, in eine in Beziehung auf r steigende Reihe verwandeln; man erhält dann

$$T = \frac{Q^{(0)}}{R} + Q^{(1)} . \frac{r}{R^2} + Q^{(2)} . \frac{r^2}{R^3} + Q^{(3)} . \frac{r^3}{R^4} + \text{etc.}$$

wo die Gröſsen $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, etc. eben dasselbe bedeuten, was sie vorher bedeuteten; man hat also

$$v^{(i)} = \int \frac{\varrho . dR . d\varpi' . d\theta' . \sin\theta' . Q^{(i)}}{R^{i-1}}.$$

Da aber der vorhergehende Ausdruck von T nur insofern convergirte, insofern R gleich oder gröſser als r ist, so gilt der vorhergehende Werth von V nur für die Lagen des Sphäroids, welche den angezogenen Punkt umgeben. Für die übrigen Lagen ist dieser Punkt ein äuſserer, und man wird also den Theil von V, der sich auf sie bezieht, durch den ersten Reihenausdruck von V bestimmen.

10. Wir wollen zuerst die Sphäroide betrachten, welche sehr wenig von der Kugel verschieden sind, und die Funktionen $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ etc., $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc., für diese Sphäroide bestimmen. Es giebt eine Differenzialgleichung für V, welche an ihrer Oberfläche Statt hat, und welche dadurch merkwürdig ist, daſs sie ein Mittel verschaft, diese Funktionen ohne irgend eine Integration zu bestimmen.

Man nehme im allgemeinen an, daſs die Schwere sich wie die Potenz n der Entfernung verhalte; es sey dM ein Theilchen des Sphäroids, und f seine Entfernung vom angezogenen Punkte; man nenne V das Integral $\int . f^{n+1} . dM$, welches Integral sich auf die ganze Masse des Sphäroids erstreckt. Im Fall der Natur, wo $n = -2$, verwandelt es sich in $\int \frac{dM}{f}$, und wir haben es auf eine ähnliche Art in den vorhergehenden Sätzen ausgedrückt. Die Funktion V hat den Vortheil durch seine Differenziationen die mit irgend einer geraden Linie parallele Anziehung des Sphäroids zu geben, denn wenn man f wie eine Funktion von drey auf einander senkrechten Koordinaten des angezogenen Punktes betrachtet, wovon eine mit der gegebenen geraden Linie parallel ist; so wird, wenn man diese Koordinate r nennt, die mit r parallele und gegen ihren Anfangspunkt gerichtete Anziehung des Sphäroids gleich $\int . f^n . \left(\frac{df}{dr}\right) . dM$ seyn; sie wird folglich gleich $\frac{1}{n+1} . \left(\frac{dV}{dr}\right)$ seyn, welches für den Fall der Natur $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$ giebt, mit dem übereinstimmend, was wir vorher gefunden haben.

Wir wollen nun annehmen, daſs das Sphäroid sehr wenig von einer Kugel verschieden sey, deren Halbmesser a und deren Mittelpunkt auf dem Halbmesser r ist, der senkrecht auf die Oberfläche des Sphäroids ist; wir nehmen den Anfangspunkt dieses Radius willkührlich, aber sehr nahe beym Schwerpunkt des Sphäroids an; wir nehmen ferner an, daſs die Kugel das Sphäroid berühre, und daſs der angezogene Punkt im Berührungspunkt der beiden Flächen sey. Das Sphäroid ist gleich der Kugel plus dem Ueberschuſs das Sphäroids über die Kugel; man kann sich nun vorstellen, daſs dieser Ueberschuſs durch eine unendliche Anzahl Theilchen gebildet wird, die auf der Oberfläche der Kugel verbreitet sind, welche Theilchen man überall negativ setzen wird, wo die Ku-

gel das Sphäroid übertrifft; man wird so den Werth von V erhalten, wenn man diesen Werth erstlich für die Kugel, zweytens für diese verschiedenen Theilchen bestimmt.

Für die Kugel ist V eine Funktion von a, welche wir durch A bezeichnen wollen: nennt man ferner dm, eines der Theilchen des Ueberschusses des Sphäroids über die Kugel und f seine Entfernung vom angezogenen Punkt; so wird der Werth von V in Beziehung auf diesen Ueberschuſs gleich $\int . f^{n+1} . dm$ seyn; man hat also für den ganzen, auf das Sphäroid sich beziehenden Werth von V;

$$V = A + \int . f^{n+1} . dm.$$

Wir wollen uns vorstellen, daſs der angezogene Punkt, sich um eine unendlich kleine Gröſse dr über die Oberfläche des Sphäroids und der Kugel, in der Verlängerung von r oder von a, erhebt; der Werth von V wird für diese neue Lage des angezogenen Punktes $V + \left(\frac{dV}{dr}\right) dr$ seyn; A wird um eine, dr proportionale, Gröſse sich vermehren, welche wir durch $A' . dr$ bezeichnen werden. Nennt man überdieſs γ den Winkel, welchen die zwey aus dem Mittelpunkt der Kugel zum angezogenen Punkt und zum Theilchen dm gezogenen Halbmesser machen, so wird die Entfernung f dieses Theilchens vom angezogenen Punkte, in der ersten Lage dieses Punktes gleich $\sqrt{2a^2 . (1 - \cos \gamma)}$, und in der zweyten Lage gleich $\sqrt{(a + dr)^2 - 2a(a + dr) . \cos \gamma + a^2}$, oder $f . \left(1 + \frac{dr}{2a}\right)$ seyn. Das Integral $\int . f^{n+1} . dm$ verwandelt sich so in

$$\left[1 + \left(\frac{n+1}{2}\right) . \frac{dr}{a}\right] . \int . f^{n+1} . dm,$$

man hat also

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) dr = A' . dr + \left(\frac{n+1}{2}\right) . \frac{dr}{a} . \int . f^{n+1} . dm.$$

Substituirt man statt $\int . f^{n+1} . dm$ seinen Werth $V - A$, so erhält man

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) = A' - \frac{(n+1) A}{2a} + \frac{(n+1)}{2a} . V \quad (1).$$

Im Fall der Natur verwandelt sich die Gleichung (1) in folgende

$$-a . \left(\frac{dV}{dr}\right) = -aA' - \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} V.$$

Der Werth von V für eine Kugel vom Halbmesser a ist nach dem 6ten Satz gleich $\frac{4\pi|a^3}{3r}$; dies giebt $A = \frac{4\pi . a^2}{3}$; $A' = -\frac{4\pi . a}{3}$; man hat also

$$-a\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{2\pi . a^2}{3} + \tfrac{1}{2}V \quad (2).$$

Man muſs hier bemerken, daſs diese Gleichung für jede Lage der geraden Linie r, und selbst in dem Fall Statt hat, wenn sie nicht senkrecht auf die Oberfläche des Sphäroids wäre, wofern sie nur sehr nahe durch seinen Schwerpunkt geht. Denn man sieht leicht, daſs die nach diesen geraden Linien zerlegte Anziehung des Sphäroids, welche, wie wir gesehen haben, gleich $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$ ist, für jede Lage dieser geraden Linie denselben Werth hat, bis auf die Gröſsen von der Ordnung der Quadrate der Eccentricitäten des Sphäroids.

11. Wir wollen nun den im 9ten Satz gegebenen allgemeinen Ausdruck von V wieder vornehmen, welcher sich auf einen angezogenen Punkt auſserhalb des Sphäroids bezieht,

$$V = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \text{etc.}$$

wo die Funktion $U^{(i)}$ so beschaffen ist, daſs sie für jeden Werth von i der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thut,

$$o = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2U^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).U^{(i)}.$$

Differenziirt man den Werth von V in Beziehung auf r, so erhält man

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{U^{(0)}}{r^2} + \frac{2\,U^{(1)}}{r^3} + \frac{3\,U^{(2)}}{r^4} + \text{etc.}$$

Wir bezeichnen den vom Anfangspunkt der r an die Oberfläche des Sphäroids gezogenen Halbmesser, mit $a.(1+\alpha y)$, wo α ein sehr kleiner beständiger Koeffizient ist, dessen Quadrate und höhere Potenzen wir vernachläſsigen werden, und wo y eine Funktion von μ und von ϖ ist, welche von der Natur des Sphäroids abhängt. Man wird bis auf die Gröſsen von der Ordnung α, $V = \frac{4\pi . a^3}{3r}$ haben, woraus folgt, daſs im vorhergehenden Ausdruck von V,

erstens die Gröſse $U^{(0)}$ gleich $\frac{4\pi \,.\, a^3}{3}$ plus einer sehr kleinen Gröſse von der Ordnung α ist, welche wir mit $U'^{(0)}$ bezeichnen wollen; zweytens, daſs die Gröſsen $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, etc. sehr klein und von der Ordnung α sind. Substituirt man $a.(1 + \alpha y)$ statt r in die vorhergehenden Ausdrücke von V und $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$, und vernachläſsigt man die Gröſsen von der Ordnung α^2; so erhält man für einen angezogenen Punkt auf der Oberfläche [18]),

$$\tfrac{1}{2} V = \tfrac{2}{3}\pi \,.\, a^2 \,.\, (1 - \alpha y) + \frac{U'^{(0)}}{2a} + \frac{U^{(1)}}{2a^2} + \frac{U^{(2)}}{2a^3} + \text{etc.}$$

$$-a \,.\left(\frac{dV}{dr}\right) = \tfrac{4}{3}\pi a^2 \,.\, (1 - 2\alpha y) + \frac{U'^{(0)}}{a} + \frac{2\,U^{(1)}}{a^2} + \frac{3\,U^{(2)}}{a^3} + \text{etc.}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (2) des vorhergehenden 10ten Satzes, so erhält man

$$4\,\alpha\pi \,.\, a^2 \,.\, y = \frac{U'^{(0)}}{a} + \frac{3\,U^{(1)}}{a^2} + \frac{5\,U^{(2)}}{a^3} + \frac{7\,U^{(3)}}{a^4} + \text{etc.}$$

18) Man hat nämlich $\frac{U^{(0)}}{r} + \frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{U'^{(0)}}{r} = \frac{4\pi a^3}{3a(1+\alpha y)} + \frac{U'^{(0)}}{r} = \tfrac{4}{3}\pi a^2 (1 - \alpha y) + \frac{U'^{(0)}}{r}$,

und folglich $V = \tfrac{4}{3}\pi a^2 (1 - \alpha y) + \frac{U'^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \ldots$ Da nun die Gröſsen $U'^{(0)}$, $U_1^{(1)}$ etc. von der Ordnung α sind, so muſs man überall statt r blos a setzen, weil die übrigen Glieder, welche r hervorbringen würde, von der Ordnung α^2 seyn würden; denn $\frac{U^{(i)}}{r^i} = \frac{U^{(i)}}{a^i (1+\alpha y)^i}$ $= \frac{U^i}{a^i}(1 - \alpha y \ldots) = \frac{U^{(i)}}{a^i} + \frac{U^{(i)}}{a^i}\alpha y$, wo man das Product $U^{(i)}$, α vernachläſsigen muſs. Man erhält so $V = \tfrac{4}{3}\pi a^2 (1 - \alpha y) + \frac{U'^{(0)}}{a} + \frac{U^{(1)}}{a^2} + \frac{U^{(2)}}{a^3} + \ldots$

Aus denselben Gründen ist

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{U^0}{a^2(1+\alpha y)^2} + \frac{2\,U^{(1)}}{a^3} + \frac{3\,U^{(2)}}{a^4} + \ldots$$

wo $\frac{U^{(0)}}{a^2(1+\alpha y)^2} = \frac{\tfrac{4}{3}\pi a^3}{a^2(1+\alpha y)^2} + \frac{U'^{(0)}}{a^2(1+\alpha y)^2} = \tfrac{4}{3}\pi a(1 - 2\alpha y) + \frac{U'^{(0)}}{a^2}$ ist.

Es folgt hieraus, daſs die Funktion y von folgender Form ist,

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \text{etc.}$$

wo die Gröſsen $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, etc. eben so wie $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, etc. der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thun müssen.

$$o = \left\{ \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 Y^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1)\,Y^{(i)}.$$

Dieser Ausdruck von y ist also nicht willkührlich, sondern aus der Entwickelung der Anziehungen der Sphäroide in Reihen hergeleitet. Man wird im folgenden Satz sehen, daſs y nur auf eine einzige Art so entwickelt werden kann; man hat folglich im allgemeinen, wenn man die ähnlichen Funktionen vergleicht:

$$U^{(i)} = \frac{4\,\alpha\pi}{2i+1}\,.\,a^{i+3}\,.\,Y^{(i)},$$

woraus man für jeden Werth von r folgende Gleichung erhält

$$V = \frac{4\pi.a^3}{3r} + \frac{4\,\alpha\pi.a^3}{r}.\left[Y^{(0)} + \frac{a}{3r}.Y^{(1)} + \frac{a^2}{5r^2}.Y^{(2)} + \frac{a^3}{7r^3}.Y^{(3)} + \text{etc.}\right]; \quad (3).$$

Man braucht also nur, um V zu haben, der Gröſse y die Gestalt zu geben, welche wir so eben angenommen haben; wird werden zu diesem Zweck in der Folge eine sehr einfache Methode geben.

Hätte man $y = Y^{(i)}$, so würde der Theil von V, welcher sich auf den Ueberschuſs des Sphäroids über eine Kugel vom Halbmesser a, oder welches dasselbe ist, der sich auf eine Kugelschale vom Halbmesser a, und von der Dicke $\alpha a y$, bezieht, gleich $\frac{4\,\alpha\pi.a^{i+3}.\,Y^{(i)}}{(2i+1).r^{i+1}}$ seyn; dieser Werth würde folglich y proportional seyn; und es ist sichtbar, daſs diese Proportionalität nur in diesem Fall Statt haben kann.

12. Man kann den Ausdruck $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \text{etc.}$, von y einfacher machen und die beiden ersten Glieder desselben wegschaffen, wenn man für a den Halbmesser einer Kugel nimmt, welche an körperlichem Inhalt dem Sphäroid gleich ist, und wenn man den willkührlichen Anfangspunkt von r im Schwerpunkt des Sphäroids setzt. Wir bemerken, um dies zu zeigen, daſs die Masse M des Sphäroids, wenn man es gleichartig annimmt und seine Dichte durch die Einheit bezeichnet, nach dem 8ten Satz gleich $\int R^2\,.\,dR\,.\,d\mu\,.\,d\varpi$, oder gleich $\frac{1}{3}\int R'^3\,.\,d\mu\,.\,d\varpi$ ist, wenn R' den bis an die Oberfläche des Sphä-

roids verlängerten Halbmesser R bezeichnet. Substituirt man statt R' seinen Werth $a.(1+\alpha y)$, so erhält man

$$M = \frac{4\pi . a^3}{3} + \alpha a^3 . \int y\, d\mu . d\varpi.$$

Man braucht also nur statt y, seinen Werth $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} +$ etc. zu substituiren und hernach zu integriren. Wir geben hierzu folgenden allgemeinen und in dieser Analysis sehr nützlichen Lehrsatz.

„Wenn $Y^{(i)}$ und $Z^{(i')}$ rationale und ganze Funktionen von μ, $\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi$ „und $\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi$ sind, welche den folgenden Gleichungen Genüge thun,

$$„o = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2Y^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).Y^{(i)};$$

$$„o = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dZ^{(i')}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2Z^{(i')}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i'.(i'+1).Z^{(i')};$$

„so hat man im allgemeinen

$$„\int Y^{(i)} . Z^{(i')} . d\mu . d\varpi = o,$$

„wenn i und i' ganze positive von einander verschiedene Zahlen sind, und „wo die Integrale von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$ und von $\varpi = o$, bis $\varpi = 2\pi$ „genommen werden müssen, wenn π der halbe Umkreis für den Halbmesser Eins ist."

Wir bemerken, um diesen Lehrsatz zu beweisen, daſs man vermöge der erstern der zwey vorhergehenden partiellen Differenzialgleichungen, folgende Gleichung hat:

$$\int Y^{(i)}.Z^{(i')}.d\mu.d\varpi = -\frac{1}{i(i+1)}.\int Z^{(i')}.\left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\}.d\mu.d\varpi$$

$$-\frac{1}{i(i+1)}.\int\frac{Z^{(i')}\left(\frac{d^2Y^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2}.d\mu.d\varpi.$$

Man

Man hat aber, wenn man theilweise in Beziehung auf μ integrirt [19]),

$$\int Z^{(i')} \cdot \left\{ \frac{d \cdot \left[(1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} \cdot d\mu = (1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu} \right) \cdot Z^{(i')}$$

$$- (1-\mu^2) \cdot Y^{(i)} \cdot \left(\frac{dZ^{(i')}}{d\mu} \right)$$

$$+ \int Y^{(i)} \cdot \left\{ \frac{d \cdot \left[(1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dZ^{(i')}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} \cdot d\mu;$$

und es ist klar, daſs, wenn man das Integral von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$ nimmt, vom 2ten Theil dieser Gleichung nur das letzte Glied übrig bleibt. Man erhält auf eben diese Art, wenn man theilweise in Beziehung auf ϖ integrirt,

$$\int Z^{(i')} \cdot \left(\frac{d^2 Y^{(i)}}{d\varpi^2} \right) \cdot d\varpi = \text{Best.Gr.} + Z^{(i')} \cdot \left(\frac{dY^{(i)}}{d\varpi} \right) - Y^{(i)} \cdot \left(\frac{dZ^{(i')}}{d\varpi} \right) + \int Y^{(i)} \cdot \left(\frac{d^2 Z^{(i')}}{d\varpi^2} \right) \cdot d\varpi;$$

und auch von diesem zweyten Theil bleibt nur das letzte Glied übrig, wenn das Integral von $\varpi = o$ bis $\varpi = 2\pi$ genommen wird, weil die Werthe von $Y^{(i)}$, $\left(\frac{dY^{(i)}}{d\varpi} \right)$, $Z^{(i')}$, und $\left(\frac{dZ^{(i')}}{d\varpi} \right)$ in diesen beiden Grenzen dieselben sind [20]); man findet so:

19) Es ist nämlich

$$\int Z^{(i')} \cdot \left\{ \frac{d \cdot \left[(1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} d\mu = (1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu} \right) \cdot Z^{(i')} - \int (1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu} \right) \cdot \left(\frac{dZ^{i'}}{d\mu} \right) \cdot d\mu,$$

integrirt man von neuem theilweise, so findet man

$$-\int (1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu} \right) \cdot \left(\frac{dZ^{(i')}}{d\mu} \right) d\mu = -Y^{(i)} \cdot (1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dZ^{(i')}}{d\mu} \right) + \int Y^{(i)} \cdot \left\{ \frac{d \cdot \left[(1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dZ^{(i')}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} \cdot d\mu.$$

20) Die Gröſse $U^{(i)}$ und also auch $Y^{(i)}$, $Z^{(i')}$ und ihre Differenziale enthalten bloſs $\sin \varpi$ und $\cos \varpi$; diese beiden trigonometrischen Linien sind aber in den beiden Fällen, $\varpi = o$ und $\varpi =$ dem ganzen Umkreis, gleich groſs.

$$\int Y^{(i)} \,.\, Z^{(i')} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$$

$$= -\frac{1}{i(i+1)} \,.\, \int Y^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \left\{ \left[\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{d Z^{(i')}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right] + \frac{\left(\frac{d^2 Z^{(i')}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} \right\}.$$

Hieraus erhält man vermittelst der zweyten der vorhergehenden partiellen Differenzialgleichung

$$\int Y^{(i)} \,.\, Z^{(i')} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi = \frac{i' \,.\, (i'+1)}{i \,.\, (i+1)} \,.\, \int Y^{(i)} \,.\, Z^{(i')} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi,$$

man hat also

$$o = \int Y^{(i)} \,.\, Z^{(i')} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi,$$

wenn i von i' verschieden ist.

Man kann hieraus leicht schliefsen, dafs y nur auf eine einzige Art in eine Reihe von der Form $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} +$ etc. entwickelt werden kann; denn man hat im allgemeinen

$$\int y \,.\, Z^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi = \int Y^{(i)} \,.\, Z^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi.$$

Könnte man y in eine andere Reihe $Y_{,}^{(0)} + Y_{,}^{(1)} + Y_{,}^{(2)} =$ etc. von derselben Form entwickeln, so würde man

$$\int y \,.\, Z^{(i)} = \int Y_{,}^{(i)} \,.\, Z^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$$

und folglich

$$\int Y_{,}^{(i)} \,.\, Z^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi = \int Y^{(i)} \,.\, Z^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$$

haben. Man sieht aber leicht, dafs, wenn man für $Z^{(i)}$ die allgemeinste Funktion ihrer Gattung nimmt, die vorhergehende Gleichung nur in dem Fall bestehen kann, wenn $Y_{,}^{(i)} = Y^{(i)}$ ist; die Funktion y kann folglich so nur auf eine einzige Art entwickelt werden.

Substituirt man im Integral $\int y \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$ statt y seinen Werth $Y^{(0)} + Y^{(1)}$ $Y^{(2)} +$ etc.; so hat man im Allgemeinen $o = \int Y^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$, wenn i gleich oder gröfser als die Einheit ist; denn die Einheit, in welche $d\mu \,.\, d\varpi$ multiplicirt ist, ist in der Form $Z^{(0)}$ enthalten, welche auf jede beständige, oder jede von μ und von ϖ unabhängige Gröfse pafst. Das Integral $\int y \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$ verwandelt sich dadurch in $\int Y^{(0)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$ und folglich in $4\pi \,.\, Y^{(0)}$. Man hat also

$$M = \tfrac{4}{3}\pi \,.\, a^3 + 4\alpha\pi \,.\, a^3 Y^{(0)};$$

nimmt man daher für a den Halbmesser der Kugel, welche an körperlichen

Inhalt dem Sphäroid gleich ist; so hat man $Y^{(0)} = 0$, und das Glied $Y^{(0)}$ verschwindet aus dem Ausdruck von y.

Der Abstand des Theilchens dM oder $R^2 . dR . d\mu . d\varpi$ von der Ebene des Mittagskreises, von welchem man den Winkel ϖ zählt, ist gleich $R . \sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi$. Setzt man nun die Masse des Sphäroids gleich Eins, so wird die Entfernung des Schwerpunkts des Sphäroids von dieser Ebene gleich $\int R^3 . dR . d\mu . d\varpi . \sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi$ seyn, und wenn man in Beziehung auf R integrirt, so wird sie gleich $\frac{1}{4}\int R'^4 . d\mu . d\varpi . \sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi$ seyn, wenn R' der bis an die Oberfläche des Sphäroids verlängerte Radius R ist. Eben so wird der Abstand des Theilchens dM von der Ebene des Mittagskreises, welche auf der vorhergehenden senkrecht ist, gleich $R . \sqrt{1-\mu^2} . \cos\varpi$, und die Entfernung des Schwerpunkts des Sphäroids von derselben Ebene wird $\frac{1}{4}\int R'^4 . d\mu . d\varpi . \sqrt{1-\mu^2} . \cos\varpi$ seyn. Da endlich der Abstand des Theilchens dM von der Ebene des Aequators gleich μ ist, so wird der Abstand des Schwerpunkts des Sphäroids von dieser Ebene gleich $\frac{1}{4}\int R'^4 . \mu . d\mu . d\varpi$ seyn. Die Funktionen μ, $\sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi$, und $\sqrt{1-\mu^2} . \cos\varpi$ sind von der Form $Z^{(1)}$, da $Z^{(1)}$ der partiellen Differenzialgleichung

$$0 = \left\{ \frac{d . \left[(1-\mu^2) . \left(\frac{dZ^{(1)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 Z^{(1)}}{d\varpi^2} \right)}{1-\mu^2} + 2 Z^{(1)}$$

Genüge thun muſs. Gedenkt man sich nun R'^4 in die Reihe $N^{(0)} + N^{(1)} + N^{(2)} +$ etc. entwickelt, wo $N^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ, $\sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi$, und $\sqrt{1-\mu^2} . \cos\varpi$ ist, welche der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thun muſs,

$$0 = \left\{ \frac{d . \left[(1-\mu^2) . \left(\frac{dN^{(i)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 N^{(i)}}{d\varpi^2} \right)}{1-\mu^2} + i . (i+1) . N^{(i)}$$

so sind die Entfernungen des Schwerpunkts des Sphäroids von den drey vorhergehen Ebenen vermöge des allgemeinen Lehrsatzes, den wir so eben bewiesen haben,

$$\tfrac{1}{4}\int N^{(1)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \sin\varpi;$$
$$\tfrac{1}{4}\int N^{(1)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \cos\varpi;$$
$$\tfrac{1}{4}\int N^{(1)} \,.\, \mu \,.\, d\mu \,.\, d\varpi.$$

Hier ist $N^{(1)}$ nach dem 9ten Satz von der Form $A \,.\, \mu + B \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \sin\varpi + C \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \cos\varpi$, wo A, B, C beständige Gröſsen sind; die vorhergehenden Abstände verwandeln sich so in $\frac{\pi}{3} \,.\, B$, $\frac{\pi}{3} \,.\, C$, $\frac{\pi}{3} \,.\, A$. Die Lage des Schwerpunkts des Sphäroids hängt also nur von der Funktion $N^{(1)}$ ab; dies verschaft ein sehr einfaches Mittel sie zu bestimmen. Ist der Anfangspunkt des Radius R' in diesem Punkt, so werden die Entfernungen des Schwerpunkts von diesen Ebenen gleich Null seyn, weil dieser Anfangspunkt in den drey vorhergehenden Ebenen ist; dies giebt $A = o$, $B = o$, $C = o$ und folglich $N^{(1)} = o$.

Diese Resultate gelten für jedes Sphäroid; ist es sehr wenig von einer Kugel verschieden, so hat man $R' = a \,.\, (1 + \alpha y)$ und $R'^4 = a^4 \,.\, (1 + 4\,\alpha y)$ und folglich da y gleich $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} +$ etc. ist, $N^{(1)} = 4\,\alpha a^4\, Y^{(1)}$; die Funktion $Y^{(1)}$ verschwindet also aus dem Ausdruck von y, wenn man den Anfangspunkt der R' im Schwerpunkt des Sphäroids setzt.

13. Wir wollen uns nun den angezogenen Punkt im Innern des Sphäroids gedenken; wir haben nach dem 9ten Satz:

$$V = v^{(0)} + r \,.\, v^{(1)} + r^2 \,.\, v^{(2)} + r^3 \,.\, v^{(3)} + \text{etc.}$$
$$v^{(i)} = \int \frac{dR \,.\, d\varpi' \,.\, d\theta' \,.\, \sin\theta' \,.\, Q^{(i)}}{R^{(i-1)}}.$$

Man nehme an, daſs dieser Werth von V sich auf eine Lage bezieht, deren innere Oberfläche sphärisch und vom Halbmesser a sey, und deren äuſsere Oberfläche den Halbmesser $a \,.\, (1 + \alpha y)$ habe; die Dicke dieser Lage wird $\alpha a y$ seyn. Bezeichnet man den Werth, welchen y erhält, wenn man in ihm θ und ϖ in θ' und ϖ' verwandelt, mit y'; so kann man, wenn man die Gröſsen von der Ordnung α^2 vernachläſsigt, R in a, und dR in $\alpha a y'$, im Integralausdruck von $v^{(i)}$, verwandeln, man erhält so

$$v^{(i)} = \frac{\alpha}{a^{i-2}} \,.\, \int y' \,.\, d\varpi' \,.\, d\theta' \,.\, \sin\theta' \,.\, Q^{(i)}.$$

Für einen Punkt auſserhalb des Sphäroids hat man nach dem 9ten Satz

$$V = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \text{etc.};$$

$$U^{(i)} = \int R^{i+2} \, . \, dR \, . \, d\varpi' \, . \, d\theta' \, . \sin\theta' \, . \, Q^{(i)}.$$

Nimmt man an, dafs dieser Werth von V einer Lage angehört, deren innerer Halbmesser a, und deren äufserer Halbmesser $a\,(1 + \alpha y)$ ist, so erhält man

$$U^{(i)} = \alpha \, . \, a^{(i+3)} \, . \int y' \, . \, d\varpi' \, . \, d\theta' \, . \sin\theta' . \, Q^{(i)};$$

folglich

$$v^{(i)} = \frac{U^{(i)}}{a^{2i+1}};$$

man hat nach dem 11ten Satz

$$U^{(i)} = \frac{4\,\alpha\pi \, . \, a^{i+3} \, . \, Y^{(i)}}{2\,i + 1}$$

und also

$$v^{(i)} = \frac{4\,\alpha\pi \, . \, Y^{(i)}}{(2\,i + 1) \, . \, a^{i-2}};$$

dies giebt

$$V = 4\,\alpha\pi \, . \, a^2 \, . \left[Y^{(0)} + \frac{r}{3a} \, . \, Y^{(1)} + \frac{r^2}{5\,a^2} \, . \, Y^{(2)} + \text{etc.} \right].$$

Man mufs zu diesem Werth von V denjenigen hinzusetzen, welcher sich auf die Kugelschale von der Dicke $a - r$ bezieht, welche den angezogenen Punkt umgiebt, so wie auch den Werth, welcher der Kugel vom Halbmesser r zugehört, die unterhalb dieses Punktes ist. Setzt man $\cos\theta' = \mu'$, so erhält man in Beziehung auf den erstern dieser zwey Theile von V

$$v^{(i)} = \int \frac{dR \, . \, d\varpi' \, . \, d\mu' \, . \, Q^{(i)}}{R^{i-1}},$$

wo das Integral in Beziehung auf μ von μ gleich -1 bis $\mu = 1$ genommen werden mufs. Integrirt man in Beziehung auf R von $R = r$ bis $R = a$, so erhält man

$$v^{(i)} = \frac{1}{2 - i} \, . \left(\frac{1}{a^{i-2}} - \frac{1}{r^{i-2}} \right) . \int d\varpi' \, . \, d\mu' \, . \, Q^{(i)}.$$

Man hat aber im allgemeinen nach dem Lehrsatz des vorhergehenden Satzes $\int d\varpi' \, . \, d\mu' \, . \, Q^{(i)} = o$, wenn i gleich oder gröfser als die Einheit ist; für $i = o$ hat man nach dem 9ten Satz $Q^{(i)} = 1$. Man mufs ferner das Integral in Beziehung auf ϖ' von $\varpi' = o$ bis $\varpi' = 2\pi$ nehmen; man hat also

$$v^{(0)} = 2\pi . (a^2 - r^2).$$

Dieser Werth von $v^{(0)}$ ist der Theil von V, welcher auf die Kugelschaale von der Dicke $r - a$ sich bezieht.

Der Theil von V welcher der Kugel vom Halbmesser r zugehört, ist der Masse dieser Kugel, durch die Entfernung des angezogenen Punktes von ihrem Mittelpunkt dividirt, gleich; er ist folglich gleich $\frac{4\pi . r^2}{3}$. Vereinigt man diese verschiedenen Theile von V, so erhält man für seinen ganzen Werth

$$V = 2\pi . a^2 - \tfrac{2}{3}\pi . r^2 + 4\alpha\pi . a^2 \left[Y^{(0)} + \frac{r}{3a} . Y^{(1)} + \frac{r^2}{5a^2} . Y^{(2)} + \frac{r^3}{7a^3} . Y^{(3)} + \text{etc.} \right]; \ (4).$$

Man nehme nun den angezogenen Punkt innerhalb einer Lage an, welche sehr nahe sphärisch und deren innerer Halbmesser gleich

$$a + \alpha a . [Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \text{etc.}],$$

und deren äuſserer Halbmesser gleich

$$a' + \alpha a' . [Y'^{(0)} + Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + \text{etc.}]$$

ist. Man kann die Gröſsen $\alpha a Y^{(0)}$ und $\alpha a' Y'^{(0)}$ in den Gröſsen a und a' begreifen. Setzt man überdies den Anfangspunkt der Koordinaten im Schwerpunkt des Sphäroids, dessen Halbmesser $a + \alpha a . [Y^{(0)} + Y^{(1)} + \text{etc.}]$ wäre, so wird man $Y^{(1)}$ aus dem Ausdruck dieses Halbmessers wegschaffen; und alsdann wird der innere Halbmesser der Lage folgende Form haben

$$a + \alpha a . [Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \text{etc.}],$$

und der äuſsere, folgende:

$$a' + \alpha a' . [Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + Y'^{(3)} + \text{etc.}].$$

Man wird den Werth von V für diese Lage finden, wenn man die Differenz der Werthe sucht die V für zwey Sphäroids erhält, wovon das kleinste die erste Gröſse zum Halbmesser seiner Oberfläche hat, und wovon das gröſste die zweyte Gröſse zum Halbmesser seiner Oberfläche hat; nennt man also $\Delta . V$ den Werth, welchen V für diese Lage erhält, so findet man

$$\Delta . V = 2\pi . (a'^2 - a^2) + 4\alpha\pi . \left[\frac{ra'}{3} . Y'^{(1)} + \frac{r^2}{5} . [Y'^{(2)} - Y^{(2)}] + \frac{r^3}{7} . \left(\frac{Y'^{(3)}}{a'} - \frac{Y^{(3)}}{a} \right) + \text{etc.} \right].$$

Will man, daſs der im innern der Lage sich befindende Punkt von allen Seiten gleich stark angezogen werde, so muſs sich $\Delta . V$ auf eine beständige von r, θ und ϖ unabhängige Gröſse bringen lassen; denn man hat gesehen, daſs die in Beziehung auf diese veränderlichen Gröſsen genommenen partiellen Diffe-

renziale von $\Delta . V$, die partiellen Anziehungen der Lage auf den angezogenen Punkt ausdrücken; man hat also dann $Y'^{(1)} = o$ und allgemein

$$Y'^{(i)} = \left(\frac{a'}{a}\right)^{i-2} . Y^{(i)};$$

so dafs man den Halbmesser der äufsern Fläche hat, wenn der Halbmesser der innern Fläche gegeben ist.

Ist die innere Fläche elliptisch, so hat man $Y^{(3)} = o$, $Y^{(4)} = o$, etc.; und folglich $Y'^{(3)} = o$, $Y'^{(4)} = o$; die Halbmesser der beiden Flächen, der innern und der äufsern sind also dann

$$a . (1 + \alpha Y^{(2)}); \qquad a' . (1 + \alpha Y^{(2)});$$

man sieht so, dafs diese zwey Flächen einander ähnlich sind und gleiche Lage haben, welches den, was wir im 3ten Satz gefunden haben, gemäfs ist.

14. Die Formeln (3) und (4) des 11. und 13. Satzes, enthalten die ganze Theorie der Anziehungen gleichartiger sehr wenig von der Kugel verschiedener Sphäroide; man kann daraus sehr leicht die Anziehung ungleichartiger Sphäroide herleiten, was auch immer das Gesetz sey, nach welchem die Gestalt und Dichte ihrer Lagen sich ändert. Es sey hierzu $a . (1 + \alpha y)$ der Halbmesser einer der Lagen eines ungleichartigen Sphäroids, und man nehme an, dafs y folgende Form habe, $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} +$ etc. wo die Koefficienten, welche in den Gröfsen $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ etc. sich befinden, Funktionen von a sind, und folglich von einer Lage zur andern sich ändern. Differenziirt man den durch die Formel (3) des 11ten Satzes gegebenen Werth von V in Beziehung auf a, und nennt man ϱ die Dichte der Lage deren Halbmesser $a(1 + \alpha y)$ ist, wo ϱ blofs Funktion von a ist; so wird der dieser Lage zugehörende Werth von V für einen äufsern angezogenen Punkt folgender seyn:

$$\frac{4\pi}{3r} . \varrho . d . a^3 + \frac{4\alpha\pi . \varrho}{r} . d . \left[a^3 . Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r} . Y^{(1)} + \frac{a^5}{5r^2} . Y^{(2)} + \text{etc.} \right].$$

Dieser Werth ist also für das ganze Sphäroid

$$V = \frac{4\pi}{3r} . \int \varrho . d . a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r} . \int \varrho . d . \left[a^3 Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r} . Y^{(1)} + \frac{a^5}{5r^2} . Y^{(2)} + \frac{a^6}{7r^3} . Y^{(3)} + \text{etc.} \right]; \quad (5)$$

wo die Integrale von $a = o$ bis zum Werth von a an der Oberfläche des Sphäroids, welchen wir mit a bezeichnen wollen, genommen werden müssen.

Um den Werth von V für einen angezogenen Punkt innerhalb des Sphäroids zu erhalten, mufs man zuerst den Theil dieses Werthes bestimmen, der

für alle Lagen gehört, für welche dieser Punkt ein äußerer ist. Dieser erste Theil wird durch die Formel (5) gegeben, wenn man das Integral von $a = o$, bis $a = a$ nimmt, wo a auf die Lage sich bezieht, auf welcher sich der angezogene Punkt befindet. Man wird den zweyten Theil von V für alle Lagen, innerhalb welcher der gegebene Punkt sich befindet, erhalten, wenn man die Formel (4) des vorhergehenden Satzes in Beziehung auf a differenziirt, dann mit ϱ multiplicirt, und wenn man endlich dieses Differenzial von $a = a$ bis $a = \mathfrak{a}$ integrirt. Die Summe dieser beiden Theile von V wird sein ganzer Werth für einen innern Punkt seyn, und man erhält für diese Summe

$$V = \frac{4\pi}{3r}\int\varrho.d.a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r}.\int\varrho.d.\left[a^3.Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r}.Y^{(1)} + \frac{a^5}{5r^2}.Y^{(2)} + \frac{a^6}{7r^3}.Y^{(3)} + \text{etc.}\right]$$
$$+ 2\pi.\int\varrho.d.a^2 + 4\alpha\pi\int\varrho.d.\left[a^2Y^{(0)} + \frac{ar}{3}.Y^{(1)} + \frac{r^2}{5}.Y^{(2)} + \frac{r^3}{7a}.Y^{(3)} + \text{etc.}\right]; \quad (6).$$

die zwey ersten Integrale müssen von $a = o$ bis $a = a$ und die beiden letztern von $a = a$ bis $a = \mathfrak{a}$ genommen werden; man muſs überdies nach den Integrationen a statt r in den mit α multiplicirten Gliedern, und $\frac{1 - \alpha y}{a}$ statt $\frac{1}{r}$ in das Glied $\frac{4\pi}{3r}.\int\varrho.d.a^3$ setzen.

15. Wir wollen nun beliebige Sphäroide betrachten. Die Untersuchung ihrer Anziehung beruht nach dem 9ten Satz darauf, die Gröſsen $U^{(i)}$ und $v^{(i)}$ zu bilden. Man hat nach demselben Satz

$$U^{(i)} = \int\varrho.R^{(i+2)}.dR.d\mu'.d\varpi'.Q^{(i)},$$

wo die Integrale von $R = o$ bis zum Werth dieser Gröſse an der Oberfläche, von $\mu' = -1$ bis $\mu' = 1$, und von $\varpi' = o$ bis $\varpi' = 2\pi$ genommen werden müssen. Man muſs, um dies Integral zu bestimmen, $Q^{(i)}$ kennen. Man kann diese Gröſse in eine endliche Funktion von Kosinus des Winkels $\varpi - \varpi'$ und seiner Vielfachen entwickeln. Es sey $\beta.\cos n.(\varpi - \varpi')$, das Glied von $Q^{(i)}$ welches vom $\cos n.(\varpi - \varpi')$ abhängt, wo β eine Funktion von μ und von μ' ist. Substituirt man statt $Q^{(i)}$ seinen Werth in die partielle Differenzialgleichung für $Q^{(i)}$ des 9ten Satzes, so erhält man, wenn man die in $\cos n.(\varpi - \varpi')$ multiplicirten Glieder mit einander vergleicht, folgende Gleichung zwischen den gewöhnlichen Differenzialen

$o =$

$$o = \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{d\beta}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} - \frac{n^2\beta}{1-\mu^2} + i.(i+1).\beta,$$

wo $Q^{(i)}$ der Koeffizient von $\frac{R^{(i)}}{r^{i+1}}$ in der Entwickelung der Wurzelgröſse

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2Rr.[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu'^2}.\sqrt{1-\mu^2}.\cos(\varpi - \varpi')] + R^2}}$$

ist. Das Glied dieses Ausdrucks, welches von $\cos n.(\varpi - \varpi')$ abhängt, kann nur aus den folgenden Potenzen von $\cos(\varpi - \varpi')$ entstehen, n, $n+2$, $n+4$ etc.; da nun $\cos(\varpi - \varpi')$ den Factor $\sqrt{1-\mu^2}$ hat, so muſs β den Factor $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$ enthalten. Man kann leicht durch die Betrachtung der Entwickelung der Wurzelgröſse sehen, daſs β folgende Form hat [21]):

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.[A\mu^{i-n} + A^{(1)}.\mu^{i-n-2} + A^{(2)}.\mu^{i-n-4} + \text{etc.}].$$

Substituirt man diesen Werth in die Differenzialgleichung für β, so wird die

21) Das Glied $\beta.\cos n(\varpi - \varpi')$ kann nur aus den Potenzen n, $n+2$, $n+4$... des Koeffizienten von $2Rr$ in der gegebenen Wurzelgröſse entstehen. Man bezeichne der Kürze wegen $\sqrt{1-\mu'^2}.\sqrt{1-\mu^2}.\cos(\varpi - \varpi')$ durch f, so ist der Koeffizient von $2Rr$ gleich $f + \mu\mu'$ und $(f+\mu\mu')^{n+2r} = f^{n+2r} + \mathfrak{A}.f^{n+2r-1}\mu\mu' + \mathfrak{B}f^{n+2r-2}\mu^2\mu'^2 + \ldots + \mathfrak{R}f^n\mu^{2r}\mu'^{2r}\ldots$, wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$... $\mathfrak{R}$ die Binomialkoeffizienten sind, und wo die übrigen Potenzen von f nämlich f^{n-1}, f^{n-2} etc. kein in $\cos n(\varpi - \varpi')$ multiplicirtes Glied hervorbringen können. Da aber bekanntlich $2^{n+2r-1}\cos\nu^{n+2r} = \cos(n+2r)\nu + \mathfrak{A}.\cos(n+2r-2)\nu + \mathfrak{B}.\cos(n+2r-4)\nu + \text{etc.}$ ist, so können die Potenzen f^{n+2r-1}, f^{n+2r-3}, f^{n+2r-5} kein in den $\cos n.(\varpi - \varpi')$ multiplicirtes Glied hervorbringen, und man hat also, wenn man bloſs dies Glied betrachtet

$$(f+\mu\mu')^{n+2r} = f^{n+2r} + \mathfrak{B}f^{n+2r-2}\mu^2\mu'^2 + \mathfrak{D}f^{n+2r-4}\mu^4\mu'^4 - \ldots + \mathfrak{R}f^n\mu^{2r}\mu'^{2r}.$$

Die höchste Potenz von μ, welche dieser Ausdruck enthält, ist μ^{2r} oder $\mu^{(n+2r)-n}$, und der Exponent dieser Potenz nimmt in den folgenden Gliedern immer um zwey Einheiten ab. Dieser Ausdruck hat ferner den gemeinschaftlichen Factor f^n; er muſs also auch den gemeinschaftlichen Factor $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$ haben.

Vergleichung der ähnlichen Potenzen von μ folgende Gleichung geben [22]):

$$A^{(s)} = -\frac{(i-n-2s+2)\,.\,(i-n-2s+1)}{2s\,(2i-2s+1)}\,.\,A^{(s-1)}.$$

22) Man betrachte bloſs das allgemeine Glied von β, nämlich $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s}$; dann ist

$$\left(\frac{d\beta}{d\mu}\right) = -n.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}-1}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s+1} + (i-n-2s).(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s-1}, \text{ und}$$

$$(1-\mu^2).\left(\frac{d\beta}{d\mu}\right) = -n.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s+1} + (i-n-2s).(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}+1}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s-1},$$

oder

$$(1-\mu^2).\left(\frac{d\beta}{d\mu}\right) = (i-n-2s)\,(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s-1} - (i-2s)\,(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s+1}.$$

Differenziirt man diesen Ausdruck von neuem, so erhält man

$$\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{d\beta}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} = -(i-n-2s)\,n.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}-1}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s}$$

$$+(i-n-2s)\,(i-n-2s-1).(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s-2} + (i-2s).n.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}-1}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s+2}$$

$$-(i-2s)\,(i-n-2s+1)\,(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s}.$$

Man hat ferner

$$-\frac{n^2\,\beta}{1-\mu^2} = -n^2.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}-1}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s}$$

$$+i.(i+1).\beta = +i.(i+1)\,(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s}.$$

Addirt man diese drey Werthe, so findet man

$$-(i-2s)\,n.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}-1}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s} + (i-n-2s)\,(i-n-2s-1)\,(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s-2}$$

$$+(i-2s)\,n.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}-1}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s+2} + [i(n+2s)+2s(i-n-2s+1)](1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s}.$$

Das erste und dritte Glied dieser Summe sind zusammen gleich

$$-(i-2s)\,n.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}-1}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s}.(1-\mu^2) = -(i-2s).n.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s}$$

alle vier Glieder haben also den gemeinschaftlichen Factor $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s-2}$ und verwandeln sich dadurch in

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s)}.\mu^{i-n-2s-2}\,[\mu^2.2s.(2i-2s+1) + (i-n-2s)\,(i-n-2s-1)].$$

Hieraus erhält man, wenn man nach und nach $s = 1$, $s = 2$, etc. setzt, die Werthe von $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ etc. und folglich

$$\beta = A.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.\left\{\begin{array}{l}\mu^{i-n} - \frac{(i-n).(i-n-1)}{2.(2i-1)}.\mu^{i-n-2} + \frac{(i-n)(i-n-1).(i-n-2)(i-n-3)}{2.4.(2i-1)(2i-3)}.\mu^{i-n-4} \\ - \frac{(i-n).(i-n-1)(i-n-2)(i-n-3)(i-n-4)(i-n-5)}{2.4.6.(2i-1)(2i-3)(2i-5)}.\mu^{i-n-6} + \text{etc.}\end{array}\right\},$$

wo A eine Funktion von μ' und unabhängig von μ ist. Da aber μ und μ' sich auf dieselbe Art in der vorhergehenden Wurzelgröſse befinden, so müssen sie auch auf dieselbe Art im Ausdruck von β sich befinden, man hat also

$$A = \gamma.(1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}.\left[\mu'^{i-n} - \frac{(i-n)(i-n-1)}{2.(2i-1)}.\mu'^{i-n-2} + \text{etc.}\right],$$

wo γ ein von μ und μ' unabhängiger Koeffizient ist; folglich

$$\beta = \gamma.(1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}.\left[\mu'^{i-n} - \frac{(i-n)(i-n-1)}{2.(2i-1)}.\mu'^{i-n-2} + \text{etc.}\right].(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.\left[\mu^{i-n} - \frac{(i-n)(i-n-1)}{2.(2i-1)}.\mu^{i-n-2} + \text{etc.}\right].$$

Man sieht so, daſs β sich in drey Factoren zertheilt, der erste unabhängig von μ und von μ'; der zweyte bloſs Funktion von μ', und der dritte eine ähnliche Funktion von μ. Jetzt ist nur noch γ zu bestimmen übrig.

Hierzu bemerken wir, daſs man, wenn man $\mu = 0$ und $\mu' = 0$ setzt, und wenn $i - n$ eine gerade Zahl ist,

$$\beta = \frac{\gamma.[1.2.3\ldots(i-n)]^2}{[2.4\ldots(i-n)(2i-1)(2i-3)\ldots(i+n+1)]^2} = \frac{\gamma.[1.3.5\ldots(i-n-1).1.3.5\ldots(i+n-1)]^2}{(1.3.5\ldots2i-1)^2}$$

hat. Ist $(i-n)$ ungerade, so hat man, wenn man nur die ersten Potenzen von μ und μ' behält,

Setzt man in diesem Ausdruck $s-1$ statt s, so erhält man die Summe der Glieder, welche aus $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s-1)}.\mu^{i-n-2s+2}$ entspringen, nämlich wenn man μ^{i-n-2s} gleich $\mu^{i-n-2s-2}.\mu^2$ setzt,

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.A^{(s-1)}.\mu^{i-n-2s-2}.[\mu^4.(2s-2)(2i-2s+3) + (i-n-2s+2)(i-n-2s+1).\mu^2].$$

Die Summe der beiden in μ^2 multiplicirten Glieder muſs gleich Null seyn; dies giebt

$$A^{(s)}.2s.(2i-2s+1) + A^{(s-1)}.(i-n-2s+2)(i-n-2s+1) = 0.$$

$$\beta = \frac{\gamma.\mu.\mu'.[1.2.3\ldots(i-n)]^2}{[2.4\ldots(i-n-1)(2i-1)(2i-3)\ldots(i+n+2)]^2} = \frac{\gamma.\mu.\mu'.[1.3.5\ldots(i-n).1.3.5\ldots(i+n)]^2}{[1.3.5\ldots(2i-1)]^2}.$$

Die vorhergehende Wurzelgröſse verwandelt sich, wenn man die Quadrate von μ und μ' vernachläſsigt, in

$$[r^2-2Rr.\cos(\varpi-\varpi')+R^2]^{-\frac{1}{2}}+Rr.\mu\mu'.[r^2-2rR.\cos(\varpi-\varpi')+R^2]^{-\frac{3}{2}};\quad (f).$$

Substituirt man statt cos $(\varpi - \varpi')$ seinen Werth in unmöglichen Exponentialgröſsen und nennt man c die Zahl, deren hyperbolischer Logarithme die Einheit ist; so wird der von $\mu\mu'$ unabhängige Theil

$$[r - Rc^{(\varpi-\varpi')\sqrt{-1}}]^{-\frac{1}{2}}.[r - Rc^{-(\varpi-\varpi')\sqrt{-1}}]^{-\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man diese Funktion, so ist der Koeffizient von

$$\frac{R^i}{r^{i+1}}.\left(\frac{c^{n.(\varpi-\varpi')\sqrt{-1}}+c^{-n.(\varpi-\varpi')\sqrt{-1}}}{2}\right),\text{ oder von } \frac{R^i}{r^{i+1}}.\cos n.(\varpi-\varpi'),$$

$$\frac{2.1.3.5\ldots(i+n-1).1.3.5\ldots(i-n-1)}{2.4.6\ldots(i+n).2.4.6\ldots(i-n)};$$

dies ist der Werth von β, wenn $i-n$ gerade ist. Vergleicht man ihn mit demjenigen, welchen wir für denselben Fall gefunden haben, so erhält man

$$\gamma = 2.\left(\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\right)^2.\frac{i.(i-1)\ldots(i-n+1)}{(i+1)(i+2)\ldots(i+n)}.$$

Für $n=0$ muſs man nur die Hälfte dieses Koeffizienten nehmen und alsdenn ist

$$\gamma = \left(\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\right)^2.$$

Auf eben diese Art erhält man den Koeffizienten von $\frac{R^i}{r^{i+1}}.\mu\mu'.\cos n(\varpi-\varpi')$ in der Funktion (f), gleich

$$\frac{2.1.3.5\ldots(i+n).1.3.5\ldots(i-n)}{2.4.6\ldots(i+n-1).2.4.6\ldots(i-n-1)}.$$

Dies ist der Koeffizient von $\mu\mu'$ im Werth vom β, wenn man die Quadrate von μ und μ' vernachläſsigt und wenn $i-n$ ungerade ist. Vergleicht man ihn mit dem Ausdruck, welchen wir so eben für diesen Koeffizienten in demselben Fall gefunden haben, so findet man

$$\gamma = 2.\left(\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\right)^2.\frac{i.(i-1)\ldots(i-n+1)}{(i+1).(i+2)\ldots(i+n)}$$

ein Ausdruck, welcher mit dem für den Fall wenn $i-n$ gerade ist, identisch

ist. Ist $n = 0$, so hat man auch hier

$$\gamma = \left(\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\right)^2.$$

16. Aus dem Vorhergehenden kann man die allgemeine Form der Funktionen $Y^{(i)}$ von μ, $\sqrt{1-\mu^2}\,.\sin\varpi$ und von $\sqrt{1-\mu^2}\,.\cos\varpi$ schlieſsen, welche Funktionen der partiellen Differenzialgleichung

$$o = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2Y^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1)\,Y^{(i)}$$

Genüge thun. Bezeichnet man den Koeffizienten von $\sin n\varpi$ oder $\cos n\varpi$ in der Funktion $Y^{(i)}$ mit β; so erhält man:

$$o = \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{d\beta}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} - \frac{n^2\beta}{1-\mu^2} + i.(i+1)\beta,$$

β ist gleich $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$ durch eine rationale und ganze Funktion von μ multiplicirt; und man hat in diesem Fall nach dem vorhergehenden Satz

$$\beta = A^{(n)}.(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.\left(\mu^{i-n} - \frac{(i-n)\,(i-n-1)}{2.(2i-1)}.\mu^{i-n-2} + \text{etc.}\right),$$

wo $A^{(n)}$ eine willkührliche Gröſse ist. Der Theil von $Y^{(i)}$ welcher vom Winkel $n\varpi$ abhängt, ist so gleich

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.\left(\mu^{i-n} - \frac{(i-n)\,(i-n-1)}{2.(2i-1)}.\mu^{i-n-2} + \text{etc.}\right).[A^{(n)}.\sin n\varpi + B^{(n)}.\cos n\varpi],$$

wo $A^{(n)}$ und $B^{(n)}$ zwey willkührliche Gröſsen sind. Setzt man in dieser Funktion nach und nach $n = 0$, $n = 1$, $n = 2 \ldots n = i$; so wird die Summe aller hieraus entstehenden Funktionen der allgemeine Ausdruck von $Y^{(i)}$ seyn, und dieser Ausdruck wird $2i+1$ willkührliche Gröſsen $B^{(0)}$, $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $A^{(2)}$, $B^{(2)}$ etc. enthalten.

Wir wollen nun eine rationale und ganze Funktion von der Ordnung s, der drey Koordinaten x, y, z betrachten. Bezeichnet man durch R den Abstand des durch diese Koordinaten bestimmten Punktes von ihrem Anfangspunkt, durch θ den Winkel, welchen R mit der Axe der x macht; und durch ϖ den Winkel, welchen die Ebene der x und der y mit der durch R und durch die Axe der x gehenden Ebene macht, so erhält man

$x = R\mu; \quad y = R . \sqrt{1-\mu^2} . \cos \varpi; \quad z = R . \sqrt{1-\mu^2} . \sin \varpi.$

Substituirt man diese Werthe in S und entwickelt man diese Funktion in Sinus und Kosinus des Winkels ϖ und seiner Vielfachen, so wird, wenn S die allgemeinste Funktion von der Ordnung s ist, sin $n\varpi$ und cos $n\varpi$ in Funktionen von der Form

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} . (A . \mu^{s-n} + B . \mu^{s-n-1} + C . \mu^{s-n-2} + \text{etc.})$$

multiplicirt seyn; der vom Winkel $n\varpi$ abhängende Theil von S wird also $2 . (s-n+1)$ beständige unbestimmte Gröſsen enthalten. Der vom Winkel ϖ und von seinen Vielfachen abhängende Theil von S, wird daher $s . (s+1)$ unbestimmte Gröſsen enthalten; der von ϖ unabhängige Theil wird $(s+1)$ enthalten; S wird also $(s+1)^2$ beständige unbestimmte Gröſsen enthalten.

Die Funktion $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} \ldots + Y^{(s)}$ enthält ebenfalls $(s+1)^2$ beständige unbestimmte Gröſsen, weil die Funktion $Y^{(i)}$ deren $(2i+1)$ enthält. Man kann also S in eine Funktion von dieser Form verwandeln und die einfachste Art diese Verwandlung zu verrichten ist folgende:

Man wird nach dem Vorhergehenden den allgemeinsten Ausdruck von $Y^{(s)}$ nehmen, man wird ihn von S abziehen, und man wird die willkührlichen Gröſsen von $Y^{(s)}$ so bestimmen, daſs die Potenzen und Producte von μ und von $\sqrt{1-\mu^2}$ von der Ordnung s aus der Differenz $S - Y^{(s)}$ verschwinden; dieser Unterschied wird so eine Funktion von der Ordnung $s-1$, welchen wir durch S' bezeichnen wollen. Man nehme dann den allgemeinsten Ausdruck von $Y^{(s-1)}$, man ziehe ihn von S' ab und bestimme die willkührlichen Gröſsen von $Y^{(s-1)}$, so daſs die Potenzen und Producte von μ und $\sqrt{1-\mu^2}$ von der Ordnung $s-1$, aus dem Unterschied $S' - Y^{(s-1)}$ verschwinden. Fährt man so fort, so wird man die Funktionen $Y^{(s)}$, $Y^{(s-1)}$, $Y^{(s-2)}$ etc. bestimmen, deren Summe S geben wird.

17. Wir wollen nun die Gleichung des 15ten Satzes

$$U^{(i)} = \int \varrho . R^{i+2} . dR . d\mu' . d\varpi' . Q^{(i)}$$

wieder vornehmen. Wir nehmen an, daſs R eine Funktion von μ', ϖ' und eines Parameters a ist, welcher für alle Lagen von derselben Dichte beständig ist, und von einer Lage zur andern sich ändert. Da das Differenzial dR so genommen wird, daſs man μ' und ϖ' als beständig ansieht, so hat man

$dR = \left(\frac{dR}{da}\right) . da$, folglich

$$U^{(i)} = \frac{1}{i+3} . \int \varrho . \left(\frac{d . R^{i+3}}{da}\right) . da . d\mu' . d\varpi' . Q^{(i)}.$$

Man gedenke sich nun daſs R^{i+3} in eine Reihe von der Form

$$Z'^{(0)} + Z'^{(1)} + Z'^{(2)} + Z'^{(3)} + \text{etc.}$$

entwickelt sey, wo $Z'^{(i)}$ für jeden Werth von i eine rationale und ganze Funktion von μ', $\sqrt{1-\mu'^2} . \sin \varpi'$, und $\sqrt{1-\mu'^2} . \cos \varpi'$ ist, welche der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thut

$$o = \left\{\frac{d . \left[(1-\mu'^2) . \left(\frac{dZ'^{(i)}}{d\mu'}\right)\right]}{d\mu'}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 Z'^{(i)}}{d\varpi'^2}\right)}{1-\mu'^2} + i . (i+1) . Z'^{(i)}.$$

Das Differenzial von $Z'^{(i)}$ in Beziehung auf a genommen, thut noch dieser Gleichung Genüge, und sie ist folglich von derselben Form; man muſs also, vermöge des allgemeinen Lehrsatzes des 12ten Satzes in der Entwickelung von $R^{(i+3)}$ nur das Glied $Z'^{(i)}$ betrachten, und alsdann hat man

$$U^{(i)} = \frac{1}{i+3} . \int \varrho . \left(\frac{dZ'^{(i)}}{da}\right) . da . d\mu' . d\varpi' . Q^{(i)}.$$

Ist das Sphäroid gleichartig und wenig von einer Kugel verschieden, so kann man $\varrho = 1$ und $R = a . (1 + \alpha y')$ setzen; man findet alsdann, wenn man in Beziehung auf a integrirt

$$U^{(i)} = \frac{1}{i+3} . \int Z'^{(i)} . d\mu' . d\varpi' . Q^{(i)}.$$

Nimmt man ferner an, daſs y' in eine Reihe von folgender Form entwickelt ist

$$Y'^{(0)} + Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + Y'^{(3)} + \text{etc.},$$

wo $Y'^{(i)}$ derselben partiellen Differenzialgleichung Genüge thun muſs, welcher $Z'^{(i)}$ Genüge thut; so erhält man, wenn man die Gröſsen von der Ordnung α^2 vernachläſsigt, $Z'^{(i)} = (i+3) . \alpha . a^{i+3} . Y'^{(i)}$; man hat folglich:

$$U^{(i)} = \alpha . a^{i+3} . \int Y'^{(i)} . d\mu' . d\varpi' . Q^{(i)}.$$

Bezeichnet man mit $Y^{(i)}$ den Werth welchen $Y'^{(i)}$ erhält, wenn man in ihm μ' und ϖ' in μ und ϖ verwandelt; so erhält man nach dem 11ten Satz

$$U^{(i)} = \frac{4 \alpha \pi . a^{i+3}}{2i+1} . Y^{(i)}.$$

Man findet so folgendes merkwürdige Resultat:

$$\int Y'^{(i)} \,.\, d\mu' \,.\, d\varpi' \,.\, Q^{(i)} = \frac{4\pi \,.\, Y^{(i)}}{(2i+1)}. \quad (1)$$

Diese Gleichung hat für jeden Werth von $Y'^{(i)}$ Statt; man muſs hieraus im Allgemeinen schlieſsen, daſs die doppelte Integration der Funktion $\int Z'^{(i)} \,.\, d\mu' \,.\, d\varpi' \,.\, Q^{(i)}$ von $\mu' = -1$ bis $\mu' = 1$ und von $\varpi' = 0$ bis $\varpi' = 2\pi$ genommen, bloſs $Z'^{(i)}$ in $\frac{4\pi \,.\, Z^{(i)}}{2i+1}$ verwandelt; wenn $Z^{(i)}$ der Werth ist, welchen $Z'^{(i)}$ erhält, wenn man μ' und ϖ' in μ und ϖ verwandelt. Man hat also

$$U^{(i)} = \frac{4\pi}{(i+3)(2i+1)} \,.\int \varrho \,.\left(\frac{dZ^{(i)}}{da}\right).\, da;$$

und die dreyfache Integration, wovon $U^{(i)}$ abhängt, wird dadurch auf eine einzige Integration gebracht, welche in Beziehung auf a von $a = 0$ bis zum Werth dieser Gröſse an der Oberfläche des Sphäroids genommen werden muſs.

Die Gleichung (1) bietet ein sehr einfaches Mittel dar, die Funktion $\int Y^{(i)} \,.\, Z^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$ von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$ und von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 2\pi$ zu integriren. Denn da der Theil von $Y^{(i)}$ welcher vom Winkel $n\varpi$ abhängt, nach dem vorhergehenden von der Form $\lambda \,.\, (A^{(n)} \,.\, \sin n\varpi + B^{(n)} \,.\, \cos n\varpi)$ ist, wo

$$\lambda = (1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} .\left[\mu^{i-n} - \frac{(i-n)(i-n-1)}{2.(2i-1)} \,.\, \mu^{i-n-2} + \text{etc.}\right]$$

ist; so hat man

$$Y'^{(i)} = \lambda' \,.\, (A^{(n)} \,.\, \sin n\varpi' + B^{(n)} \,.\, \cos n\varpi'),$$

wenn λ' der Werth ist, welchen λ erhält wenn man μ in μ' verwandelt. Der Theil von $Q^{(i)}$, welcher vom Winkel $n\varpi$ abhängt, ist nach dem vorhergehenden Satz gleich $\gamma.\lambda.\lambda'.\cos n(\varpi - \varpi')$ oder $\gamma.\lambda'.\lambda.(\cos n\varpi.\cos n\varpi' + \sin n\varpi.\sin n\varpi')$; der Theil des Integrals $\int Y^{(i)} \,.\, d\mu' \,.\, d\varpi' \,.\, Q^{(i)}$, welcher vom Winkel $n\varpi$ abhängt, wird sogleich

$$\gamma\lambda \,.\, \sin n\varpi \,.\int \lambda'^2 \,.\, d\mu' \,.\, d\varpi' \,.\, \sin n\varpi' .(A^{(n)} \,.\, \sin n\varpi' + B^{(n)} \,.\, \cos n\varpi')$$
$$+ \gamma.\lambda.\cos n\varpi .\int \lambda'^2 \,.\, d\mu' \,.\, d\varpi' \,.\, \cos n\varpi' .(A^{(n)} \,.\, \sin n\varpi' + B^{(n)} \,.\, \cos n\varpi').$$

Verrichtet man die Integrationen in Beziehung auf ϖ', so wird dieser Theil

$$\gamma.\lambda.\pi.\,(A^{(n)} \,.\, \sin n\varpi + B^{(n)} \,.\, \cos n\varpi) \,.\int \lambda'^2 \,.\, d\mu'.$$

Vermöge der Gleichung (1) ist aber derselbe Theil gleich

4 π

$$\frac{4\pi}{2i+1} \cdot \lambda \cdot (A^{(n)} \cdot \sin n\varpi + B^{(n)} \cdot \cos n\varpi),$$

man hat also

$$\int \lambda'^2 \cdot d\mu' = \frac{4}{(2i+1)\cdot\gamma}.$$

Wir wollen nun den Theil von $Z^{(i)}$, welcher vom Winkel $n\varpi$ abhängt, durch $\lambda \cdot (A'^{(n)} \cdot \sin n\varpi + B'^{(n)} \cdot \cos n\varpi)$ vorstellen. Dieser Theil muſs allein mit dem entsprechenden Theil von $Y^{(i)}$ verbunden werden; weil die von den Sinus und Kosinus des Winkels ϖ und seiner Vielfachen abhängenden Glieder, durch die Integration in der Funktion $\int Y^{(i)} \cdot Z^{(i)} \cdot d\mu \cdot d\varpi$ verschwinden, wenn man das Integral von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 2\pi$ nimmt. Man erhält so, wenn man nur auf den Theil von $Y^{(i)}$ Rücksicht nimmt, welcher vom Winkel $n\varpi$ abhängt:

$$\int Y^{(i)} \cdot Z^{(i)} \cdot d\mu \cdot d\varpi$$

$$= \int \lambda^2 . d\mu . d\varpi . (A^{(n)} . \sin n\varpi + B^{(n)} . \cos n\varpi) \cdot (A'^{(n)} . \sin n\varpi + B'^{(n)} . \cos n\varpi)$$

$$= \pi . (A^{(n)} . A'^{(n)} + B^{(n)} . B'^{(n)}) . \int \lambda^2 . d\mu = \frac{4\pi}{(2i+1).\gamma} . (A^{(n)} . A'^{(n)} + B^{(n)} . B'^{(n)}).$$

Setzt man im letzten Theil dieser Gleichung nach und nach $n = 0$, $n = 1$, $n = 2 \ldots n = i$, so wird die Summe aller dieser Glieder der Werth des Integrals $\int Y^{(i)} \cdot Z^{(i)} \cdot d\mu \cdot d\varpi$ seyn.

Ist das Sphäroid ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid, so daſs die Axe, mit welcher der Halbmesser R den Winkel ϖ macht, die Umdrehungsaxe ist; so wird der Winkel ϖ aus dem Ausdruck von $Z^{(i)}$ verschwinden, welcher alsdann von folgender Form seyn wird

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots\quad i} . A^{(i)} . \left[\mu^i - \frac{i.(i-1)}{2.(2i-1)} \cdot \mu^{i-2} + \frac{i.(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4.(2i-1)(2i-3)} . \mu^{i-4} - \text{etc.}\right],$$

wo $A^{(i)}$ eine Funktion von a ist. Man bezeichne durch $\lambda^{(i)}$ den Koeffizienten von $A^{(i)}$ in dieser Funktion; das Product

$$\left(\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots\quad i}\right)^2 . \left(1 - \frac{i.(i-1)}{2.(2i-1)} + \text{etc.}\right)^2$$

ist nach dem vorhergehenden Satze der Koeffizient von $\frac{R^i}{r^{i+1}}$ in der Entwickelung der Wurzelgröſse $\left[r^2 - 2Rr.[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} . \sqrt{1-\mu'^2} . \cos(\varpi - \varpi')] + R^2\right]^{-\frac{1}{2}}$, wenn man in ihr μ und μ' der Einheit gleich setzt. Dieser Koeffizient ist alsdann gleich 1; man hat also

$$\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\cdot\left(1-\frac{i.(i-1)}{2.(2i-1)}+\text{etc.}\right)=1,$$

das heifst, $\lambda^{(i)}$ ist der Einheit gleich, wenn $\mu = 1$ ist. Man hat ferner

$$U^{(i)} = \frac{4\pi\lambda^{(i)}}{(i+3)(2i+1)}\cdot\int\varrho\cdot\left(\frac{d\,A^{(i)}}{da}\right).\,da.$$

In Beziehung auf die Umdrehungsaxe ist $\mu = 1$, und folglich

$$U^{(i)} = \frac{4\pi}{(i+3)(2i+1)}\cdot\int\varrho\cdot\left(\frac{d\,A^{(i)}}{da}\right).\,da.$$

Nimmt man also an, dafs man für einen Punkt in der Verlängerung dieser Axe

$$V = \frac{B^{(0)}}{r}+\frac{B^{(1)}}{r^2}+\frac{B^{(2)}}{r^3}+\text{etc.}$$

hat; so erhält man den Werth von V für einen andern Punkt, der in derselben Entfernung vom Anfangspunkt der Koordinaten aber auf einem Halbmesser sich befindet, welcher mit der Umdrehungsaxe einen Winkel macht, dessen Kosinus μ ist, wenn man die Glieder dieses Werths respective mit $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ etc. multiplicirt.

Diese Methode wird in dem Fall, wenn das Sphäroid nicht durch Umdrehung entstanden ist, den Theil von V geben, welcher von ϖ unabhängig ist: man wird den andern Theil auf folgende Art bestimmen. Man nehme um mehrerer Einfachheit willen das Sphäroid so an, dafs es sowohl durch den Aequator, als auch durch den Mittagskreis, wo man den Anfangspunkt des Winkels ϖ setzt, und durch den auf diesen senkrechten Mittagskreis in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt wird. Dann wird V eine Funktion von μ^2, $\sin\varpi^2$ oder, welches dasselbe ist, eine Funktion von μ^2 und vom Kosinus des Winkels 2ϖ und seiner Vielfachen seyn. $U^{(i)}$ wird also Null seyn, wenn i ungerade ist; und in dem Fall wo es gerade ist, wird das vom Winkel $2n\varpi$ abhängende Glied von folgender Form seyn:

$$C^{(i)}.(1-\mu^2)^n.\left[\mu^{i-2n}-\frac{(i-2n)(i-2n-1)}{2.(2i-1)}.\mu^{i-2n-2}+\text{etc.}\right].\cos 2n\varpi.$$

Für einen angezogenen Punkt in der Ebene des Aequators, wo $\mu = 0$ ist, wird der von diesem Glied abhängende Theil von V

$$\pm\frac{C^{(i)}}{r^{i+1}}\cdot\frac{1.3.5\ldots(i-2n-1)}{2.(i+2n+1)(i+2n+3)\ldots(2i-1)}.\cos 2n\varpi.$$

Hat man daher V in eine nach dem Kosinus des Winkels 2ϖ und seiner Viel-

fachen geordnete Reihe für den Fall entwickelt, wenn der angezogene Punkt in der Ebene des Aequators ist; so folgt aus dem Vorhergehenden, daſs man nur die von $\frac{\cos 2n\varpi}{r^{i+1}}$ abhängenden Glieder durch die Funktion

$$+\frac{(i+2n+1)\ldots(2i-1)}{1.3.5\ldots(i-2n-1)}.(1-\mu^2)^n.\left[\mu^{i-2n}-\frac{(i-2n)(i-2n-1)}{2.(2i-1)}.\mu^{i-2n-2}+\text{etc.}\right]$$

zu multipliciren braucht, um diesen Werth auf jeden angezogenen Punkt zu erstrecken. Man wird also den ganzen Werth von V haben, wenn dieser Werth durch eine Reihe für die zwey Fälle bestimmt seyn wird, erstlich wenn der angezogene Punkt auf der Verlängerung der Axe des Pols; und zweytens, wenn er sich in der Ebene des Aequators befindet; dies macht die Aufsuchung dieses Werths weit einfacher.

Das Sphäroid, welches wir so eben betrachtet haben, begreiſt das Ellipsoid in sich. Man hat nach Satz 2, für einen Punkt auf der Axe des Pols, für welche wir die Axe der x annehmen, $b = 0$, $c = 0$; und alsdann läſst sich der Ausdruck von V im 5ten Satz in Beziehung auf p integriren. Für einen Punkt in der Ebene des Aequators hat man $a = 0$, und derselbe Ausdruck von V läſst sich noch in Beziehung auf q durch die bekannten Methoden integriren, wenn man tang q gleich t setzt. Nimmt man in diesen zwey Fällen das Integral in Beziehung auf eine der veränderlichen Gröſsen innerhalb ihrer Grenzen, so wird es dann auch möglich in Beziehung auf die zweyte veränderliche Gröſse zu integriren, und man findet, wenn M die Masse des Sphäroids ist, daſs der Werth von $\frac{V}{M}$ von der halben Axe k des Sphäroids, welche senkrecht auf den Aequator ist, unabhängig ist, und daſs er nur von den Eccentrizitäten des Ellipsoids abhängt. Multiplicirt man also die verschiedenen Glieder der Werthe von $\frac{V}{M}$ für diese zwey Fälle durch die oben erwähnten gegebnen Factoren, nachdem man diese Werthe in Reihen verwandelt hat, welche nach den Potenzen von $\frac{1}{r}$ geordnet sind, wodurch man den Werth von $\frac{V}{M}$ für jeden angezogenen Punkt erhält; so wird die Funktion, welche hieraus entspringt, von k unabhängig seyn und nur von den Eccentricitäten abhängen; dies ist ein neuer Beweiſs des Lehrsatzes, welchen wir im 6ten Satz bewiesen haben.

Befindet sich der angezogene Punkt im Innern des Sphäroids, so hängt die Anziehung, welche er erfährt, von $v^{(i)}$ ab, wie man im 9ten Satz gesehen hat, und man hat nach dem angeführten Satze

$$v^{(i)} = \int \varrho \,.\, \frac{dR \,.\, d\mu' \,.\, d\varpi' \,.\, Q^{(i)}}{R^{i-1}}$$

welcher Gleichung man folgende Gestalt geben kann,

$$v^{(i)} = \frac{1}{(2-i)} \,.\int \varrho \,.\left(\frac{d\,.\,R^{2-i}}{da}\right).\, da \,.\, d\mu' \,.\, d\varpi' \,.\, Q^{(i)}.$$

Man nehme an, daſs R^{2-i} in eine Reihe von folgender Form entwickelt worden ist

$$z'^{(0)} + z'^{(1)} + z'^{(2)} + \text{etc.}$$

wo $z'^{(i)}$ der partiellen Differenzialgleichung

$$0 = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu'^2).\left(\frac{dz'^{(i)}}{d\mu'}\right)\right]}{d\mu'}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 z'^{(i)}}{d\varpi'^2}\right)}{1-\mu'^2} + i\,.\,(i+1)\,.\,z'^{(i)}$$

Genüge thun muſs. Nennt man ferner $z^{(i)}$ den Werth welchen $z'^{(i)}$ erhält, wenn man in ihm μ' in μ und ϖ' in ϖ verwandelt, so hat man nach dem vorhergehenden

$$v^{(i)} = \frac{4\pi}{(2i+1).(2-i)} \,.\int \varrho \,.\left(\frac{dz^{(i)}}{da}\right).\, da.$$

Man erhält so den Ausdruck von V für alle Lagen des Sphäroids welche den angezogenen Punkt umgeben. Der Werth von V für die Lagen, in Beziehung auf welche der gegebene Punkt ein äuſserer ist, wird so bestimmt werden, wie wir so eben gezeigt haben.

Drittes Kapitel.

Von der Gestalt einer flüssigen gleichartigen Masse, welche im Gleichgewicht ist, und eine Umdrehungsbewegung hat.

18. Wir haben in den zwey vorhergehenden Kapiteln, die Theorie der Anziehungen der Sphäroide gegeben; wir wollen nun die Gestalt betrachten, welche sie vermöge der gegenseitigen Wirkung ihrer Theile und vermöge der übrigen Kräfte, welche auf sie wirken, annehmen müssen. Wir werden zuerst die Figur suchen, welche dem Gleichgewicht einer flüssigen gleichartigen Masse, die eine Umdrehungsbewegung hat, Genüge thut, und wir werden eine strenge Auflösung dieses Problems geben.

Es seyen a, b, c die rechtwinklichten Koordinaten irgend eines Punktes der Oberfläche dieser Masse und P, Q, R die Kräfte, welche auf sie parallel mit diesen Koordinaten wirken, von welchen Kräften wir annehmen, daſs sie dieselben zu vermindern streben. Es folgt aus dem 34sten Satz des ersten Buches, daſs es zum Gleichgewicht der flüssigen Masse zureicht, daſs man

$$o = P.da + Q.db + R.dc$$

hat, wofern man nur in der Bestimmung der Kräfte P, Q, R auf die aus der Umwälzungsbewegung entstehende Mittelpunktsfliehkraft Rücksicht nimmt.

Wir werden zur Bestimmung dieser Kräfte annehmen, daſs die Figur der flüssigen Masse die eines durch Umdrehung entstandenen Ellipsoids ist, dessen Axe der Umwälzung die geometrische Umdrehungsaxe selbst ist. Wenn die Kräfte P, Q, R welche aus dieser Hypothese entspringen, in die vorhergehende Gleichung des Gleichgewichts gesetzt, die Differenzialgleichung der Oberfläche des Ellipsoids geben; so ist die vorhergehende Voraussetzung richtig, und die elliptische Gestalt thut dem Gleichgewicht der flüssigen Masse Genüge.

Man nehme an, daſs die Axe der a die Axe der Umdrehung selbst sey, so wird die Gleichung für die Oberfläche des Ellipsoids von folgender Form seyn

$$a^2 + m.(b^2 + c^2) = k^2,$$

wenn der Anfangspunkt der Koordinaten a, b, c im Mittelpunkt des Ellipsoids ist; k wird die halbe Umdrehungsaxe seyn und man hat nach dem 2ten Satz, wenn M die Masse des Ellipsoids ist

$$M = \frac{4\pi . \varrho . k^3}{3\,m},$$

wo ϱ die Dichte des Flüssigen ist. Setzt man, wie im 3ten Satz $\frac{1 - m}{m} = \lambda^2$, so hat man $m = \frac{1}{1 + \lambda^2}$ und folglich

$$M = \frac{4\pi . \varrho}{3} . k^3 . (1 + \lambda^2),$$

eine Gleichung, welche die halbe Axe geben wird, wenn λ bestimmt seyn wird. Es sey

$$A' = \frac{4\pi . \varrho . (1 + \lambda^2)}{\lambda^3} . [\lambda - \text{Arc . tang } \lambda]$$

$$B' = \frac{4\pi . \varrho}{2\,\lambda^3} . [(1 + \lambda^2) . \text{Arc . tang } \lambda - \lambda],$$

so hat man nach dem 3ten Satz, wenn man nur auf die Anziehung der flüssigen Masse Rücksicht nimmt,

$$P = A' . a; \qquad Q = B' . b; \qquad R = B' . c.$$

Nennt man g die Mittelpunktsfliehkraft in der Entfernung 1 von der Umdrehungsaxe, so wird diese Kraft in der Entfernung $\sqrt{b^2 + c^2}$ von derselben Axe, gleich $g . \sqrt{b^2 + c^2}$ seyn: zerlegt man sie parallel mit den Koordinaten b und c, so wird daraus in Q das Glied $-gb$ und in R das Glied $-gc$ entstehen; man erhält so, wenn man auf alle Kräfte, welche auf die Theilchen der Oberfläche wirken Rücksicht nimmt

$$P = A' . a; \qquad Q = (B' - g) . b; \qquad R = (B' - g) . c,$$

die vorhergehende Gleichung des Gleichgewichts, wird also

$$0 = ada + \frac{(B' - g)}{A'} . (b . db + c . dc).$$

Die Differenzialgleichung der Oberfläche des Sphäroids ist, wenn man statt m seinen Werth $\frac{1}{1+\lambda^2}$ setzt

$$o = a da + \frac{b . db + c . dc}{1+\lambda^2},$$

vergleicht man sie mit der vorhergehenden, so erhält man

$$(1+\lambda^2) . (B' - g) = A'; \quad (1).$$

Substituirt man statt A' und B' ihre Werthe und setzt man $\frac{g}{\frac{4}{3}\pi . \varrho} = q$, so erhält man:

$$o = \frac{9\lambda + 2q . \lambda^3}{9 + 3 . \lambda^2} - \text{Arc. tang } \lambda; \quad (2).$$

Bestimmt man nun λ durch diese Gleichung, welche von den Koordinaten a, b, c unabhängig ist, so wird man die Gleichung des Gleichgewichts mit der der Oberfläche des Sphäroids in Uebereinstimmung bringen. Es folgt hieraus, daſs die elliptische Figur dem Gleichgewicht Genüge thut, wenigstens dann, wenn die Umdrehungsbewegung so beschaffen ist, daſs der Werth von λ^2 nicht unmöglich ist, oder daſs er, wenn er negativ ist, weder gleich noch gröſser als die Einheit ist. Der Fall, wenn λ^2 unmöglich ist, würde einen unmöglichen Körper geben; der Fall, wenn $\lambda^2 = -1$ würde ein Paraboloid, und der, wenn λ^2 negativ und gröſser als die Einheit ist, würde ein Hyperboloid geben.

19. Nennt man p die Schwere an der Oberfläche des Ellipsoids, so hat man

$$p = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

Im Innern des Ellipsoids sind die Kräfte P, Q, R den Koordinaten a, b, c proportional; denn man hat im 3ten Satz gesehen, daſs die mit den Koordinaten parallelen Anziehungen des Sphäroids ihnen respective proportional sind, und dies gilt auch für die Mittelpunktsfliehkraft, wenn man sie parallel mit denselben Koordinaten zerlegt. Es folgt hieraus, daſs die Schwere in den verschiedenen Punkten eines aus dem Mittelpunkt des Ellipsoids an seine Oberfläche gezogenen Halbmessers, parallele Richtung hat, und den Entfernungen von diesem Mittelpunkt proportional ist, so daſs man die Schwere im Innern des Sphäroids haben wird, wenn man die Schwere an seiner Oberfläche kennt.

Substituirt man im Ausdruck von p statt P, Q, R ihre im vorhergehenden Satz gegebenen Werthe, so erhält man

$$p = \sqrt{A'^2 . a^2 + (B' - g)^2 . (b^2 + c^2)}.$$

Hieraus erhält man vermöge der Gleichung (1) des vorhergehenden Satzes

$$p = A' . \sqrt{a^2 + \frac{b^2 + c^2}{(1 + \lambda^2)^2}}.$$

Die Gleichung für die Oberfläche des Ellipsoids giebt aber $\frac{b^2 + c^2}{1 + \lambda^2} = k^2 - a^2$; man hat also

$$p = A' . \frac{\sqrt{k^2 + \lambda^2 . a^2}}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

Die Gröſse a ist am Pol gleich k, und am Aequator gleich Null. Es folgt hieraus, daſs die Schwere unterm Pol zur Schwere unterm Aequator sich wie $\sqrt{1 + \lambda^2}$ zur Einheit, und folglich wie der Diameter des Aequators zur Axe des Pols verhält.

Man bezeichne durch t die senkrechte auf die Oberfläche des Ellipsoids, so weit verlängert, bis sie die Axe der Umdrehung schneidet, so hat man [23])

$$t = \sqrt{(1 + \lambda^2) . (k^2 + \lambda^2 . a^2)},$$

folglich

$$p = \frac{A' . t}{1 + \lambda^2},$$

die Schwere ist also der Gröſse t proportional.

Es

23) Eine Linie ist senkrecht auf eine krumme Fläche, wenn sie auf zwey auf einander senkrechte Tangenten dieser Fläche senkrecht ist. Da das gegebene Ellipsoid durch Umdrehung entstanden ist, so lege man durch den gegebenen Punkt und durch die Umdrehungsaxe k eine Ebene; der Durchschnitt dieser Ebene mit der Oberfläche des Ellipsoids, wird die beschreibende Ellipse geben, welche auf die Ebene des Kreises, welchen der gegebene Punkt bey der Umdrehung beschreibt, senkrecht seyn wird. Eine Linie vom gegebenen Punkt aus in der Ebene der Ellipse gezogen, wird senkrecht auf die Tangente des Kreises seyn; ist diese Linie zugleich die Normale der Ellipse, so wird sie auf die Tangenten des Kreises und der Ellipse und folglich auf die Oberfläche des Ellipsoids senkrecht seyn. Verlängert man die Normale der beschreibenden Ellipse, bis sie die Umdrehungsaxe k schneidet, so wird man die Linie t erhalten. Zieht man nämlich durch diesen Durchschnittspunkt eine mit der Abscisse der Ellipse parallele und ihr glei-

Es sey ψ die Ergänzung des Winkels, welchen t mit der Umdrehungsaxe macht, so wird ψ die geographische Breite des gegebenen Punktes der Oberfläche seyn, und man wird durch die Natur der Ellipse [24])

$$t = \frac{(1 + \lambda^2) \,.\, k}{\sqrt{1 + \lambda^2 \,.\, \cos\psi^2}}$$

haben, und folglich

$$p = \frac{A' \,.\, k}{\sqrt{1 + \lambda^2 \,.\, \cos\psi^2}},$$

und, wenn man für A' seinen Werth substituirt

gleiche Linie, und verlängert man die Ordinate der Ellipse, bis sie diese Linie schneidet: so erhält man ein Dreyeck, welches dem von der Ordinate, Subnormale und Normale gebildetem Dreyeck ähnlich seyn wird, und hieraus

Subnormale : Normale = Abscisse : t

folglich $t = x \,.\, \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$, wenn x die Abscisse, y die Ordinate bedeutet. Jetzt müssen wir nur noch die Gleichung der beschreibenden Ellipse suchen. Die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoids entsteht aus der Gleichung der Ellipse, wenn man die Abscisse der Ellipse in zwey Koordinaten zerlegt, welche unter einander und auf die Ordinate der Ellipse senkrecht sind, weil dann jeder Punkt der Oberfläche des Ellipsoids durch drey senkrechte Koordinaten gegeben ist. Die Abscisse der Ellipse ist also die Hypothenuse eines Dreyecks, dessen Katheten zwey Koordinaten der Oberfläche des Ellipsoids sind; die dritte Koordinate der Oberfläche ist die Ordinate der Ellipse. Da nun $a^2 + m \,.\, (b^2 + c^2) = k^2$ die Gleichung für die Oberfläche des Ellipsoids ist, wo a parallel mit der Umdrehungsaxe k ist: so ist a die Ordinate der beschreibenden Ellipse; $\sqrt{b^2 + c^2}$ ihre Abscisse, so dafs die Gleichung der beschreibenden Ellipse, $a^2 + m \,.\, (\sqrt{b^2 + c^2})^2 = k^2$ ist. Differenziirt man diese Gleichung, so findet man

$a \,.\, da + m \,.\, \sqrt{b^2 + c^2} \,.\, d.(\sqrt{b^2 + c^2}) = 0$; folglich $\frac{dx^2}{dy^2}$ oder $\frac{d.(\sqrt{b^2 + c^2})^2}{da^2} = \frac{a^2}{m^2.(b^2 + c^2)}$;

und $t = \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{a^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{m.(b^2 + c^2) + \frac{1}{m} a^2}{m}} = \sqrt{\frac{k^2 - a^2 + \frac{1}{m} a^2}{m}}$; und wenn man statt m seinen Werth $\frac{1}{1 + \lambda^2}$ setzt, $t = \sqrt{(1 + \lambda^2)(k^2 + \lambda^2 a^2)}$.

24) Im Dreyeck, aus welchem wir in der vorhergehenden Anmerkung t bestimmt haben, ist ψ der Winkel, welchen t mit der Linie macht, welche der Abscisse $\sqrt{b^2 + c^2}$ parallel und gleich ist; folglich $t \,.\, \cos\psi = \sqrt{b^2 + c^2}$ und $m\, t^2 \,.\, \cos\psi^2 = b^2 + c^2 = k^2 - a^2$; hieraus findet man

$k^2 + \lambda^2 a^2 = (1 + \lambda^2)\, k^2 - \lambda^2\, m\, t^2 \,.\, \cos\psi^2 = (1 + \lambda^2)\, k^2 - \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \,.\, t^2 \,.\, \cos\psi^2$; folglich

$(1 + \lambda^2)(k^2 + \lambda^2 a^2)$ oder $t^2 = (1 + \lambda^2)^2\, k^2 - \lambda^2\, t^2 \,.\, \cos\psi^2$ oder $(1 + \lambda^2 \cos\psi^2)\, t^2 = (1 + \lambda^2)^2\, k^2$.

$$p = \frac{4\pi\varrho \, . \, k \, . (1 + \lambda^2) \, . \, (\lambda - \text{Arc. tang } \lambda)}{\lambda^3 \, . \, \sqrt{1 + \lambda^2 \, . \, \cos \psi^2}} . \quad (3)$$

Diese Gleichung giebt das Verhältniſs zwischen der Schwere und der Breite; man muſs aber hierzu die beständigen Gröſsen bestimmen, welche sie enthält.

Es sey T die Anzahl Sekunden, in welcher Zeit die flüssige Masse sich um sich selbst dreht; so wird g, die Mittelpunktsfliehkraft in der Entfernung 1 von der Umdrehungsaxe, nach dem 9ten Satz des ersten Buchs gleich $\frac{4\pi^2}{T^2}$ seyn; man wird also

$$q = \frac{g}{\frac{4}{3}\pi \, . \, \varrho} = \frac{12\,\pi^2}{4\,\pi \, . \, \varrho \, . \, T^2}$$

haben; dies giebt $4\pi\varrho = \frac{12\,\pi^2}{q\,T^2}$. Der Krümmungshalbmesser des elliptischen Meridians ist $\frac{(1 + \lambda^2) \, . \, k}{(1 + \lambda^2 \, . \cos \psi^2)^{\frac{3}{2}}}$; nennt man also c die Gröſse des Grads unter der Breite ψ, so hat man [25])

$$\frac{(1 + \lambda^2) \, . \, \pi \, . \, k}{(1 + \lambda^2 \, . \cos \psi^2)^{\frac{3}{2}}} = 200 \, . \, c.$$

Diese Gleichung giebt, mit der vorhergehenden verbunden,

$$\frac{4\,\pi \, . \, \varrho \, . (1 + \lambda^2) \, . \, k}{\sqrt{1 + \lambda^2 \, . \, \cos \psi^2}} = 200 \, . \, c \, . (1 + \lambda^2 \, . \, \cos \psi^2) \, . \, \frac{12\,\pi}{q\,T^2};$$

man erhält so

$$p = 200 \, . \, c \, . (1 + \lambda^2 \, . \cos \psi^2) \, . \, \frac{(\lambda - \text{Arc. tang } \lambda)}{\lambda^3} \, . \, \frac{12\,\pi}{q\,T^2}.$$

Es sey l die Länge des einfachen Pendels, welcher eine Schwingung in einer Sekunde Zeit macht; so folgt aus dem 11ten Satz des ersten Buches daſs $p = \pi^2 \, . \, l$ ist. Vergleicht man beide Ausdrücke von p, so erhält man

$$q = \frac{2400 \, . \, c \, . \, (\lambda - \text{Arc. tang } \lambda) \, (1 + \lambda^2 \, . \, \cos \psi^2)}{\pi \, . \, l \, . \, T^2 \, . \, \lambda^3}; \quad (4).$$

Diese Gleichung und die Gleichung (2) des vorhergehenden Satzes geben die

25) Man erinnere sich, daſs in diesem Werk Dezimalgrade gebraucht werden, und daſs folglich 200 Grade der halben Peripherie gleich sind.

Werthe von q und von λ, durch die Länge l des Sekundenpendels und durch die Gröſse c des Grades des Meridians, beide unter der Breite ψ beobachtet.

Man setze $\psi = 50^G$, $(45°)$ so geben diese Gleichungen [26])

$$q = \frac{800 \,.\, c}{\pi \,.\, l \,.\, T^2} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{800 \,.\, c}{\pi \,.\, l \,.\, T^2}\right)^2 + \text{etc.}$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{2}\, q + \frac{75}{14}\, q^2 + \text{etc.}$$

Die Beobachtungen geben, wie man in der Folge sehen wird [27]);

$$c = 100000^{\text{metres}}; \qquad l = 0^{\text{me}},741608,$$

man hat ferner $T = 99727$ und folglich

$$q = 0,00344957; \qquad \lambda^2 = 0,00868767.$$

Das Verhältniſs der Axe des Aequators zur Axe des Pols, nämlich $\sqrt{1 + \lambda^2}$ wird in diesem Fall 1,00433441, diese beiden Axen haben also sehr nahe das

26) Die Gleichung (2) des 18ten Satzes, giebt $0 = 9\lambda + 2q\lambda^3 - (9 + 3\lambda^2)$ Arc. tang λ. Da nun Arc. tang $\lambda = \lambda - \frac{1}{3}\lambda^3 + \frac{1}{5}\lambda^5 - \frac{1}{7}\lambda^7 \ldots$ ist, so findet man

$$q = \frac{2}{5}\lambda^2 - \frac{12}{35}\lambda^4 + \frac{2}{7}\lambda^6 - \frac{8}{33}\lambda^8 + \frac{30}{143}\lambda^{10} -$$

und hieraus durch die bekannten Methoden für die Umkehrung der Reihen λ, oder wenn man $\lambda^2 = \frac{5}{2}\, q + A q^2$ setzt, welches kürzer ist, weil man hier nur die zwey ersten Glieder des Werthes von λ^2 braucht. Substituirt man diesen Werth von λ^2 in die Gleichung für q, so findet man $\frac{2}{5} A - \frac{15}{7} = 0$, oder $A = \frac{75}{14}$.

Nun ist ferner, wenn $\psi = 45°$ ist, $1 + \lambda^2 \,.\, \cos\psi^2 = 1 + \frac{1}{2}\lambda^2$; und $\lambda -$ Arc. tang λ $= \frac{1}{3}\lambda^3 - \frac{1}{5}\lambda^5 + \frac{1}{7}\lambda^7 - \ldots$, folglich $\left(\frac{\lambda - \text{Arc. tang}\,\lambda}{\lambda^3}\right)(1 + \lambda^2 \cos\psi^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\lambda^2 + \frac{3}{70}\lambda^4 \ldots$ und, wenn man diesen Werth in die Gleichung (4) setzt, $q = \frac{800 \,.\, c}{\pi \,.\, l \,.\, T^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\lambda^2 + \ldots\right)$.

Da aber λ^2 vermöge der vorhergehenden Gleichung nahe gleich $\frac{5}{2}\, q$ ist, so ist

$q = \frac{800 \,.\, c}{\pi \,.\, l \,.\, T^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\, q + \ldots\right)$. Setzt man hier noch statt q das erste Glied seines Werthes nämlich $\frac{800 \,.\, c}{\pi \,.\, l \,.\, T^2}$, so findet man $q = \frac{800 \,.\, c}{\pi \,.\, l \,.\, T^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{800 \,.\, c}{\pi \,.\, l \,.\, T^2} + \ldots\right)$.

27) Man findet die allgemeine Gleichung für l am Ende des 42sten Satzes des dritten Buches.

Verhältnifs 231,7 zu 230,7 und nach dem vorhergehenden haben die Schwere unterm Pol zur Schwere unterm Aequator dasselbe Verhältnifs.

Man erhält k, die halbe Axe des Pols, vermittelst der Gleichung

$$k = \frac{200 \cdot c \cdot (1 + \frac{1}{2}\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{\pi \cdot (1 + \lambda^2)} = \frac{200 \cdot c}{\pi} \cdot (1 - \tfrac{1}{4}\lambda^2 + \text{etc.})$$

dies giebt

$$k = 6352534^{\text{me}}.$$

Man mufs, um die Anziehung einer Kugel vom Halbmesser k und von irgend einer Dichtigkeit zu erhalten, bemerken, dafs eine Kugel, deren Halbmesser k und deren Dichte ϱ ist, einen Punkt auf ihrer Oberfläche mit einer Kraft anzieht, welche gleich $\frac{4}{3}\pi \cdot \varrho \cdot k$ und folglich vermöge der Gleichung (3) gleich $\frac{\lambda^3 \cdot p \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}\lambda^2}}{3 \cdot (1 + \lambda^2) \cdot (\lambda - \text{Arc.tang}\,\lambda)}$ oder gleich $p \cdot \left[1 - \frac{3}{20}\lambda^2 + \text{etc.}\right]$, oder endlich gleich $0{,}998697 \cdot p$ ist, wenn p die Schwere unterm Parallelkreis von 50^G ist. Man kann hieraus leicht die anziehende Kraft schliefsen, welche eine Kugel von jedem Halbmesser und jeder Dichte auf einen aufserhalb derselben oder in ihrem Innern sich befindenden Punkt ausübt.

20. Hätte die Gleichung (2) des 18ten Satzes verschiedene reelle Wurzeln; so würden mehrere Figuren des Gleichgewichts zu derselben Umdrehungsbewegung gehören; wir wollen also sehen, ob die Gleichung mehrere reelle Wurzeln hat. Wir nennen hierzu ϕ die Funktion $\frac{9\lambda + 2q\lambda^3}{9 + 3\lambda^2} - \text{Arc.tang}\,\lambda$, welche, gleich Null gesetzt, die Gleichung (2) giebt. Man sieht leicht, dafs der Ausdruck von ϕ, wenn man λ von Null bis ins Unendliche wachsen läfst, am Anfang und am Ende positiv ist; gedenkt man sich also eine krumme Linie, wovon x die Abscisse und ϕ die Ordinate ist, so wird diese krumme Linie ihre Axe schneiden, wenn $\lambda = 0$ ist; die Ordinaten werden dann positiv seyn und wachsen; wenn sie ihr Maximum erreicht haben, so werden sie abnehmen; die Curve wird ein zweytesmal ihre Axe in einem Punkt schneiden, welcher den Werth von λ, der dem Zustand des Gleichgewichts der flüssigen Masse entspricht, bestimmen wird; die Ordinaten werden hernach negativ werden, und da sie positiv sind, wenn $\lambda = \infty$ ist, so mufs die krumme Linie ihre Axe ein drittesmal schneiden; dies bestimmt einen zweyten Werth von λ, welcher dem

Gleichgewicht Genüge thut. Man sieht so, daſs es für denselben Werth von q oder für eine gegebene Umdrehungsbewegung verschiedene Figuren giebt, mit welchen das Gleichgewicht bestehen kann.

Wir bemerken, um die Anzahl dieser Figuren zu bestimmen, daſs man

$$d\Phi = \frac{6\lambda^2 . d\lambda . [q\lambda^4 + (10q - 6)\lambda^2 + 9q]}{(3\lambda^2 + 9)^2 \cdot (1 + \lambda^2)}$$

hat. Die Annahme $d\Phi = 0$ giebt

$$0 = q\lambda^4 + (10q - 6)\lambda^2 + 9q.$$

Hieraus erhält man, wenn man nur die positiven Werthe von λ betrachtet,

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{q} - 5 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{q} - 5\right)^2 - 9}}.$$

Diese Werthe von λ bestimmen die Maxima und Minima der Ordinaten Φ; es giebt also nur zwey solche Ordinaten auf der Seite der positiven Abscissen; dies erfordert, daſs die krumme Linie ihre Axe auf dieser Seite nur in drey Punkten schneide, den Anfangspunkt mit inbegriffen; es giebt daher nur zwey Figuren, welche dem Gleichgewicht Genüge thun.

Da die krumme Linie auf der Seite der negativen Abscissen genau dieselbe ist wie auf der Seite der positiven Abscissen, das Zeichen der Ordinaten ausgenommen; so schneidet sie ihre Axe auf beiden Seiten in einander entsprechenden Punkten, welche gleichweit vom Anfangspunkt der Koordinaten entfernt sind. Die negativen Werthe von λ, welche dem Gleichgewicht Genüge thun, sind also, bis aufs Zeichen, dieselben als die positiven Werthe; dies giebt dieselben elliptischen Figuren, weil das Quadrat von λ allein zur Bestimmung dieser Figuren dient; es ist folglich unnütz die krumme Linie auf der Seite der negativen Abscissen zu betrachten.

Setzt man q sehr klein, welches der Fall bey der Erde ist; so kann man der Gleichung (2) des 18ten Satzes in den zwey Hypothesen, daſs λ^2 sehr klein und daſs λ^2 sehr groſs ist, Genüge thun. In der erstern hat man nach dem vorhergehenden Satz

$$\lambda^2 = \frac{5}{2}.q + \frac{75}{14} \cdot q^2 + \text{etc.}$$

Wir bemerken, um den Werth von λ^2 in der zweyten Annahme zu erhalten, daſs alsdann Arc. tang λ sehr wenig von $\frac{1}{2}\pi$ verschieden ist, so daſs α, wenn

man $\lambda = \frac{\pi}{2} - \alpha$ setzt, ein sehr kleiner Winkel seyn wird, dessen Tangente $\frac{1}{\lambda}$ ist, man hat also

$$\alpha = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{3\lambda^3} + \frac{1}{5\lambda^5} - \text{etc.}$$

und folglich

$$\text{Arc. tang } \lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{3\lambda^3} - \frac{1}{5\lambda^5} + \text{etc.}$$

Die Gleichung (2) des 18ten Satzes verwandelt sich so in folgende

$$\frac{9\lambda + 2q \cdot \lambda^3}{9 + 3\lambda^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{5\lambda^3} - \text{etc.}$$

Hieraus erhält man durch die Umkehrung der Reihen

$$\lambda = \frac{3\pi}{4q} - \frac{8}{\pi} + \frac{4q}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{64}{3\pi^2}\right) + \text{etc.}$$

$$= 2,356195 \cdot \frac{1}{q} - 2,546479 - 1,478885 \cdot q + \text{etc.}$$

Man hat im vorhergehenden Satz gesehen, daſs für die Erde $q = 0,00344957$ ist; dieser Werth von q, in den vorhergehenden Ausdruck gesetz, giebt $\lambda = 680,49$. Das Verhältniſs der Axen des Aequators und des Pols, nämlich $\sqrt{1 + \lambda^2}$, ist für den Fall eines sehr abgeplatteten Sphäroids, gleich 680,49.

Der Werth von q hat eine Grenze, auſserhalb welcher das Gleichgewicht mit einer elliptischen Figur nicht möglich ist. Denn man nehme an, daſs die krumme Linie ihre Axe nur in ihrem Anfangspunkt schneide, und daſs sie dieselbe sonst überall nur berühre; so hat man für den Punkt des Contacts $\phi = 0$ und $d\phi = 0$; der Werth von ϕ wird also niemals negativ seyn auf der Seite der positiven Abscissen, welche wir hier allein betrachten. Der Werth von q, welchen die zwey Gleichungen $\phi = 0$ und $d\phi = 0$ bestimmen, wird die Grenze derjenigen Werthe seyn, mit welchen das Gleichgewicht bestehen kann, so daſs ein gröſserer Werth das Gleichgewicht unmöglich macht. Denn nimmt man an, daſs q um f zunimmt, so wird die Funktion ϕ um das Glied $\frac{2f \cdot \lambda^3}{9 + 3\lambda^2}$ vermehrt; da nun der Werth von ϕ, welcher q entspricht, niemals negativ wird, was auch immer λ sey, so ist auch dieselbe Funktion, welche

$q+f$ entspricht, beständig positiv und kann niemals Null werden, das Gleichgewicht ist also dann unmöglich. Es erhellet noch aus dieser Analysis, daſs es nur einen einzigen reellen und positiven Werth von q giebt, welcher den zwey Gleichungen $\phi = 0$ und $d\phi = 0$ Genüge thut. Diese Gleichungen geben die folgenden

$$q = \frac{6\,\lambda^2}{(1+\lambda^2)\,.\,(9+\lambda^2)}$$

$$0 = \frac{7\,\lambda^5 + 30\,\lambda^3 + 27\,\lambda}{(1+\lambda^2)\,(3+\lambda^2)\,(9+\lambda^2)} - \text{Arc}\,.\,\text{tang}\,\lambda.$$

Der Werth von λ, welcher der letztern Gleichung Genüge thut, ist $\lambda = 2,5292$; hieraus erhält man $q = 0,337007$; die Gröſse $\sqrt{1+\lambda^2}$, welche das Verhältniſs der Axe des Aequators zur Axe des Pols ausdrückt, ist in diesem Fall gleich 2,7197.

Für die Erde ist der Werth von q gleich 0,00344957. Dieser Werth entspricht der Dauer der Umdrehung von $0^{\text{tag}},99727$; man hat aber im Allgemeinen $q = \frac{g}{\frac{4}{3}\pi\varrho}$, so daſs q, für Massen, von einerley Dichtigkeit, der aus der Umdrehungsbewegung entstehenden Mittelpunktsfliehkraft g proportional und folglich im verkehrten Verhältniſs des Quadrats der Umdrehungszeit ist. Es folgt hieraus, daſs für eine Masse, welche eben so dicht als die Erde ist, die dem Werth $q = 0,337007$ zugehörende Umdrehungszeit gleich $0^{\text{tag}},10090$ ist. Hieraus flieſsen folgende zwey Lehrsätze.

„Jede flüssige gleichartige Masse, deren Dichte der mittlern Dichte der „Erde gleich ist, kann nicht, bey einer elliptischen Gestalt, im Gleichgewicht „seyn, wenn die Umdrehungszeit geringer als $0^{\text{tag}},10090$. Ist diese Zeit gröſser, „so giebt es immer zwey elliptische Figuren und nicht mehr, welche dem Gleich„gewicht Genüge thun."

„Ist die Dichte der flüssigen Masse von der der Erde verschieden, so er„hält man die Umdrehungszeit, bey welcher das Gleichgewicht mit einer ellipti„schen Figur nicht mehr bestehen kann, wenn man die Gröſse $0^{\text{tag}},10090$ in die „Quadratwurzel des Verhältnisses der mittlern Dichte der Erde zur Dichte der „flüssigen Masse, multiplicirt."

So würde für eine flüssige Masse, deren Dichte nur $\frac{1}{4}$ der Dichte der Erde wäre, welches ohngefähr bey der Sonne Statt findet, diese Zeit gleich

$0^{tag},20184$ seyn; und wäre die Dichte der Erde, wenn man dieselbe flüssig und gleichartig annimmt, ohngefähr $\frac{1}{98}$ ihrer wirklichen Dichte, so würde die Figur, welche sie annehmen müſste, um ihrer wirklichen Umdrehungsbewegung Genüge zu thun, die Grenze aller elliptischen Figuren seyn, mit welchen das Gleichgewicht bestehen kann. Da die Dichte Jupiters ohngefähr 5mal geringer ist, als die Dichte der Erde, und da die Dauer seiner Umwälzung $0^{tag},41377$ ist; so sieht man, daſs diese Dauer innerhalb der Grenze ist, welche das Gleichgewicht erfordert.

Man könnte glauben, daſs die Grenze von q diejenige ist, wo die Flüssigkeit wegen der zu schnellen Umdrehungsbewegung sich zu zerstreuen anfängt; man kann sich aber leicht vom Gegentheil versichern, wenn man bemerkt, daſs die Schwere unterm Aequator des Ellipsoids zur Schwere unterm Pol, nach dem 19ten Satz, im Verhältniſs der Axe des Pols zur Axe des Aequators ist, welches Verhältniſs in diesem Fall gleich $1:2,7197$ ist. Das Gleichgewicht hört also auf möglich zu seyn, weil es bey einer schnellern Umwälzungsbewegung unmöglich ist, der flüssigen Masse eine solche elliptische Gestalt zu geben, daſs die aus seiner Attraction und der Mittelpunktsfliehkraft zusammengesetzte Kraft, auf die Oberfläche senkrecht ist.

Wir haben bis hierher angenommen, daſs λ^2 positiv ist, welches Sphäroide giebt, die gegen den Pol abgeplattet sind; wir wollen nun untersuchen, ob das Gleichgewicht mit einer gegen die Pole ablangen Figur bestehen kann. Es sey alsdann $\lambda^2 = -\lambda'^2$, so muſs λ'^2 positiv und kleiner als die Einheit seyn, weil sonst das Ellipsoid sich in ein Hyperboloid verwandeln wird. Der vorhergehende Werth von $d\Phi$ giebt

$$\Phi = \int \frac{\lambda^2 . d\lambda . [q\lambda^4 + (10q - 6) . \lambda^2 + 9 . q]}{(1+\lambda^2) . (9 + 3\lambda^2)^2},$$

wo das Integral von $\lambda' = 0$ an genommen werden muſs. Substituirt man statt λ seinen Werth $\pm \lambda' \sqrt{-1}$, so erhält man

$$\Phi = \pm \sqrt{-1} . \int \frac{\lambda'^2 . d\lambda' . [q(1-\lambda'^2) . (9-\lambda'^2) + 6\lambda'^2]}{(1-\lambda'^2) . (9 - 3\lambda'^2)^2}.$$

Nun ist aber klar, daſs die Elemente des letztern Integrals sämmtlich dasselbe Zeichen haben von $\lambda'^2 = 0$ bis $\lambda'^2 = 1$; die Funktion Φ kann folglich niemals

in

in diesem Zwischenraum gleich Null werden, und das Gleichgewicht kann also nicht mit einer gegen die Pole ablangen Figur bestehen.

21. Ist die ursprüngliche Umwälzungsbewegung einer flüssigen Masse schneller als diejenige, welche der Grenze von q zugehört, so muſs man daraus nicht schlieſsen, daſs sie bey einer elliptischen Figur nicht im Gleichgewicht seyn kann; denn man begreift, daſs sie, indem sie sich immer mehr und mehr abplattet, eine immer geringere Umwälzungsgeschwindigkeit annehmen wird. Nimmt man also an, welches der Fall bey allen bekannten Flüssigen ist, daſs eine Kraft der Zähigkeit (force de ténacité) zwischen ihren Theilchen vorhanden ist, so wird diese Masse, nach einer groſsen Anzahl Schwenkungen, endlich eine Umwälzungsbewegung erlangen können, welche in den Grenzen des Gleichgewichts enthalten ist, und in diesem Zustand beharren kann. Diese Möglichkeit ist aber nur eine Uebersicht, deren Bestätigung interessant ist; es ist auch eben so interessant zu wissen, ob verschiedene Zustände des Gleichgewichts möglich sind. Wir haben zwar bewiesen, daſs für die nämliche Umdrehungsgeschwindigkeit zwey Zustände des Gleichgewichts möglich sind; hieraus folgt aber nicht, daſs zwey Zustände des Gleichgewichts für die nämliche ursprüngliche Kraft möglich sind; weil die beiden auf dieselbe Umdrehungsgeschwindigkeit sich beziehenden Zustände des Gleichgewichts zwey verschiedene, oder auf verschiedene Art angebrachte, ursprüngliche Kräfte erfordern.

Wir wollen daher eine flüssige Masse betrachten, auf welche ursprünglich irgend eine Anzahl Kräfte wirkten, und welche hernach sich selbst und der gegenseitigen Anziehung aller ihrer Theile überlassen wird. Gedenkt man sich durch den Schwerpunkt dieser als unbeweglich angenommenen Masse eine Ebene, in Beziehung auf welche die Summe der auf der Ebene von jedem Theilchen beschriebenen Winkelflächen, jede mit dem zugehörenden Theilchen multiplicirt, ein Gröſstes ist; so wird diese Ebene nach dem 21sten und 22sten Satz des ersten Buches beständig diese Eigenschaft haben, auf was für eine Art auch die Theilchen theils durch ihre Zähheit (ténacité), theils durch ihre gegenseitige Anziehung und ihren gegenseitigen Stoſs auf einander wirken, ja selbst in dem Fall, wenn die Bewegung plötzliche und in einer unendlich kleinen Zeit endliche Verminderungen erführe. Hat also die flüssige Masse nach einer groſsen Anzahl Schwenkungen eine gleichförmige Umdrehungsbewegung um eine unveränderliche Axe angenommen, so wird diese Axe auf die Ebene, wovon wir ge-

sprochen haben, senkrecht seyn; diese Ebene wird die Ebene des Aequators, und die Umdrehungsbewegung wird so beschaffen seyn, daſs die Summe der Winkelflächen, welche die auf diese Ebene projicirten Theilchen während des Augenblicks dt beschreiben, eben so groſs seyn wird, als beym Anfang der Bewegung; wir werden diese Summe mit $E.dt$ bezeichnen.

Wir bemerken hierbey daſs die Axe, wovon hier die Rede ist, diejenige ist, für welche die Summe der Momente der ursprünglichen Kräfte ein Gröſstes ist. Sie behält diese Eigenschaft während der Bewegung des Systems und wird endlich die Umdrehungsaxe. Denn das, was wir in den angeführten Sätzen des ersten Buchs von der Ebene bewiesen haben, für welche die Summe der projicirten Flächen ein Gröſstes ist, gilt auch von der Axe, für welche das Moment der Kräfte ein Gröſstes ist; weil die Elementarfläche, welche die Projection des Radius Vectors eines Körpers auf einer Ebene beschreibt, wenn sie mit der Masse des Körpers multiplicirt wird, offenbar dem Moment der endlichen Kraft dieses Körpers für die Axe, welche auf diese Ebene senkrecht ist, proportional ist.

Es sey, wie oben, g die Centrifugalkraft, welche aus der Umdrehungsbewegung in der Entfernung 1 von der Axe entsteht; so wird $\sqrt{g}$ die Winkelumdrehungsgeschwindigkeit seyn; man nenne ferner k die halbe Umdrehungsaxe der flüssigen Masse, und $k.\sqrt{1+\lambda^2}$ die halbe Axe seines Aequators. Man kann sich leicht versichern, daſs die Summe der während des Augenblicks dt von allen Theilchen beschriebenen Winkelflächen, jede auf die Ebene des Aequators projicirt und mit der Masse des zugehörenden Theilchens multiplicirt, gleich $\frac{4\pi\varrho}{15}.(1+\lambda^2)^2.k^5.dt.\sqrt{g}$ ist; man hat also

$$\frac{4\pi\varrho}{15}.(1+\lambda^2)^2.k^5.\sqrt{g}=E.$$

Nennt man hernach M die flüssige Masse, so hat man

$$\tfrac{4}{3}\pi.k^3.\varrho.(1+\lambda^2)=M.$$

Die Gröſse $\frac{g}{\frac{4}{3}\pi.\varrho}$, welche wir im 18ten Satz q genannt haben, verwandelt sich so in $q'.(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}$, wenn man durch q' die Funktion $\frac{25.E^2.(\frac{4}{3}\pi\varrho)^{\frac{1}{3}}}{M^{\frac{10}{3}}}$ bezeichnet. Die Gleichung desselben Satzes verwandelt sich in

$$0=\frac{9\lambda+2q'.\lambda^3.(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}}{9+3\lambda^2}-\text{Arc.tang}\,\lambda,$$

diese Gleichung wird λ bestimmen; man wird dann k vermittelst des vorhergehenden Ausdrucks von M erhalten.

Man nenne ϕ die Funktion

$$\frac{9\lambda - 2q' . \lambda^3 . (1 + \lambda^2)^{-\frac{2}{3}}}{9 + 3\lambda^2} - \text{Arc . tang}\,\lambda,$$

welche durch die Bedingung des Gleichgewichts gleich Null seyn mufs. Diese Funktion ist anfangs positiv, wenn λ sehr klein ist, und ist zu Ende negativ, wenn λ unendlich grofs ist; es giebt also zwischen $\lambda = 0$ und λ unendlich grofs, einen Werth von λ, der diese Funktion gleich Null macht und es giebt folglich immer, welchen Werth auch q' hat, eine elliptische Figur, bey welcher das Gleichgewicht der flüssigen Masse möglich ist.

Man kann dem Werth von ϕ folgende Integral-Form geben:

$$\phi = 2 . \int \frac{\lambda^4 . d\lambda . \left[\frac{27\,q'}{\lambda^2} + 18\,q' - [q'\lambda^2 + 18 . (1 + \lambda^2)^{\frac{2}{3}}]\right]}{(9 + 3\lambda^2)^2 . (1 + \lambda^2)^{\frac{5}{3}}}.$$

Wenn sie gleich Null wird, so ist die Funktion

$$\frac{27\,q'}{\lambda^2} + 18\,q' - [q'\lambda^2 + 18 . (1 + \lambda^2)^{\frac{2}{3}}]$$

schon durch Null gegangen und negativ geworden [28]. Sobald aber diese Funktion negativ zu werden anfängt, so fährt sie immer fort negativ zu seyn, so wie λ sich vermehrt, weil der positive Theil $\frac{27\,q'}{\lambda} + 18\,q'$ sich vermindert, während dafs der negative Theil $-[q'\lambda^2 + 18 . (1 + \lambda^2)^{\frac{2}{3}}]$ sich vermehrt; die Funktion ϕ kann also nicht zweymal Null werden. Es folgt hieraus, dafs es nur einen einzigen reellen und positiven Werth von λ giebt, welcher der Gleichung des Gleichgewichts Genüge thut, und die flüssige Masse kann also nur bey einer einzigen elliptischen Gestalt im Gleichgewicht seyn.

28) Man kann sich jedes Integral als die Summe aller unendlich kleinen Theile, deren allgemeiner Ausdruck das Differenzial ist, gedenken. Soll der Integralausdruck von φ Null werden, so mufs die Summe der positiven unendlich kleinen Theile von der Summe der darauf folgenden negativen Theile aufgehoben werden; diese unendlich kleinen Theilchen können aber nur dann negativ werden, wenn der Factor $\frac{27\,q'}{\lambda^2} + 18\,q' - [q'\lambda^2 + 18 . (1 + \lambda^2)^{\frac{2}{3}}]$ negativ ist; dieser Factor wird also früher gleich Null als das Integral φ.

Viertes Kapitel.

Von der Gestalt eines Sphäroids, welches sehr wenig von einer Kugel verschieden ist, und von einer Lage eines, im Gleichgewicht sich befindenden, Flüssigen bedeckt wird.

22. Wir haben im vorhergehenden Kapitel das Gleichgewicht einer flüssigen gleichartigen Masse betrachtet und wir haben gefunden, daſs die elliptische Gestalt diesem Gleichgewicht Genüge thut. Man muſste aber, um eine vollständige Auflösung dieser Aufgabe zu haben, alle mögliche Figuren des Gleichgewichts a priori bestimmen, oder sich versichern, daſs die elliptische Gestalt die einzige ist, welche diese Bedingungen erfüllt. Es ist überdies sehr wahrscheinlich, daſs die himmlischen Körper nicht gleichartige Massen sind, und daſs sie gegen den Mittelpunkt dichter als an der Oberfläche sind; man darf sich also bey der Untersuchung ihrer Gestalt, nicht auf den Fall der Gleichartigkeit einschränken; dann bietet aber diese Untersuchung groſse Schwierigkeiten dar. Sie vereinfacht sich glücklicherweise durch die Betrachtung des geringen Unterschieds, welcher zwischen der Kugelgestalt und der Gestalt der Planeten und Satelliten vorhanden ist, wodurch es erlaubt ist, die Quadrate dieses Unterschiedes und die davon abhängenden Gröſsen zu vernachläſsigen. Die Untersuchung der Gestalt der Planeten ist aber dennoch, ohngeachtet dieser Vereinfachungen, noch sehr verwickelt. Wir wollen, um sie mit gröſserer Allgemeinheit abzuhandeln, das Gleichgewicht einer flüssigen Masse betrachten, welche einen Körper bedeckt, der aus Lagen von veränderlicher Dichte besteht, eine Umdrehungsbewegung hat und den Anziehungen fremder Körper ausgesetzt ist. Wir werden hierzu die Gesetze des Gleichgewichts, welche wir im ersten Buch bewiesen haben, ins Gedächtniſs zurückrufen.

Nennt man ϱ die Dichte eines flüssigen Theilchens, Π den Druck welchen es erfährt; F, F', F'' etc. die Kräfte, welche darauf wirken; df, df', df'' etc. die Elemente der Richtungen dieser Kräfte; so wird die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts der flüssigen Masse nach dem 17ten Satz des ersten Buchs folgende seyn:

$$\frac{d\Pi}{\varrho} = F \,.\, df + F' \,.\, df' + F'' \,.\, df'' + \text{etc.}$$

Man nehme an, dass der zweyte Theil dieser Gleichung ein vollständiges Differenzial ist, und man bezeichne es mit $d\phi$; so wird ϱ nothwendig eine Funktion von Π und von ϕ seyn. Das Integral dieser Gleichung wird ϕ durch eine Funktion von Π geben; man wird folglich ϱ so verwandeln können, dass es nur eine Funktion von Π ist, woraus man Π durch eine Funktion von ϱ erhalten wird; man erhält also für Lagen von einer beständigen Dichte $d\Pi = 0$ und folglich

$$0 = F \,.\, df + F' \,.\, df' + F'' \,.\, df'' + \text{etc.}$$

welche Gleichung anzeigt, dass die Tangentialkraft an der Oberfläche dieser Lagen gleich Null ist, und dass folglich die Zusammengesetzte aller Kräfte F, F', F'' etc. auf diese Oberfläche senkrecht ist; so dass diese Lagen zugleich horizontale Lagen (Couches de niveau) sind.

Ist der Druck Π an der äussern Oberfläche gleich Null, so muss ϱ daselbst beständig und die Zusammengesetzte aller Kräfte, welche auf jedes Theilchen der Fläche wirken, muss darauf senkrecht seyn. Man nennt diese Zusammengesetzte die Schwere. Die Bedingungen des Gleichgewichts einer flüssigen Masse sind also erstens, dass die Richtung der Schwere auf jeden Punkt der äussern Oberfläche senkrecht ist; zweytens, dass die Richtungen der Schwere jedes Theilchens im Innern der Masse senkrecht auf die Oberfläche der Lagen sind, welche eine beständige Dichte haben. Da man im Innern einer gleichartigen Masse jede Lage, welche man will, für eine Lage von beständiger Dichte annehmen kann; so geschieht der zweyten der beiden vorhergehenden Bedingungen des Gleichgewichts immer Genüge und es ist zum Gleichgewicht hinreichend, dass die erste erfüllt wird, nämlich, dass die Zusammengesetzte aller Kräfte, welche auf jedes Theilchen der äussern Oberfläche wirken, auf diese Fläche senkrecht ist.

23. Die Kräfte F, F', F'' etc. entstehen in der Theorie der Figur der himm-

lischen Körper, aus der Anziehung ihrer Theilchen, aus der Mittelpunktsfliehkraft, welche die Umdrehungsbewegung hervorbringt, und aus der Anziehung äußserer Körper. Man kann sich leicht versichern, daſs das Differenzial $F.df + F'.df' +$ etc. dann vollständig ist; man wird dieses aber deutlich durch die Analysis sehen, welche wir von diesen verschiedenen Kräften und zwar so geben werden, daſs wir den Theil des Integrals $\int.(F.df + F'.df' +$ etc.), welche jeder Kraft zugehört, bestimmen werden.

Nennt man dM irgend ein Theilchen des Sphäroids und f seine Entfernung vom angezogenen Theilchen, so wird seine Wirkung auf dies letztere gleich $\frac{dM}{f^2}$ seyn. Multiplicirt man diese Wirkung mit dem Element seiner Richtung, welches $-df$ ist, weil sie f zu vermindern strebt; so erhält man in Beziehung auf das Theilchen dM, $\int F.df = \frac{dM}{f}$. Es folgt hieraus daſs der Theil des Integrals $\int(F.df + F'.df' +$ etc.), welcher von der Anziehung der Theilchen des Sphäroids abhängt, der Summe aller dieser Theilchen, jedes durch seinen Abstand vom angezogenen Punkt dividirt, gleich ist. Wir werden diese Summe durch V bezeichnen, wie wir vorher gethan haben.

Man will in der Theorie der Figur der Planeten, die Gesetze des *Gleichgewichts* aller ihrer Theile um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt bestimmen; man muſs also alle Kräfte, welche auf den Schwerpunkt vermöge der gegenseitigen Wirkung aller Theile des Sphäroids wirken, in entgegengesetzter Richtung an das angezogene Theilchen anbringen. Man hat aber im 20sten Satz des ersten Buchs gesehen, daſs durch die Eigenschaft des Schwerpunkts die Zusammengesetzte aller dieser Wirkungen auf diesen Punkt gleich Null ist; man darf also nichts zu V hinzusetzen, um die Totalwirkung der Anziehung des Sphäroids auf das angezogene Theilchen zu erhalten.

Wir werden zur Bestimmung der Wirkung der Mittelpunktsfliehkraft annehmen, daſs die Lage des Theilchens durch drey rechtwinklichte Koordinaten x', y', z' bestimmt ist, deren Anfangspunkt wir im Schwerpunkt des Sphäroids setzen werden. Wir werden ferner annehmen, daſs die Axe der x' die Umdrehungsaxe ist und das g die Mittelpunktsfliehkraft ausdrückt, welche aus der Umdrehungsgeschwindigkeit in der Entfernung 1 von der Axe entsteht. Diese Kraft wird gleich Null in der Richtung der x' und gleich gy' und gz' in der

Richtung der y' und der z' seyn. Multiplicirt man also die beiden letztern Kräfte respective mit den Elementen dy', und dz' ihrer Richtungen, so erhält man $\frac{1}{2}g.(y'^2 + z'^2)$ für den Theil des Integrals $\int(F.df + F'.df' + \text{etc.})$, welcher aus der Mittelpunktsfliehkraft der Umdrehungsbewegung entsteht.

Nennt man, wie oben, r den Abstand des angezogenen Theilchens vom Schwerpunkt des Sphäroids; θ den Winkel, welchen der Halbmesser r mit der Axe der x' macht; und ϖ den Winkel, welchen die durch die Axe der x' und durch dieses Theilchen gehende Ebene mit der Ebene der x' und der y' macht; setzt man endlich $\cos\theta = \mu$, so erhält man

$$x' = r.\mu; \qquad y' = r.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi; \qquad z' = r.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi,$$

und hieraus

$$\tfrac{1}{2}g.(y'^2 + z'^2) = \tfrac{1}{2}g.r^2.(1-\mu^2).$$

Wir werden der letztern Gröſse folgende Form geben

$$\tfrac{1}{3}gr^2 - \tfrac{1}{2}gr^2.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

um ihre Glieder dem Ausdruck von V ähnlich zu machen, welchen wir im zweyten Kapitel gegeben haben, das heiſst, um ihnen die Eigenschaft zu geben, folgender partiellen Differenzialgleichung Genüge zu thun

$$o = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2Y^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1)Y^{(i)}$$

wo $Y^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ, von $\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi$ und $\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi$ und zwar von der Ordnung i ist; denn es ist klar, daſs jedes der zwey Glieder $\frac{1}{3}gr^2$ und $-\frac{1}{2}gr^2(\mu^2 - \frac{1}{3})$, statt $Y^{(i)}$ der vorhergehenden Gleichung Genüge thut.

Wir haben nur noch den Theil des Integrals $\int.(F.df + F'.df' + \text{etc.})$ zu bestimmen, welcher aus der Wirkung fremder Körper entsteht. Es sey S die Masse eines dieser Körper, f seine Entfernung vom angezogenen Theilchen, und s seine Entfernung vom Schwerpunkt des Sphäroids. Multiplicirt man seine Wirkung durch das Element $-df$ seiner Richtung und integrirt man hernach, so erhält man $\frac{S}{f}$. Dies ist aber nicht der ganze Theil des Integrals $\int(F.df + F'.df' + \text{etc.})$, welcher aus der Wirkung von S entspringt; man muſs noch die Wirkung dieses Körpers auf den Schwerpunkt des Sphäroids in

entgegengesetzter Richtung an das Theilchen anbringen. Man nenne hierzu v den Winkel, welchen s mit der Axe der x' macht, und ψ den Winkel, welchen die durch dieses Gestirn und durch den Körper S gehende Ebene mit der Ebene der x' und der y' macht, so wird die Wirkung $\frac{S}{s^2}$ dieses Körpers auf den Schwerpunkt des Sphäroids, folgende drey Kräfte, parallel mit den Axen der x', der y' und der z', hervorbringen:

$$\frac{S}{s^2} \cdot \cos v; \qquad \frac{S}{s^2} \cdot \sin v \cdot \cos \psi; \qquad \frac{S}{s^2} \cdot \sin v \cdot \sin \psi.$$

Bringt man sie in entgegengesetzter Richtung an das angezogene Theilchen an, welches dadurch geschieht, daſs man ihnen das Zeichen — giebt, und daſs man sie hernach mit den Elementen dx', dy', dz' ihrer Richtungen multiplicirt und integrirt; so wird die Summe dieser Integrale gleich

$$-\frac{S}{s^2} \cdot (x' \cdot \cos v + y' \cdot \sin v \cdot \cos \psi + z' \cdot \sin v \cdot \sin \psi) + \text{Beständige Gröſse}$$

seyn. Der ganze Theil des Integrals $\int (F \cdot df + F' \cdot df' + \text{etc.})$, welcher aus der Wirkung des Körpers S entspringt, ist also

$$\frac{S}{f} - \frac{S}{s^2} \cdot (x' \cdot \cos v + y' \cdot \sin v \cdot \cos \psi + z' \cdot \sin v \cdot \sin \psi) + \text{Best. Gröſse},$$

und da diese Gröſse für den Schwerpunkt des Sphäroids gleich Null seyn muſs, welchen wir als unbeweglich annehmen, und für welchen f gleich s und x', y', z' gleich Null sind; so hat man

$$\text{Beständige Gröſse} = -\frac{S}{s}.$$

Nun ist f gleich

$$[(s \cdot \cos v - x')^2 + (s \cdot \sin v \cdot \cos \psi - y')^2 + (s \cdot \sin v \cdot \sin \psi - z')^2]^{\frac{1}{2}},$$

dies giebt, wenn man statt x', y', z' ihre vorhergehenden Werthe substituirt,

$$\frac{S}{f} = \frac{S}{\sqrt{s^2 - 2sr \cdot [\cos v \cdot \cos \theta + \sin v \cdot \sin \theta \cdot \cos(\varpi - \psi)] + r^2}}.$$

Entwickelt man diese Funktion in eine nach den Potenzen von S steigende Reihe, und stellt man diese Reihe auf folgende Art vor

$$\frac{S}{s} \cdot \left[P^{(0)} + \frac{r}{s} \cdot P^{(1)} + \frac{r^2}{s^2} \cdot P^{(2)} + \frac{r^3}{s^3} \cdot P^{(3)} + \text{etc.}\right]$$

so hat man im allgemeinen nach dem 15ten und 17ten Satz [29])

$$P^{(i)} = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots\ldots i} \cdot \left[\delta^i - \frac{i.(i-1)}{2.(2i-1)} \cdot \delta^{i-2} + \frac{i.(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4.(2i-1)(2i-3)} \cdot \delta^{i-4} - \text{etc.}\right],$$

wo δ gleich $\cos\nu \,.\, \cos\theta + \sin\nu \,.\, \sin\theta \,.\, \cos(\varpi - \psi)$ ist; es ist überdies aus dem 9ten Satz klar, daſs man

29) Bezeichnet man nach Hrn. Professor Hindenburgs Art den iten, $(i-1)$ten, $(i-2)$ten . . . Binomialkoeffizienten der Potenz $-\frac{1}{2}$ durch $\mathfrak{J}$, $\overset{-1}{\mathfrak{J}}$, $\overset{-2}{\mathfrak{J}}$. . ., so ist

$$P^{(i)} = \pm \mathfrak{J}\delta^i \pm \frac{i-1}{2} \cdot \overset{-1}{\mathfrak{J}}\delta^{i-2} \pm \frac{(i-2).(i-3)}{2 \;.\; 4} \cdot \overset{-2}{\mathfrak{J}}\delta^{i-4} \pm \ldots \;(1).$$

Man kann diesen Werth leicht so beweisen, daſs man zeigt, daſs er für $P^{(i+1)}$ gilt, wenn er für die zwey vorhergehenden $P^{(i)}$ und $P^{(i-1)}$ gilt. Man nehme nämlich die Differenziale der Logarithmen von $\left[1 - 2\delta \,.\, \frac{r}{s} + \left(\frac{r}{s}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ und von seinem Werthe $P^{(0)} + P^{(1)} \cdot \left(\frac{r}{s}\right) + P^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^2 + \ldots + P^{(i)} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^i + \ldots$, so findet man, wenn man kreuzweise multiplicirt und die Koeffizienten von $\left(\frac{r}{s}\right)^i$ in beiden Producten einander gleich setzt:

$$P^{(i+1)} = -\frac{2i+1}{i+1} \cdot \delta \cdot P^{(i)} + \frac{i}{i+1} \cdot P^{(i-1)} \ldots \;(2).$$

Man findet nun vermittelst der Gleichung (1),

$$P^{(i-1)} = \mp \overset{-1}{\mathfrak{J}}\delta^{i-1} \mp \frac{i-2}{2} \cdot \overset{-2}{\mathfrak{J}}\delta^{i-3} \mp \frac{(i-3).(i-4)}{2 \;.\; 4} \cdot \overset{-3}{\mathfrak{J}}\delta^{i-5} \mp \ldots \;(3).$$

Substituirt man die in (1) und (3) gegebenen Werthe in die Gleichung (2), so findet man

$$-\frac{2i+1}{i+1} \cdot \delta \cdot P^{(i)} = \mp \frac{2i+1}{i+1} \cdot \mathfrak{J}.\delta^{i+1} \mp \frac{2i+1}{i+1} \cdot \frac{i-2}{2} \cdot \overset{-1}{\mathfrak{J}}\delta^{i-1} \mp \frac{(2i+1).(i-2).(i-3)}{i+1 \,.\, 2 \,.\, 4} \cdot \overset{-2}{\mathfrak{J}}.\delta^{i-3} \mp \ldots$$

$$+\frac{i}{i+1} \cdot P^{(i-1)} = \qquad \mp \frac{i}{i+1} \cdot \overset{-1}{\mathfrak{J}}\delta^{i-1} \mp \frac{i}{i+1} \cdot \frac{i-2}{2} \cdot \overset{-2}{\mathfrak{J}}.\delta^{i-3} \mp \ldots$$

Nun ist $\frac{2i+1}{i+1} \cdot \mathfrak{J} = \overset{+1}{\mathfrak{J}}$; ferner $\frac{(2i+1).(i-1)+2i}{2(i+1)} \overset{-1}{\mathfrak{J}} = \frac{2i-1}{2} \overset{-1}{\mathfrak{J}} = \frac{i}{2} \mathfrak{J}$; endlich

$$\frac{(i-2)}{2.4.(i+1)} [(2i+1).(i-3)+4i] \overset{-2}{\mathfrak{J}} = \frac{i-2}{2.4} [2i-3] \cdot \overset{-2}{\mathfrak{J}} = \frac{(i-2).(i-1)}{2 \;.\; 4} \cdot \frac{2i-3}{i-1} \cdot \overset{-2}{\mathfrak{J}} = \frac{(i-2).(i-1)}{2 \;.\; 4} \cdot \overset{-1}{\mathfrak{J}};$$

substituirt man diese Werthe in die Summe der beiden vorhergehenden Reihen, so erhält man

$$P^{(i+1)} = \mp \overset{+1}{\mathfrak{J}} \cdot \delta^{i+1} \mp \frac{i}{2} \cdot \mathfrak{J} \cdot \delta^{i-1} \mp \frac{(i-1).(i-2)}{2 \;.\; 4} \cdot \overset{-1}{\mathfrak{J}} \cdot \delta^{i-3} \mp \ldots$$

Dieser Werth von $P^{(i+1)}$ beobachtet das in (1) angenommene Gesetz. Man kann nun leicht $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ vermittelst des Binomischen Lehrsatzes finden; und da beide das in (1) gefundene Gesetz beobachten, so ist dies Gesetz allgemein gültig.

$$0 = \left\{ \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dP^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2P^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).P^{(i)}$$

hat, so daſs die Glieder der vorhergehenden Reihe diese Eigenschaft mit den Gliedern von V gemein haben. Dies festgesetzt, hat man

$$\frac{S}{f} - \frac{S}{s} - \frac{S}{s^2}(x'.\cos v + y'.\sin v.\cos\psi + z'.\sin v.\sin\psi)$$

$$= \frac{S.r^2}{s^3}\left[P^{(2)} + \frac{r}{s}.P^{(3)} + \frac{r^2}{s^2}.P^{(4)} + \text{etc.}\right].$$

Giebt es noch andere Körper S', S'' etc., so bezeichne man durch s', v', ψ', $P'^{(i)}$, s'', v'', ψ'', $P''^{(i)}$ etc., das, was wir für den Körper S mit s, v, ψ, $P^{(i)}$ bezeichnet haben; man erhält dann die Theile des Integrals $\int(F.df + F'.df' + \text{etc.})$, welche aus ihrer Wirkung entspringen, wenn man im vorhergehenden Ausdruck des Theils dieses Integrals, welcher aus der Wirkung von S entspringt, die Buchstaben s, v, ψ und P, mit einem Strich, mit zwey Strichen u. s. w. bezeichnet.

Vereinigt man nun alle Theile dieses Integrals, und setzt man

$$\frac{g}{3} = \alpha.Z^{(0)};$$

$$\frac{S}{s^3}.P^{(2)} + \frac{S'}{s'^3}.P'^{(2)} + \ldots - \frac{g}{2}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) = \alpha.Z^{(2)};$$

$$\frac{S}{s^4}.P^{(3)} + \frac{S'}{s'^4}.P'^{(3)} + \ldots\ldots\ldots = \alpha.Z^{(3)};$$

etc.

wo α ein sehr kleiner Koeffizient ist, weil die Bedingung, daſs das Sphäroid sehr wenig von der Kugel verschieden ist, erfordert, daſs die Kräfte, welche eine Abweichung von dieser Gestalt hervorbringen, sehr klein sind; so erhält man

$$\int(F.df + F'.df' + \text{etc.}) = V + \alpha r^2.[Z^{(0)} + Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + r^2.Z^{(4)} + \text{etc.}],$$

wo $Z^{(i)}$ für jeden Werth von i der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thut:

$$0 = \left\{ \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dZ^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2Z^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).Z^{(i)}.$$

Die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts wird also folgende seyn:

$$\int \frac{d\Pi}{\varrho} = V + ar^2 \, . \, [Z^{(0)} + Z^{(2)} + r \, . \, Z^{(3)} + r^2 \, . \, Z^{(4)} + \text{etc.}]; \quad (1).$$

Sind die fremden Körper vom Sphäroid sehr entfernt, so kann man die Gröſsen $r^3 Z^{(3)}$, $r^4 Z^{(4)}$ etc., vernachläſsigen, weil die verschiedenen Glieder dieser Gröſsen respective durch $s^4, s^5, \ldots s'^4, s'^5 \ldots$ dividirt und also sehr klein werden, wenn s, s' etc. in Vergleichung mit r sehr groſs sind. Dieser Fall hat für die Planeten und Satelliten Statt, Saturn ausgenommen, dessen Ring zu nahe bey seiner Oberfläche ist, so daſs man auf die vorhergehenden Glieder Rücksicht nehmen muſs. Man muſs daher in der Theorie der Figur dieses Planeten den zweyten Theil der Gleichung (1) weiter fortsetzen, welche den Vortheil hat, eine immer convergirende Reihe zu bilden; und da alsdann die Anzahl der Theilchen auſserhalb des Sphäroids unendlich groſs ist, so sind die Werthe von $Z^{(0)}$, $Z^{(2)}$ etc. durch bestimmte Integrale gegeben, welche von der Figur und der innern Beschaffenheit des Saturnsrings abhängen.

24. Das Sphäroid kann ganz flüssig seyn, oder einen festen Kern haben, der von einem Fluidum bedeckt wird. In beiden Fällen wird die Gleichung (1) des vorhergehenden Satzes die Gestalt der Lagen des flüssigen Theils bestimmen, wenn man betrachtet, daſs der zweyte Theil dieser Gleichung an der äuſsern Oberfläche, und an der aller Horizontallagen beständig seyn muſs, und nur von einer Lage zur andern sich ändern kann, wenn Π eine Funktion von ϱ ist.

Die beiden vorhergehenden Fälle werden auf einen einzigen zurückgebracht, wenn das Sphäroid gleichartig ist; denn es ist in Rücksicht auf das Gleichgewicht gleichgültig, ob es gänzlich flüssig ist, oder ob es einen festen Kern enthält. Es ist nach dem 12ten Satz hinreichend, daſs man an der äuſsern Oberfläche

$$\text{Beständige Gröſse} = V + ar^2 \, . \, [Z^{(0)} + Z^{(2)} + r . Z^{(3)} + r^2 . Z^{(4)} + \text{etc.}]$$

hat. Setzt man in diese Gleichung statt V seinen, durch die Formel (3) des 11ten Satzes gegebenen, Werth und bemerkt man, daſs nach dem 12ten Satz $Y^{(0)}$ verschwindet, wenn man für a den Halbmesser einer Kugel, von gleichem Inhalt mit dem Sphäroid, nimmt, und daſs $Y^{(1)}$ gleich Null ist, wenn man den Anfangspunkt der Koordinaten im Schwerpunkt des Sphäroids setzt; so erhält man:

$$\text{Best. Gr.} = \frac{4\pi . a^3}{3r} + \frac{4\pi . \alpha a^5}{r^3} . \left[\tfrac{1}{5} Y^{(2)} + \frac{a}{7r} . Y^{(3)} + \frac{a^2}{9r^2} . Y^{(4)} + \text{etc.}\right]$$
$$+ \alpha r^2 . [Z^{(0)} + Z^{(2)} + r . Z^{(3)} + r^2 . Z^{(4)} + \text{etc.}].$$

Dies ist die Gleichung für die Oberfläche des Sphäroids, wenn man in ihr statt r seinen Werth an der Oberfläche, $1 + \alpha y$, setzt, oder

$$a + \alpha a . [Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \text{etc.}];$$

dies giebt [30])

$$\text{Best. Gr.} = \frac{4\pi}{3} a^2 - \frac{8\alpha\pi . a^2}{3} . \left[\frac{1}{5} Y^{(2)} + \frac{2}{7} Y^{(3)} + \frac{3}{9} Y^{(4)} + \text{etc.}\right]$$
$$+ \alpha a^2 . [Z^{(0)} + Z^{(2)} + a . Z^{(3)} + a^2 . Z^{(4)} + \text{etc.}].$$

Man wird die beständige Gröſse des ersten Theils dieser Gleichung durch folgende Gleichung bestimmen:

$$\text{Beständige Gröſse} = \tfrac{4}{3}\pi . a^2 + \alpha a^2 . Z^{(0)}.$$

Vergleicht man ferner die ähnlichen Funktionen, das heiſst, diejenigen, welche derselben partiellen Differenzialgleichung Genüge thun, so erhält man

$$Y^{(i)} = \frac{3(2i+1)}{8(i-1).\pi} . a^{i-2} . Z^{(i)},$$

wenn i gröſser als die Einheit ist. Man kann der vorhergehenden Gleichung folgende Form geben:

$$Y^{(i)} = \frac{3}{4\pi} . a^{i-2} . Z^{(i)} + \frac{9}{8a\pi} . \int r^{i-2}\, dr . Z^{(i)},$$

wo das Integral von $r = 0$ bis $r = a$ zu nehmen ist. Der Radius der Oberfläche des Sphäroids, nämlich $a(1 - \alpha y)$, verwandelt sich so in

$$a(1 + \alpha y) = a . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{3\alpha}{4\pi} . [Z^{(2)} + a . Z^{(3)} + a^2 . Z^{(4)} + \text{etc.}] \\ + \dfrac{9\alpha}{8a\pi} . \int dr . [Z^{(2)} + r . Z^{(3)} + r^2 . Z^{(4)} + \text{etc.}] \end{array} \right\}; \quad (2).$$

30) Vernachlässigt man die Quadrate von α, so ist $\frac{1}{r} = a^{-1} - \alpha a^{-1} . \left[Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \ldots\right]$; folglich $\frac{4\pi a^3}{3r} = \frac{4\pi a^2}{3} - \frac{4}{3}\pi a^2 . \alpha . \left[Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \ldots\right]$. In den übrigen Gliedern der vorhergehenden Gleichung kann man sogleich a statt r setzen, weil sie schon in α multiplicirt sind, so daſs der in α multiplicirte Theil von r nur Glieder von der Ordnung α^2 hervorbringen kann.

Man kann dieser Gleichung eine endliche Form geben, wenn man betrachtet, dafs man nach dem vorhergehenden Satz

$$\alpha\,[Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + r^2.Z^{(4)} + \text{etc.}] = -\frac{g}{2}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}) - \frac{S}{sr^2} - \frac{S.\delta}{s^2 r}$$
$$+ \frac{S}{r^2.\sqrt{s^2 - 2sr.\delta + r^2}} - \frac{S'}{s'.r^2} - \text{etc.}$$

hat, so dafs das Integral $\int dr.[Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + \text{etc.}]$ leicht durch die bekannten Methoden bestimmt werden kann.

25. Die Gleichung (1) des 23sten Satzes hat nicht nur den Vortheil, die Figur des Sphäroids zu erkennen zu geben, sondern sie hat auch noch den Vortheil, das Gesetz der Schwere an seiner Oberfläche durch Differenziiren zu erkennen zu geben. Denn es ist klar, dafs man die zusammengesetzte Kraft, welche parallel mit dem Radius vector wirkt, erhält, wenn man den zweyten Theil dieser Gleichung in Beziehung auf r differenziirt, weil dieser zweyte Theil die Summe aller Kräfte ist, die auf jedes Theilchen wirken, jede Kraft durch das Element ihrer Richtung multiplicirt. Nennt man also p die Kraft, womit ein Theilchen der Oberfläche gegen den Schwerpunkt des Sphäroids angezogen wird, so erhält man

$$p = -\left(\frac{dV}{dr}\right) - \frac{\alpha}{dr}.d.[r^2 Z^{(0)} + r^2 Z^{(2)} + r^3 Z^{(3)} + r^4 Z^{(4)} + \text{etc.}].$$

Setzt man in diese Gleichung statt $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$ seinen Werth an der Oberfläche $\frac{2}{3}\pi a + \frac{V}{2a}$, welchen die Gleichung (2) des 10ten Satzes giebt, und setzt man statt V seinen durch die Gleichung (1) des 23sten Satzes gegebenen Werth, so erhält man:

$$p = \tfrac{4}{3}\pi a - \tfrac{1}{2}\alpha a.[Z^{(2)} + a.Z^{(3)} + a^2.Z^{(4)} + \text{etc.}]$$
$$- \frac{\alpha}{dr}.d.[r^2.Z^{(0)} + r^2.Z^{(2)} + r^3.Z^{(3)} + r^4.Z^{(4)} + \text{etc.}]; \quad (3)$$

wo r im zweyten Theil dieser Gleichung, welcher nach dem vorhergehenden Satz immer in eine endliche Funktion verwandelt werden kann, nach den Differenziationen in a verwandelt werden mufs.

p drückt nicht genau die Schwere, sondern nur den Theil dieser Kraft aus, welcher nach dem Schwerpunkt des Sphäroids gerichtet ist, wenn man sie

in zwey Kräfte zerlegt gedenkt, wovon die eine auf den Radius r senkrecht, und die andere, nämlich p, nach diesem Halbmesser gerichtet ist. Die erstere dieser beiden Kräfte ist offenbar sehr klein und von der Ordnung α; bezeichnet man sie daher durch $\alpha\gamma$, so wird die Schwere gleich $\sqrt{p^2 + \alpha^2\gamma^2}$ seyn, welche Gröſse sich in p verwandelt, wenn man die Gröſsen von der Ordnung α^2 vernachlässigt. Wir können daher p als den Ausdruck der Schwere an der Oberfläche des Sphäroids betrachten, so daſs die Gleichungen (2) und (3) dieses und des vorhergehenden Satzes die Gestalt gleichartiger Sphäroide, die im Gleichgewicht sind, und das Gesetz der Schwere an ihrer Oberfläche bestimmen, und also die vollständige Theorie des Gleichgewichts dieser Sphäroide enthalten, von welchen man annimmt, daſs sie sehr wenig von der Kugel unterschieden sind.

Sind die fremden Körper S, S' etc. gleich Null, und ist also das Sphäroid nur der Anziehung seiner Theilchen und der aus seiner Umdrehungsbewegung entstehenden Mittelpunktsfliehkraft unterworfen, welches der Fall für die Erde und die Hauptplaneten, Saturn ausgenommen, ist, wenn man bloſs auf den bleibenden Zustand ihrer Figur Rücksicht nimmt; bezeichnet man dann durch $\alpha\phi$ das Verhältniſs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator, welches Verhältniſs sehr nahe gleich $\frac{g}{\frac{4}{3}\pi}$ ist, und nimmt man die Dichte des Sphäroids zur Einheit an; so findet man:

$$a(1 + \alpha y) = a \, . \left[1 - \frac{5\alpha\phi}{4} \, . \, (\mu^2 - \tfrac{1}{3})\right];$$

$$p = \tfrac{4}{3}\pi a \, . \left[1 - \tfrac{2}{3}\alpha\phi + \frac{5\alpha\phi}{4} \, . \, (\mu^2 - \tfrac{1}{3})\right].$$

Das Sphäroid ist also ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid, auf welchem die Vermehrungen der Schwere und die Verminderungen der Halbmesser, wenn man vom Aequator zu den Polen geht, sehr nahe dem Quadrat des Sinus der Breite proportional sind, weil μ bis auf Gröſsen von der Ordnung α diesem Sinus gleich ist.

a ist nach dem vorhergehenden der Halbmesser einer Kugel, welche an körperlichem Inhalt dem Sphäroid gleich ist; die Schwere an der Oberfläche dieser Kugel würde $\frac{4}{3}\pi a$ seyn; man erhält also den Punkt der Oberfläche des

Sphäroids, wo die Schwere eben so groſs ist, als auf der Oberfläche der Kugel, wenn man μ durch folgende Gleichung bestimmt:

$$0 = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{4} \cdot (\mu^2 - \tfrac{1}{3});$$

sie giebt $\mu = \sqrt{\frac{13}{15}}$.

26. Die vorhergehende Analysis hat uns auf die Gestalt einer flüssigen gleichartigen Masse, welche sich im Gleichgewicht befindet, geführt, ohne irgend eine andere Voraussetzung zu brauchen, als daſs sie sehr wenig von der Kugel verschieden ist: sie zeigt, daſs die elliptische Gestalt, welche nach dem vorhergehenden Kapitel diesem Gleichgewicht Genüge thut, alsdann allein ihm Genüge thun kann. Da aber die Verwandlung des Halbmessers des Sphäroids in eine Reihe von der Form $a\ (1 + \alpha Y^{(0)} + \alpha Y^{(1)} + \text{etc.})$ einige Schwierigkeiten erregen kann, so wollen wir directe und unabhängig von dieser Verwandlung beweisen, daſs die elliptische Gestalt die einzige Figur des Gleichgewichts einer flüssigen Masse ist, welche gleichartig ist, und eine Umdrehungsbewegung hat. Dies wird die Resultate der vorhergehenden Analysis bestätigen, und zugleich dazu dienen, die Zweifel zu zerstreuen, welche man gegen die Allgemeinheit dieser Analysis erheben könnte.

Man nehme Anfangs an, daſs das Sphäroid ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid, und daſs sein Halbmesser $a.(1 + \alpha y)$ ist, wo y eine Funktion von μ oder von dem Kosinus des Winkels θ ist, welchen dieser Halbmesser mit der Umdrehungsaxe macht. Nennt man nun f irgend eine gerade Linie, welche vom Ende dieses Halbmessers im Innern des Sphäroids gezogen worden ist, und p die Ergänzung des Winkels, den diese gerade Linie mit der Ebene macht, welche durch den Halbmesser $a.(1 + \alpha y)$ und durch die Umdrehungsaxe geht; ferner q den Winkel, welchen die Projection von f auf diese Ebene mit dem Halbmesser macht; endlich V die Summe aller Theilchen des Sphäroids, jedes durch seinen Abstand von dem Theilchen dividirt, welches sich am Ende des Halbmessers $a.(1 + \alpha y)$ befindet, wo jedes Theilchen gleich $f^2 . df . dp . dq . \sin p$ ist; so erhält man

$$V = \tfrac{1}{2} \int . f'^2 . dp . dq . \sin p,$$

wo f' der Werth ist, welchen f beym Austritt aus dem Sphäroid hat. Man muſs nun f' durch eine Funktion von p und von q bestimmen.

Man nenne θ' den Werth von θ an dem Punkt des Austritts, und $a.(1+\alpha y')$ den entsprechenden Halbmesser des Sphäroids, wo y' eine ähnliche Funktion von $\cos\theta'$ oder μ', wie y von μ ist; so kann man leicht sehen, daſs der Kosinus des Winkels, welchen die zwey geraden Linien f' und $a.(1+\alpha y)$ einschlieſsen, gleich $\sin p.\cos q$ ist, und daſs man also im Dreyeck, welches die drey Seiten f', $a.(1+\alpha y)$ und $a.(1+\alpha y')$ bilden,

$$a^2.(1+\alpha y')^2 = f'^2 - 2af'.(1+\alpha y).\sin p.\cos q + a^2.(1+\alpha y)^2$$

hat. Diese Gleichung giebt für f'^2 zwey Werthe; da aber einer von ihnen von der Ordnung α^2 ist, so ist er gleich Null, wenn man die Gröſsen von dieser Ordnung vernachlässigt. Der andere wird [31])

$$f'^2 = 4a^2.\sin p^2.\cos q^2.(1+2\alpha y) + 4\alpha a^2.(y'-y);$$

dies giebt

$$V = 2a^2.\int dp.dq.\sin p.[(1+2\alpha y)\sin p^2.\cos q^2 + \alpha.(y'-y)].$$

Es ist sichtbar, daſs die Integrale von $p=0$ bis $p=\pi$, und von $q=-\frac{1}{2}\pi$ bis $q=\frac{1}{2}\pi$ genommen werden müssen; man erhält so [32])

$V =$

31) Man hat nämlich, wenn man die in α^2 multiplicirten Glieder wegläſst,

$$2a^2\alpha.(y'-y) = f'^2 - 2af'.(1+\alpha y).\sin p.\cos q,$$

und hieraus

$$f' = a.(1+\alpha y)\sin p.\cos q \pm a.\sqrt{(1+\alpha y)^2\sin p^2.\cos q^2 + 2\alpha(y'-y)}.$$

Die Wurzelgröſse ist, wenn man nur die erste Potenz von α behält, nach dem Binomischen Lehrsatz gleich $a.(1+\alpha y)\sin p.\cos q + \frac{a\alpha(y'-y)}{(1+\alpha y).\sin p.\cos q}$; die beiden Werthe von f' sind also

$$f' = 2a(1+\alpha y).\sin p.\cos q + \frac{\alpha a(y'-y)}{(1+\alpha y).\sin p.\cos q};$$

und $f' = \frac{-\alpha a(y'-y)}{(1+\alpha y).\sin p.\cos q}$.

32) Da $dp.\sin p = -d.(\cos p)$ und $\sin p^2 = 1-\cos p^2$, so ist $\int dp.\sin p.\sin p^2 = -\cos p + \frac{1}{3}\cos p^3$. Integrirt man also V in Beziehung auf p, so findet man

$$V = 2a^2\int.dq\,[-(1+2\alpha y)\cos q^2.(\cos p - \tfrac{1}{3}\cos p^3) + \alpha y.\cos p.] + 2a^2\int.dp.dq.y'.\sin p.$$

Man hat ferner $\int.dq.\cos q^2 = \int.dq(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2q) = \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}\sin 2q$, folglich, wenn man V in Beziehung auf q integrirt,

$$V = (1+2\alpha y)a^2.(q+\tfrac{1}{2}\sin 2q).(-\cos p + \tfrac{1}{3}\cos p^3) + 2a^2.\alpha y.q.\cos p + 2a^2.\int.dp.dq.y'.\sin p.$$

Da $\sin 2q$ für $q = \pm 90^\circ$ gleich Null ist; so erhält man in diesen beiden Fällen den wirklichen integrirten Theil von V gleich

$$\pm\frac{a^2\pi}{2}.[(1+2\alpha y).(-\cos p + \tfrac{1}{3}\cos p^3) + 2\alpha y.\cos p],$$

oder

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^2 - \tfrac{4}{3}\alpha\pi . a^2 . y + 2\alpha a^2 . \int dp . dq . y' . \sin p.$$

Da y' eine Funktion von $\cos\theta'$ ist, so muſs man diesen Kosinus durch eine Funktion von p und von q bestimmen; man kann hierbey die Gröſsen von der Ordnung α vernachläſsigen, weil y' schon in α multiplicirt ist. Dies festgesetzt, findet man leicht

$$a . \cos\theta' = (a - f . \sin p . \cos q) . \cos\theta + f . \sin p . \sin q . \sin\theta,$$

hieraus erhält man, wenn man statt f seinen Werth $2a . \sin p . \cos q$ setzt:

$$\mu' = \mu . \cos p^2 - \sin p^2 . \cos(2q + \theta).$$

Man muſs hierbey in Beziehung auf das Integral $\int y' dp . dq . \sin p$ bemerken, welches in Rücksicht auf q von $2q = -\pi$ bis $2q = \pi$ genommen werden muſs, daſs man eben das Resultat erhalten würde, wenn man dies Integral von $2q = -\theta$ bis $2q = 2\pi - \theta$ nähme, weil die Werthe von μ' und folglich auch von y' von $2q = -\pi$ bis $2q = \pi$ eben dieselben sind, als von $2q = -\theta$ bis $2q = 2\pi - \theta$. Setzt man also $2q + \theta = q'$, so wird

$$\mu' = \mu . \cos p^2 - \sin p^2 . \cos q',$$

und man erhält

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^2 - \tfrac{4}{3}\alpha\pi . a^2 y + \alpha a^2 . \int y' . dp . dq' . \sin p;$$

wo die Integrale von $p = 0$ bis $p = \pi$ und von $q' = 0$ bis $q' = 2\pi$ zu nehmen sind.

Bezeichnet man nun durch $a^2 N$ das Integral aller Kräfte, welche von der Anziehung des Sphäroids selbst verschieden, und in die Elemente ihrer Richtungen multiplicirt worden sind: so erhält man, nach dem 24sten Satz, im Fall des Gleichgewichts

$$\text{Beständige Gröſse} = V + a^2 . N,$$

und wenn man statt V seinen Werth setzt, so erhält man

$$\text{Best. Gröſse} = \tfrac{4}{3}\alpha\pi . y - \alpha . \int y' . dp . dq' . \sin p - N,$$

welche Gleichung offenbar die Gleichung des Gleichgewichts des 24sten Satzes,

$$\text{oder} \pm \frac{a^2\pi}{2}(-\cos p + \tfrac{1}{3}\cos p^3) \pm \tfrac{1}{3}\alpha y . \pi . a^2 . \cos p^3,$$

und der Unterschied dieser beiden Werthe ist $+ a^2\pi . (-\cos p + \frac{1}{3}\cos p^3) + \frac{2}{3}\alpha\pi . y . a^2 . \cos p^3$. Setzt man in diesem Unterschied $p = 0$ und $p = 180°$, oder $\cos p = +1$ und $\cos p = -1$, so erhält man im ersten Fall $-\frac{2}{3}\pi a^2 + \frac{2}{3}\alpha\pi y . a^2$ und im zweyten Fall $+\frac{2}{3}\pi a^2 - \frac{2}{3}\alpha\pi . y . a^2$; der Unterschied beider Gröſsen ist $+\frac{4}{3}\pi a^2 - \frac{4}{3}\alpha\pi . y . a^2$, und folglich

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^2 - \tfrac{4}{3}\alpha\pi . y . a^2 + 2a^2\int dp . dq . y . \sin p.$$

bloſs unter einer andern Geſtalt dargeſtellt, iſt. Da dieſe Gleichung lineariſch iſt, ſo folgt hieraus, daſs ihr der Halbmeſser $a\left[1+\frac{\alpha}{i}(y+v+\ldots)\right]$ Genüge thun wird, wenn ihr irgend eine Anzahl i von Halbmeſsern $a.[1+\alpha y)$, $a.(1+\alpha v)$ etc., Genüge thun.

Man nehme an, daſs die äuſsern Kräfte bloſs in der Mittelpunktsflieh-kraft beſtehen, welche aus der Umdrehungsbewegung des Sphäroids entſteht, und man bezeichne dieſe Kraft in der Entfernung 1 von der Umdrehungsaxe mit g; ſo hat man, nach Satz 23., $N = \frac{1}{2}g\,(1-\mu^2)$; die Gleichung des Gleichgewichts wird folglich

Beſt. Gröſse $= \frac{4}{3}\alpha\pi\,.\,y - \alpha\,.\int y'\,.\,dp\,.\,dq'\,.\,\sin p - \frac{1}{2}g\,.\,(1-\mu^2)$.

Differenziirt man ſie dreymal hintereinander in Beziehung auf μ, und bemerkt man, daſs $\left(\frac{d\mu'}{d\mu}\right) = \cos p^2$ iſt, vermöge der Gleichung

$$\mu' = \mu\,.\,\cos p^2 - \sin p^2\,.\,\cos q';$$

ſo erhält man:

$$0 = \tfrac{4}{3}\pi\,.\left(\frac{d^3y}{d\mu^3}\right) - \int dp\,.\,dq'\,.\,\sin p\,.\,\cos p^6\,.\left(\frac{d^3y'}{d\mu'^3}\right).$$

Nun iſt aber $\int dp\,.\,dq'\,.\,\sin p\,.\,\cos p^6 = \frac{4\pi}{7}$ [33]); man wird alſo der vorhergehenden Gleichung folgende Form geben können:

$$0 = \int dp\,.\,dq'\,.\,\sin p\,.\,\cos p^6\,.\left[\tfrac{7}{3}\,.\left(\frac{d^3y}{d\mu^3}\right) - \left(\frac{d^3y'}{d\mu'^3}\right)\right].$$

Dieſe Gleichung muſs für jeden Werth von μ Statt haben; nun iſt aber klar, daſs es unter allen Werthen, welche von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$ enthalten ſind, einen giebt, welchen wir mit h bezeichnen wollen, und der ſo beſchaffen iſt,

33) Man hat nämlich, wenn man in Beziehung auf p integrirt, $\int dp\,.\,dq'\,.\,\sin p\,.\,\cos p^6 = -\int dq'\,.\,d\,.\,(\cos p)\,.\,\cos p^6 = -\frac{1}{7}\int dq'\,.\,\cos p^7$, und wenn man in Beziehung auf q integrirt $-\frac{1}{7}q'\,.\,\cos p^7$. Dies Integral iſt, für $p = 0$, gleich $-\frac{1}{7}q'$, und für $p = 180°$, gleich $+\frac{1}{7}q'$; der Unterſchied dieſer beiden Werthe iſt $+\frac{2}{7}q'$; dieſer Unterſchied iſt für $q' = 0$ auch gleich Null, und für $q' = 360°$ oder 2π, gleich $\frac{4}{7}\pi$; dieſer beiden Werthe Unterſchied iſt alſo $\frac{4}{7}\pi$, und dies der Werth des obigen Integrals innerhalb der Grenzen $p = 0$ und $p = 180°$; $q = 0$ und $q = 360°$ genommen.

dafs, das Zeichen abgerechnet, keiner der Werthe von $\left(\frac{d^3 y}{d\mu^3}\right)$ denjenigen übertrifft, welcher h zugehört. Bezeichnet man daher den letztern Werth mit H, so erhält man

$$o = \int dp \,.\, dq' \,.\, \sin p \,.\, \cos p^6 \,.\, \left[\tfrac{7}{3} H - \left(\frac{d^3 y'}{d\mu'^3}\right)\right].$$

Die Gröfse $\frac{7}{3} H - \left(\frac{d^3 y'}{d\mu'^3}\right)$ hat offenbar dasselbe Zeichen wie H, und der Factor $\sin p \,.\, \cos p^6$ ist im ganzen Umfang des Integrals beständig positiv; die Elemente dieses Integrals haben also alle dasselbe Zeichen wie H; woraus folgt, dafs das ganze Integral nicht gleich Null seyn kann, wofern H es nicht selbst ist. Dies erfordert, dafs man allgemein $o = \left(\frac{d^3 y}{d\mu^3}\right)$ hat, woraus man durch Integriren

$$y = l + m \,.\, \mu + n \,.\, \mu^2$$

erhält, wo l, m, n beständige willkührliche Gröfsen sind.

Setzt man den Anfangspunkt der Halbmesser im Mittel der Umdrehungsaxe, und nimmt man für a die Hälfte dieser Axe an, so ist $y = o$, wenn $\mu = 1$ und wenn $\mu = -1$ ist; dies giebt $m = o$ und $n = -l$. Der Werth von y wird so $l.(1 - \mu^2)$; substituirt man ihn in die Gleichung des Gleichgewichts

Beständige Gröfse $= \frac{4}{3} \alpha \pi y - \alpha \int y' \,.\, dp \,.\, dq' \,.\, \sin p - \frac{1}{2} g \,(1 - \mu^2)$,

so findet man $\alpha l = \frac{15 g}{16 \pi} = \frac{5}{4} \alpha \Phi$, wo $\alpha \Phi$ das Verhältnifs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator ist, welches Verhältnifs sehr nahe gleich $\frac{3 g}{4 \pi}$ ist; der Halbmesser des Sphäroids ist also

$$a \,.\, \left[1 + \frac{5 \alpha \Phi}{4} (1 - \mu^2)\right],$$

und es folgt hieraus, dafs das Sphäroid ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid ist, welches dem Vorhergehenden gemäfs ist.

Wir haben so direct und unabhängig von den Reihen die Gestalt eines gleichartigen Umdrehungssphäroids, welches sich um seine Axe dreht, bestimmt, und wir haben gezeigt, dafs sie nur ein Ellipsoid seyn kann, welches sich in eine Kugel verwandelt, wenn $\Phi = o$ ist; so dafs die Kugel die einzige, durch

Umdrehung entstehende, Figur ist, welche dem Gleichgewicht einer flüssigen, gleichartigen und unbeweglichen Masse Genüge thut.

Man kann hieraus im Allgemeinen schliefsen, dafs es nur eine einzige Figur für eine flüssige Masse giebt, wo Gleichgewicht möglich ist, wenn irgend eine Anzahl sehr kleiner Kräfte auf dieselbe wirken; oder welches dasselbe ist, dafs es nur einen einzigen Halbmesser $a(1 + \alpha y)$ giebt, welcher der Gleichung des Gleichgewichts

$$\text{Beständige Gröfse} = \tfrac{4}{3}\alpha\pi \,.\, y - \alpha \,.\int y'\, dp \,.\, dq' \,.\, \sin p - N$$

Genüge thun kann, wo y eine Funktion von θ und von der Länge ϖ ist, und wo y' der Werth ist, welchen y erhält, wenn man in ihm θ und ϖ in θ' und ϖ' verwandelt. Nimmt man nämlich an, dafs es zwey verschiedene Halbmesser $a(1 + \alpha y)$ und $a(1 + \alpha y + \alpha v)$ giebt, welche dieser Gleichung Genüge thun, so hat man

$$\text{Beständige Gröfse} = \tfrac{4}{3}\alpha\pi \,.\, (y + v) - \alpha\int (y' + v') \,.\, dp \,.\, dq' \,.\, \sin p - N.$$

Zieht man von dieser Gleichung die vorhergehende ab, so erhält man

$$\text{Beständige Gröfse} = \tfrac{4}{3}\pi \,.\, v - \int v'\, dp \,.\, dq' \,.\, \sin p.$$

Diese Gleichung ist offenbar die Gleichung eines gleichartigen Sphäroids, welches sich im Gleichgewicht befindet, dessen Halbmesser $a.(1 + \alpha v)$ ist, und auf welches keine von der Anziehung seiner Theilchen verschiedenen Kräfte wirken. Da der Winkel ϖ von selbst in dieser Gleichung verschwindet, so wird der Halbmesser $a.(1 + \alpha v)$ ihr noch Genüge thun, wenn man nach und nach ϖ in $\varpi + d\varpi$, in $\varpi + 2\,d\varpi$ etc. verwandelt. Nennt man v_1, v_2 etc. das, was v durch diese Aenderungen wird, so folgt aus dem Vorhergehenden, dafs der Halbmesser

$$a \,.\, (1 + \alpha v \,.\, d\varpi + \alpha v_1 \,.\, d\varpi + \alpha v_2 \,.\, d\varpi + \text{etc.}),$$

oder $a \,.\, (1 + \alpha \,.\int v\, d\varpi)$ der vorhergehenden Gleichung Genüge thun wird. Nimmt man das Integral $\int v\, d\varpi$ von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 2\pi$, so wird $a.(1 + \alpha.\int v d\varpi)$ der Halbmesser eines Umdrehungssphäroids, welches nach dem Vorhergehenden nur eine Kugel seyn kann; wir wollen nun sehen, welche Bedingung hieraus für v folgt.

Man nehme an, dafs a der kürzeste Abstand des Schwerpunkts von der Oberfläche des Sphäroids ist, dessen Halbmesser $a \,.\, (1 + \alpha v)$ ist, und man setze den Pol oder den Anfangspunkt der Winkel θ am Ende von a, so wird v im Pol gleich Null und sonst überall positiv seyn; eben dies wird der Fall fürs Integral $\int v\, d\varpi$ seyn. Da nun der Schwerpunkt des Sphäroids, dessen Halbmes-

ser $a.(1 + \alpha v)$ ist, im Mittelpunkt der Kugel ist, welche den Halbmesser a hat; so wird dieser Punkt auch der Schwerpunkt des Sphäroids seyn, dessen Halbmesser $a.(1 + \alpha.\int v d\varpi)$ ist; die verschiedenen, vom Mittelpunkt an die Oberfläche des letztern Sphäroids gezogenen, Halbmesser sind also ungleich, wenn v nicht gleich Null ist; das Sphäroid kann folglich nur in dem Fall eine Kugel seyn, wenn $v = 0$ ist. Wir haben uns so versichert, daſs ein gleichartiges Sphäroid, auf welches irgend eine Anzahl sehr kleiner Kräfte wirkt, nur auf eine einzige Art im Gleichgewicht seyn kann.

27. Wir haben angenommen, daſs N von der Gestalt des Sphäroids unabhängig ist; dies findet sehr nahe Statt, wenn die von der Wirkung der flüssigen Theilchen verschiedenen Kräfte aus der Mittelpunktsfliehkraft seiner Umdrehungsbewegung, und aus der Anziehung der Körper auſserhalb des Sphäroids entstanden sind. Gedenkt man sich aber im Mittelpunkt des Sphäroids eine endliche, von der Entfernung abhängende, Kraft, so wird ihre Wirkung auf die Theilchen auf der Oberfläche des Flüssigen von der Natur dieser Oberfläche abhängen, und N wird folglich von y abhängen. Dies ist der Fall bey einer flüssigen gleichartigen Masse, welche eine Kugel bedeckt, deren Dichte von der des Flüssigen verschieden ist. Denn man kann diese Kugel so betrachten, als ob sie von gleicher Dichte mit dem Flüssigen wäre, und dagegen im Mittelpunkt eine Kraft annehmen, welche sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält, nämlich so, daſs, wenn c der Halbmesser der Kugel und ϱ ihre Dichte, die des Flüssigen als Einheit angenommen, ist, diese Kraft in der Entfernung r gleich $\frac{4}{3}\pi . \frac{c^3.(\varrho - 1)}{r^2}$ seyn wird. Multiplicirt man sie in das Element ihrer Richtung $- dr$, so ist das Integral des Products gleich $\frac{4}{3}\pi . \frac{c^3.(\varrho - 1)}{r}$; welche Gröſse man zu $a^2 N$ hinzusetzen muſs; und da man an der Oberfläche $r = a.(1 + \alpha y)$ hat, so muſs man in der Gleichung des Gleichgewichts des vorhergehenden Satzes zu N die Gröſse $\frac{4}{3}\pi . \frac{(\varrho - 1).c^3}{a^3}(1 - \alpha y)$ hinzusetzen. Diese Gleichung wird so

$$\text{Beständige Gröſse} = \frac{4\alpha\pi}{3}.\left[1 + (\varrho - 1).\frac{c^3}{a^3}\right].y - \alpha.\int y'.dp.dq'.\sin p - N.$$

Bezeichnet man mit $a.(1 + \alpha y + \alpha v)$ einen neuen Ausdruck des Halbmessers

des Sphäroids, welches im Gleichgewicht ist, so hat man zur Bestimmung von v die Gleichung

$$\text{Best. Größe} = \tfrac{4}{3}\pi \left[1 + (\varrho - 1) . \frac{c^3}{a^3}\right] v - \int v' \, dp \, . \, dq' \, . \, \sin p.$$

Dies ist die Gleichung des Gleichgewichts des Sphäroids, wenn man annimmt, daſs das Sphäroid unbeweglich ist, und daſs keine äuſsern Kräfte auf dasselbe wirken.

Ist das Sphäroid durch Umdrehung entstanden, so wird v bloſs eine Funktion von $\cos\theta$ oder von μ seyn; man kann sie aber in diesem Fall durch die Analysis des vorhergehenden Satzes bestimmen. Differenziirt man nämlich diese Gleichung $(i+1)$mal nach einander in Beziehung auf μ, so erhält man [34])

$$o = \tfrac{4}{3}\pi . \left[1 + (\varrho - 1) . \frac{c^3}{a^3}\right] . \left(\frac{d^{i+1} . v}{d\mu^{i+1}}\right) - \int \left(\frac{d^{i+1} . v'}{d\mu'^{i+1}}\right) . dp . dq . \sin p . \cos p^{2i+2};$$

man hat aber [35])

$$\int dp \, . \, dq' \, . \sin p \, . \cos p^{2i+2} = \frac{4\pi}{2i+3};$$

man kann daher der vorhergehenden Gleichung folgende Form geben:

$$o = \int dp . dq' . \sin p . \cos p^{2i+2} . \left[\left(\frac{2i+3}{3}\right) . \left(1 + (\varrho - 1) . \frac{c^3}{a^3}\right) . \left(\frac{d^{i+1} . v}{d\mu^{i+1}}\right) - \left(\frac{d^{i+1} . v'}{d\mu'^{i+1}}\right)\right].$$

Man kann i so annehmen, daſs man, das Zeichen abgerechnet,

$$\left(\frac{2i+3}{3}\right) . \left(1 + (\varrho - 1) . \frac{c^3}{a^3}\right) > 1$$

hat. Nimmt man dann an, daſs i die kleinste ganze positive Zahl sey, welche diese Gröſse gröſser als die Einheit macht, so wird man sich, wie im vorhergehenden Satz, versichern, daſs dieser Gleichung nicht anders Genüge geschehen kann, als wenn man $\left(\frac{d^{i+1} . v}{d\mu^{i+1}}\right)$ gleich Null setzt; dies giebt

$$v = \mu^i + A . \mu^{i-1} + B . \mu^{i-2} + \text{etc.}$$

Substituirt man in die vorhergehende Gleichung des Gleichgewichts statt v die-

34) Es ist nämlich $\left(\frac{d^{i+1} v'}{d\mu^{i+1}}\right) = \left(\frac{d^{i+1} v'}{d\mu'^{i+1}}\right) . \left(\frac{d\mu'}{d\mu}\right)^{i+1} = \left(\frac{d^{i+1} v'}{d\mu'^{i+1}}\right) . \cos p^{2i+2}.$

35) Man findet dies Integral unmittelbar aus dem in der 33sten Anmerkung gegebenen Integral.

sen Werth, und

$$\mu'^i + A \, . \, \mu'^{i-1} + B \, . \, \mu'^{i-2} + \text{etc.}$$

statt v', wo μ' nach dem vorhergehenden Satz gleich $\mu \, . \cos p^2 - \sin p^2 \, . \cos q'$ ist, so findet man erstlich

$$1 + (\varrho - 1) \, . \, \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{2i+1};$$

dies setzt voraus, dafs ϱ gleich oder kleiner als die Einheit ist. Die flüssige Masse wird also nur auf eine einzige Art im Gleichgewicht seyn können, so oft a, c, ϱ nicht so beschaffen sind, dafs dieser Gleichung Genüge geschieht, wenn i eine ganze positive Zahl ist. Man hat ferner

$$A = 0; \quad B = -\frac{i(i-1)}{2(2i-1)}; \text{ etc.},$$

so dafs

$$v = \mu^i - \frac{i(i-1)}{2.(2i-1)} \, . \, \mu^{i-2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4.(2i-1)(2i-3)} \, . \, \mu^{i-4} - \text{etc.}$$

Es giebt daher im Allgemeinen zwey Figuren des Gleichgewichts, weil αv zwey Werthe haben kann; den einen erhält man, wenn man $\alpha = 0$ setzt; den andern, wenn man v der vorhergehenden Funktion von μ gleich setzt.

Ist das Sphäroid ohne Umdrehungsbewegung und keiner von der Wirkung seiner Theilchen verschiedenen Kraft unterworfen, so ist die erste dieser zwey Figuren eine Kugel, und die zweyte hat zum Mittagskreis eine krumme Linie von der Ordnung i. Diese beiden krummen Linien sind von einander nicht verschieden, wenn $i = 1$ ist, weil dann der Halbmesser $a.(1 + \alpha\mu)$ der Halbmesser einer Kugel ist, in welcher der Anfangspunkt der Halbmesser vom Mittelpunkt um die Gröfse α entfernt ist; man sieht aber leicht, dafs alsdann $\varrho = 1$, das heifst, dafs das Sphäroid gleichartig ist, welches mit dem Resultat des vorhergehenden Satzes übereinstimmt.

28. Hat man die durch Umdrehung entstehenden Figuren, welche dem Gleichgewicht Genüge thun, so kann man hieraus leicht durch folgende Methode diejenigen Figuren schliefsen, welche nicht durch Umdrehung entstehen. Wir setzten vorher den Anfangspunkt der Winkel θ am Ende der Umdrehungsaxe; man nehme jetzt an, dafs er um γ von diesem Ende entfernt sey, und man nenne θ' die Entfernung von demselben Ende desjenigen Punktes der Oberfläche, dessen Abstand vom neuen Anfangspunkt der Winkel θ, gleich θ

ist. Man nenne ferner $\varpi - \beta$ den Winkel, welcher zwischen den zwey Bogen θ und γ enthalten ist, so hat man

$$\cos\theta' = \cos\gamma \,.\, \cos\theta + \sin\gamma \,.\, \sin\theta \,.\, \cos(\varpi - \beta).$$

Bezeichnet man dann durch $\Gamma \,.\, (\cos\theta')$ die Funktion

$$\cos\theta'^{i} - \frac{i(i-1)}{2\,.\,(2i+1)} \,.\, \cos\theta'^{i-2} + \text{etc.},$$

so ist der Halbmesser eines unbeweglichen und im Gleichgewicht sich befindenden Sphäroids, welchen wir gleich $a\,[1 + \alpha\Gamma \,.\, (\cos\theta')]$ gefunden haben, gleich

$$a + \alpha a \,.\, \Gamma \,.\, [\cos\gamma \,.\, \cos\theta + \sin\gamma \,.\, \sin\theta \,.\, \cos(\varpi - \beta)],$$

und ob er schon eine Funktion des Winkels ϖ ist, so gehört er doch einem durch Umdrehung entstandenen Körper zu, wo der Winkel θ nicht vom Ende der Umdrehungsaxe gerechnet wird.

Da dieser Halbmesser der Gleichung des Gleichgewichts Genüge thut, was auch immer α, β und γ sind, so wird er ihr auch dann noch Genüge thun, wenn man diese Gröſsen in α', β', γ'; in α'', β'', γ'' etc. verwandelt. Da nun diese Gleichung linearisch ist, so folgt hieraus, daſs der Halbmesser

$$\begin{aligned} a &+ \alpha a \,.\, \Gamma \,.\, [\cos\gamma \,.\, \cos\theta + \sin\gamma \,.\, \sin\theta \,.\, \cos(\varpi - \beta)] \\ &+ \alpha' a \,.\, \Gamma \,.\, [\cos\gamma' \,.\, \cos\theta + \sin\gamma' \,.\, \sin\theta \,.\, \cos(\varpi - \beta')] \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

ihr ebenfalls Genüge thun wird. Das Sphäroid, welchem dieser Halbmesser zugehört, ist nun nicht mehr durch Umdrehung entstanden; es besteht aus einer Kugel vom Halbmesser a, und aus irgend einer Anzahl willkührlich auf einander gelegter Lagen, welche dem Ueberschuſs des Umdrehungssphäroids, dessen Halbmesser $a + \alpha a \,.\, \Gamma(\mu)$ ist, über die Kugel, deren Halbmesser a ist, ähnlich sind.

Vergleicht man den Ausdruck von $\Gamma \,.\, (\cos\theta')$ mit dem von $P^{(i)}$ im 23ten Satz, so sieht man, daſs beide Funktionen einander ähnlich und nur durch die Gröſsen γ und β, welche in $P^{(i)}$ gleich ν und ψ sind, und durch einen von μ und von ϖ unabhängigen Factor, von einander verschieden sind; man hat also

$$0 = \left\{\frac{d\,.\,(1-\mu^2)\,.\left(\frac{d\,.\,\Gamma\,.\,(\cos\theta')}{d\mu}\right)}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2\,.\,\Gamma\,.\,(\cos\theta')}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i(i+1)\,.\,\Gamma\,.\,(\cos\theta').$$

Be-

Bezeichnet man nun mit $\alpha\, Y^{(i)}$ die Funktion

$$\begin{aligned}&\alpha\,.\,\Gamma\,.\,[\cos\gamma\,.\,\cos\theta + \sin\gamma\,.\,\sin\theta\,.\,\cos(\varpi-\beta)]\\ &+\alpha'\,.\,\Gamma\,.\,[\cos\gamma'\,.\,\cos\theta + \sin\gamma'\,.\,\sin\theta\,.\,\cos(\varpi-\beta')]\\ &+\text{etc.},\end{aligned}$$

so kann man leicht aus dem Vorhergehenden schließen, daſs $Y^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ, $\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\cos\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\sin\varpi$ seyn wird, welche der partiellen Differenzialgleichung

$$o = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 Y^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i\,.\,(i+1)\,Y^{(i)}$$

Genüge thun wird. Wählt man daher für $Y^{(i)}$ den allgemeinsten Ausdruck dieser Art, so wird die Funktion $a.(1+\alpha Y^{(i)})$ der allgemeinste Ausdruck des Sphäroids seyn, welches unbeweglich und im Gleichgewicht ist.

Man kann zu demselben Resultat vermittelst des Reihenausdrucks von V im 11ten Satz gelangen; denn da die Gleichung des Gleichgewichts nach dem vorhergehenden Satz folgende ist:

$$\text{Beständige Größe} = V + a^2\,.\,N,$$

so erhält man, wenn man annimmt, daſs alle von der gegenseitigen Wirkung der flüssigen Theilchen verschiedenen Kräfte, auf eine einzige anziehende Kraft sich bringen lassen, welche gleich $\frac{4}{3}\pi\,.\,\frac{(\varrho-1)\,.\,c^3}{r^2}$ und im Mittelpunkt des Sphäroids sich befindet, und wenn man diese Kraft mit dem Element ihrer Richtung $-dr$ multiplicirt und hernach integrirt,

$$\tfrac{4}{3}\pi\,.\,\frac{(\varrho-1)\,.\,c^3}{r} = a^2\,.\,N;$$

und da an der Oberfläche $r = a.(1+\alpha y)$ ist, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung des Gleichgewichts in folgende:

$$\text{Best. Größe} = V + \tfrac{4}{3}\alpha\pi\,.\,\frac{c^3}{a}\,.\,(1-\varrho)\,y.$$

Substituirt man in diese Gleichung statt V seinen durch die Formel (3) des 11ten Satzes gegebenen Werth, in welchen man statt r seinen Werth $a.(1+\alpha y)$ setzen wird, und substituirt man hernach statt y seinen Werth $Y^{(0)} + Y^{(1)}$

$+ Y^{(2)} +$ etc., so erhält man [36]):

$$o = \left[(1-\varrho)\cdot\frac{c^3}{a^3} + 2\right] Y^{(0)} + (1-\varrho)\cdot\frac{c^3}{a^3}\cdot Y^{(1)} + \left[(1-\varrho)\cdot\frac{c^3}{a^3} - \tfrac{2}{5}\right] Y^{(2)}$$

$$\ldots\ldots + \left[(1-\varrho)\cdot\frac{c^3}{a^3} - \left(\frac{2i-2}{2i+1}\right)\right]\cdot Y^{(i)} + \text{etc.}$$

wenn man die beständige Gröſse a so annimmt, daſs die beständige Gröſse in der vorhergehenden Gleichung gleich $\frac{4}{3}\pi a^2$ wird. Diese Gleichung giebt $Y^{(0)} = 0$; $Y^{(1)} = 0$; $Y^{(2)} = 0$ etc., wofern nicht der Koeffizient einer dieser Gröſsen, z. B. von $Y^{(i)}$, gleich Null ist; dies giebt

$$(1-\varrho)\cdot\frac{c^3}{a^3} = \frac{2i-2}{2i+1},$$

wo i eine ganze positive Zahl ist, und in diesem Fall sind alle diese Gröſsen gleich Null, ausgenommen $Y^{(i)}$; man hat folglich dann $y = Y^{(i)}$, welches mit dem vorher gefundenen Resultat übereinstimmt.

Man sieht auf diese Art, daſs die Resultate, welche man erhält, wenn man V in eine Reihe verwandelt, alle mögliche Allgemeinheit haben, und daſs man nicht fürchten darf, daſs irgend eine Figur des Gleichgewichts der auf diese Verwandlung gegründeten Analysis entgehe. Dies bestätigt, was wir durch die Analysis des 11ten Satzes a priori gesehen haben, wo wir bewiesen haben, daſs die Form, welche wir dem Halbmesser der Sphäroide gegeben haben, nicht willkührlich ist, sondern aus der Natur ihrer Anziehungen selbst flieſst.

29. Wir wollen nun die Gleichung (1) des 23sten Satzes wieder vornehmen. Substituirt man in ihr statt V seinen durch die Formel (6) des 14ten Satzes gegebenen Werth, so erhält man in Beziehung auf die verschiedenen flüssigen Lagen

$$\int\frac{d\Pi}{\varrho} = 2\pi.\int\varrho.d.a^2 + 4\alpha\pi.\int\varrho.d.\left[a^2 Y^{(0)} + \frac{ar}{3}.Y^{(1)} + \frac{r^2}{5}Y^{(2)} + \frac{r^3}{7a}Y^{(3)} + \text{etc.}\right]$$

$$+ \frac{4\pi}{3r}\int\varrho.d.a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r}.\int\varrho.d.\left[a^3.Y^{(0)} + \frac{a^4}{3r}.Y^{(1)} + \frac{a^5}{5r^2}.Y^{(2)} + \frac{a^6}{7r^3}.Y^{(3)} + \text{etc.}\right]$$

$$+ \alpha r^2.[Z^{(0)} + Z^{(2)} + r.Z^{(3)} + r^2.Z^{(4)} + \text{etc.}];\quad (1)$$

36) Man findet alsdann $V = \frac{4}{3}\pi a^2(1-\alpha y) + 4\alpha\pi a^2[Y^{(0)} + \frac{1}{3}Y^{(1)} + \frac{1}{5}Y^{(2)} + \ldots]$

$= \frac{4}{3}\pi a^2 + \frac{4}{3}\pi a^2.\alpha.[2Y^{(0)} + \frac{2}{5}Y^{(2)} + \frac{4}{7}Y^{(3)} + \frac{6}{9}Y^{(4)} + \ldots]$

und $\frac{4}{3}\pi\alpha.\frac{c^3}{a}.(1-\varrho).y = \frac{4}{3}\pi.\alpha.a^2.\frac{c^3}{a^3}.(1-\varrho).[Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots]$

wo sich die Differenziale und Integrale auf die veränderliche Gröſse a beziehen. Die beiden ersten Integrale des zweyten Theils müssen von $a = a$ bis $a = 1$ genommen werden, wo a der Werth ist, welchen a an der Horizontallage des Flüssigen, welche man betrachtet, hat, und wo der Werth von a an der Oberfläche zur Einheit angenommen wird. Die zwey letztern Integrale müssen von $a = 0$ bis $a = a$ genommen werden; der Halbmesser muſs endlich nach allen Differenziationen und Integrationen in $a.(1 + \alpha y)$ verwandelt werden. Es ist hinreichend in den Gliedern, welche in α multiplicirt sind, r in a zu verwandeln; in dem Gliede $\frac{4\pi}{3r} . \int \varrho . d . a^3$ muſs man aber $a.(1 + \alpha y)$ statt r setzen; dadurch verwandelt es sich in $\frac{4\pi}{3a} . (1 - \alpha y) . \int \varrho . d . a^3$, und folglich in

$$\frac{4\pi}{3a} . [1 - \alpha Y^{(0)} - \alpha Y^{(1)} - \alpha Y^{(2)} - \text{etc.}] . \int \varrho . d . a^3.$$

Dieses festgesetzt, vergleiche man in der Gleichung (1) die ähnlichen Funktionen, so erhält man erstlich

$$\int . \frac{d\Pi}{\varrho} = 2\pi . \int \varrho . d . a^2 + 4\alpha\pi . \int \varrho . d . (a^2 . Y^{(0)}) + \frac{4\pi}{3a} . \int \varrho . d . a^3$$
$$- \frac{4\alpha\pi}{3a} . Y^{(0)} . \int \varrho . d . a^3 + \frac{4\alpha\pi}{a} . \int \varrho . d (a^3 . Y^{(0)}) + \alpha a^2 . Z^{(0)}.$$

Die beiden ersten Integrale des zweyten Theils dieser Gleichung müssen von $a = a$ bis $a = 1$ genommen werden, die drey übrigen Integrale desselben Theils von $a = 0$ bis $a = a$. Da diese Gleichung weder a noch $Y^{(0)}$ bestimmt, sondern bloſs das Verhältniſs zwischen diesen zwey Gröſsen giebt, so sieht man daſs der Werth von $Y^{(0)}$ willkührlich ist, und wie man will bestimmt werden kann. Man hat ferner, wenn i gleich oder gröſser als Eins ist,

$$0 = \frac{4\pi . a^i}{2i + 1} . \int \varrho . d . \left(\frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}}\right) - \frac{4\pi}{3a} . Y^{(i)} . \int \varrho . d . a^3$$
$$+ \frac{4\pi}{(2i + 1)\, a^{i+1}} . \int \varrho . d . (a^{i+3} . Y^{(i)}) + a^i . Z^{(i)}; \quad (2)$$

wo das erste Integral von $a = a$ bis $a = 1$, und die zwey übrigen von $a = 0$ bis $a = a$ genommen werden müssen. Diese Gleichung wird den Werth von $Y^{(i)}$ für jede Lage des Flüssigen geben, wenn das Gesetz der Dichtigkeiten ϱ bekannt seyn wird.

Will man diesen verschiedenen Integralen die nämlichen Grenzen geben, so sey

$$\frac{4\pi}{2i+1} \cdot \int \varrho \,.\, d \,.\left(\frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}}\right) + Z^{(i)} = \frac{4\pi}{2i+1} \,.\, Z'^{(i)},$$

wenn das Integral von $a = 0$ bis $a = 1$ genommen wird; dann wird $Z'^{(i)}$ eine von a unabhängige Gröſse seyn, und die Gleichung (2) verwandelt sich in

$$0 = (2i+1) \,.\, a^i \,.\, Y^{(i)} \,.\int \varrho \,.\, d \,.\, a^3 + 3\, a^{2i+1} \,.\int \varrho \,.\, d \,.\left(\frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}}\right)$$
$$- 3 \,.\int \varrho \,.\, d \,.\, (a^{i+3} \,.\, Y^{(i)}) - 3\, a^{2i+1} \,.\, Z'^{(i)},$$

wo alle Integrale von $a = 0$ bis $a = a$ genommen werden müssen.

Man kann die Integralzeichen wegschaffen, wenn man in Beziehung auf a differenziirt; man erhält dann folgende Differenzialgleichung der zweyten Ordnung [37]):

37) Differenziirt man in Beziehung auf a, so findet man

$$0 = i \,.\, (2i+1) \,.\, a^{i-1} \,.\, Y^{(i)} \,.\int \varrho . d . a^3 + (2i+1) \,.\, a^i \,.\left(\frac{dY^{(i)}}{da}\right) \,.\int \varrho . d . a^3 + 3\,(2i+1)\, a^{i+2} \,.\, Y^{(i)} \,.\, \varrho$$
$$+ 3\,(2i+1) \,.\, a^{2i} \,.\int \varrho . d . \left(\frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}}\right) + 3\, a^{2i+1} \,.\, \varrho \,.\, d \,.\left(\frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}}\right) - 3 \,.\, \varrho \,.\, d \,.\, (a^{i+3} \,.\, Y^{(i)})$$
$$- 3\,(2i+1)\, a^{2i} \,.\, Z'^{(i)} \;\ldots\; (1).$$

Nun ist aber, wenn man wirklich differenziirt, $d \,.\left(\frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}}\right) = -\frac{i-2}{a^{i-1}} \,.\, Y^{(i)} + \frac{1}{a^{i-2}} \left(\frac{dY^{(i)}}{da}\right)$

und $d \,.\, (a^{i+3} \,.\, Y^{(i)}) = (i+3)\, a^{i+2} \,.\, Y^{(i)} + a^{i+3} \,.\left(\frac{dY^{(i)}}{da}\right)$, folglich

$$3\, a^{2i+1} \,.\, \varrho \,.\, d \,.\left(\frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}}\right) - 3\,\varrho \,.\, d \,.\, (a^{i+3} \,.\, Y^{(i)}) = -3 \,.\, (2i+1)\, a^{i+2} \,.\, Y^{(i)} \,.\, \varrho.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (1), so bleiben nur das 1ste, 2te, 4te und 7te Glied übrig, welche, durch ihren gemeinschaftlichen Factor $(2i+1)$ dividirt, und mit a multiplicirt, folgende Gleichung geben:

$$0 = i \,.\, a^i \,.\, Y^{(i)} \int \varrho . d . a^3 + a^{i+1} \,.\left(\frac{dY^{(i)}}{da}\right) \int \varrho \,.\, d \,.\, a^3 + 3 \,.\, a^{2i+1} \int \varrho . d . \left(\frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}}\right) - 3 a^{2i+1} \,.\, Z'^{(i)}.$$

Substituirt man in ihr statt der beiden letzten Glieder ihren aus der ursprünglichen Gleichung hergeleiteten Werth, so erhält man:

$$\left(\frac{d^2 Y^{(i)}}{da^2}\right) = \left(\frac{i(i+1)}{a^2} - \frac{6\varrho . a}{\int \varrho . d . a^3}\right) . Y^{(i)} - \frac{6\varrho . a^2}{\int \varrho . d . a^3} . \left(\frac{d Y^{(i)}}{da}\right).$$

Das Integral dieser Gleichung wird den Werth von $Y^{(i)}$ mit zwey willkührlichen beständigen Grösen geben; diese beständigen Grösen sind rationale und ganze Funktionen von der Ordnung i, der Grösen μ, $\sqrt{1-\mu^2}$. sin ϖ und $\sqrt{1-\mu^2}$. cos ϖ, und so beschaffen, dafs sie der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thun, wo wir sie mit $U^{(i)}$ bezeichnet haben:

$$0 = \left\{\frac{d . \left[(1-\mu^2) . \left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 U^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i . (i+1) . U^{(i)}.$$

Die eine dieser Funktionen wird durch die Funktion $Z'^{(i)}$ bestimmt, welche durch die Differenziationen verschwunden ist, und es ist sichtbar, dafs sie ein Vielfaches dieser Funktion seyn wird. Nimmt man in Rücksicht auf die zweyte Funktion an, dafs das Flüssige einen festen Kern bedeckt, so wird sie durch die Gleichung für die Oberfläche des Kerns bestimmt werden, wenn man bemerkt, dafs der Werth von $Y^{(i)}$ für die, diese Oberfläche berührende, Lage des Flüssigen identisch mit dem Werth seyn mufs, welchen $Y^{(i)}$ an dieser Oberfläche hat. Die Gestalt des Sphäroids hängt also von der Gestalt des innern Kerns und von den Kräften ab, welche auf das Flüssige wirken.

30. Ist das Sphäroid ganz flüssig, so scheint es, dafs es dann eine unendliche Menge Figuren des Gleichgewichts giebt, weil nichts die eine der willkührlichen beständigen Grösen bestimmt. Wir wollen diesen Fall besonders untersuchen, der um so interessanter ist, da es scheint, dafs er ursprünglich bey den himmlischen Körpern Statt gehabt hat.

$$= -(i+1) a^i Y^{(i)} . \int \rho . d . a^3 + a^{i+1} . \left(\frac{dY^{(i)}}{da}\right) \int \rho . d . a^3 + 3 \int \rho . d . (a^{i+3} . Y^{(i)}) \ldots (2).$$

Differenzirt man die Gleichung (2) von neuem in Beziehung auf a, so findet man:

$$0 = -i . (i+1) . a^{i-1} . Y^{(i)} . \int \rho . d . a^3 + a^{i+1} . \left(\frac{d^2 Y^{(i)}}{da^2}\right) . \int \rho . d . a^3 + 6 \rho . a^{i+3} . \left(\frac{dY^{(i)}}{da}\right)$$
$$+ 6 \rho . a^{i+2} . Y^{(i)},$$

woraus man sogleich den im Text gegebenen Werth von $\left(\frac{d^2 Y^{(i)}}{da^2}\right)$ herleiten wird.

Wir bemerken zuerst, daſs die Lagen des Sphäroids an Dichte abnehmen müssen, wenn man vom Mittelpunkt zur Oberfläche geht; denn es ist klar, daſs die Theilchen einer dichtern Lage, welche über einer weniger dichten Lage sich befänden, in diese eindringen würden, so wie ein schwerer Körper in ein weniger dichtes Flüssige einsinkt; das Sphäroid würde also nicht im Gleichgewicht seyn. Was aber auch immer die Dichte im Mittelpunkt ist, so muſs sie doch endlich seyn; verwandelt man daher den Ausdruck von ϱ in eine nach den Potenzen von a steigende Reihe, so wird diese Reihe von der Form $\beta - \gamma a^n$ — etc. seyn, wo β, γ und n positiv sind; man erhält so

$$\frac{a^3 \cdot \varrho}{\int \varrho \,.\, d \,.\, a^3} = 1 - \frac{n\gamma \,.\, a^n}{(n+3).\beta} + \text{etc.},$$

und die Differenzialgleichung für $Y^{(i)}$ verwandelt sich in

$$\left(\frac{d^2 Y^{(i)}}{da^2}\right) = \left[(i-2).(i+3) + \frac{6\,n\gamma \,.\, a^n}{(n+3)\beta} - \text{etc.}\right] \cdot \frac{Y^{(i)}}{a^2}$$
$$- \frac{6}{a}\left[1 - \frac{n\gamma\, a^n}{(n+3).\beta} + \text{etc.}\right] \cdot \left(\frac{dY^{(i)}}{da}\right).$$

Man nehme, um diese Gleichung zu integriren, an, daſs $Y^{(i)}$ in eine nach den Potenzen von a steigende Reihe von folgender Form entwickelt sey:

$$Y^{(i)} = a^s\, U^{(i)} + a^{s'}\, U'^{(i)} + \text{etc.},$$

so giebt die vorhergehende Differenzialgleichung folgende:

$$(s+i+3) \,.\, (s-i+2) \,.\, a^{s-2} \,.\, U^{(i)} + (s'+i+3).(s'-i+2) \,.\, a^{s'-2} \,.\, U'^{(i)} + \text{etc.}$$
$$= \frac{6\,n\gamma \,.\, a^n}{(n+3).\beta} \cdot [(s+1) \,.\, a^{s-2} \,.\, U^{(i)} + (s'+1) \,.\, a^{s'-2} \,.\, U'^{(i)} + \text{etc.}]; \quad (e).$$

Vergleicht man die ähnlichen Potenzen von a, so erhält man erstlich $(s+i+3)$ $(s-i+2) = 0$; dies giebt $s = i-2$ und $s = -i-3$. Zu jedem dieser Werthe von s gehört eine besondere Reihe, welche, mit einer willkührlichen Gröſse multiplicirt, ein Integral der Differenzialgleichung für $Y^{(i)}$ seyn wird; die Summe dieser beiden Integrale wird das vollständige Integral seyn. Im gegenwärtigen Fall muſs die Reihe, welche zu $s = -i-3$ gehört, verworfen werden; denn es würde daraus für $a\,Y^{(i)}$ ein unendlich groſser Werth entstehen, wenn a unendlich klein ist, wodurch die Halbmesser der Lagen, welche unendlich nahe beym Mittelpunkt sind, unendlich groſs werden würden. Von den beiden besondern Integralen des Ausdrucks von $Y^{(i)}$ muſs man also bloſs den behalten, welcher dem Werth $s = i-2$ zugehört. Dieser Ausdruck ent-

hält alsdann nur eine willkührliche Gröſse, welche durch die Funktion $Z'^{(i)}$ bestimmt werden wird.

Da $Z^{(1)}$ nach dem 23sten Satze gleich Null ist, so ist auch $Y^{(1)}$ gleich Null, so daſs der Schwerpunkt jeder Lage im Schwerpunkt des ganzen Sphäroids ist. Die Differenzialgleichung für $Y^{(i)}$ des vorhergehenden Satzes giebt nämlich

$$\left(\frac{d^2 Y^{(1)}}{da^2}\right) = \left(\frac{2}{a^2} - \frac{6\varrho a}{\int \varrho . d . a^3}\right) . Y^{(1)} - \frac{6\varrho . a^2}{\int \varrho . d . a^3} . \left(\frac{dY^{(1)}}{da}\right).$$

Man thut dieser Gleichung Genüge, wenn man $Y^{(1)} = \frac{U^{(1)}}{a}$ setzt, wo $U^{(1)}$ von a unabhängig ist. Dies ist der Werth von $Y^{(1)}$, welcher der Gleichung $s = i - 2$ Genüge thut, und er ist folglich der einzige, welchen man brauchen muſs. Substituirt man ihn in die Gleichung (2) des vorhergehenden Satzes und setzt man $Z^{(1)} = 0$, so verschwindet die Funktion $U^{(1)}$ und bleibt folglich willkührlich; es folgt aber aus der Bedingung, daſs der Anfangspunkt der Halbmesser r im Schwerpunkt des Erdsphäroids ist, daſs sie gleich Null ist; denn man wird in dem folgenden Satz sehen, daſs alsdann $Y^{(1)}$ an der Oberfläche eines Sphäroids, welches von einer Lage eines im Gleichgewicht sich befindenden Flüssigen bedeckt wird, gleich Null ist; man hat daher im gegenwärtigen Fall $U^{(1)} = 0$ und $Y^{(1)}$ ist folglich für alle flüssige Lagen, welche das Sphäroid ausmachen, gleich Null.

Man betrachte nun die allgemeine Gleichung

$$Y^{(i)} = a^s . U^{(i)} + a^{s'} . U'^{(i)} + \text{etc.}$$

Da s, wie man gesehen hat, gleich $i - 2$ ist, so ist s gleich Null oder positiv, wenn i gleich oder gröſser als 2 ist; die Funktionen $U'^{(i)}$, $U''^{(i)}$ etc. sind überdies durch $U^{(i)}$ vermittelst der Gleichung (e) des jetzigen Satzes gegeben; so daſs man

$$Y^{(i)} = h . U^{(i)}$$

hat, wo h eine Funktion von a, und $U^{(i)}$ von a unabhängig ist. Substituirt man diesen Werth von $Y^{(i)}$ in die Differenzialgleichung von $Y^{(i)}$, so erhält man

$$\frac{d^2 h}{da^2} = \left(i.(i+1) - \frac{6\varrho . a^3}{\int \varrho . d . a^3}\right) . \frac{h}{a^2} - \frac{6\varrho . a^2}{\int \varrho . d . a^3} . \frac{dh}{da}.$$

Das Product $i\,(i + 1)$ ist gröſser als $\frac{6\varrho . a^3}{\int \varrho . d . a^3}$, wenn i gleich oder gröſser als

2 ist. Denn der Bruch $\frac{\varrho \cdot a^3}{\int \varrho . d . a^3}$ ist kleiner als Eins, weil sein Nenner $\int \varrho . d . a^3$ gleich $\varrho . a^3 - \int a^3 . d\varrho$, und die Gröſse $-\int a^3 . d\varrho$ positiv ist, da ϱ vom Mittelpunkt nach der Oberfläche abnimmt.

Es folgt hieraus, daſs h und $\frac{dh}{da}$ beständig vom Mittelpunkt bis zur Oberfläche positiv sind. Wir nehmen, um dies zu zeigen, an, daſs diese zwey Gröſsen positiv sind, wenn man vom Mittelpunkt ausgeht; dh muſs dann früher als h negativ werden, und es ist klar, daſs es hierzu durch Null gehen muſs; im Augenblick aber, wo es Null wird, wird d^2h vermöge der vorhergehenden Gleichung positiv, und dh fängt also zu wachsen an; es kann daher niemals negativ werden, woraus folgt, daſs h und dh beständig dasselbe Zeichen vom Mittelpunkt bis zur Oberfläche haben. Nun sind aber diese beiden Gröſsen positiv, wenn man vom Mittelpunkt ausgeht; denn man hat, vermöge der Gleichung (e), $s' - 2 = s + n - 2$; dies giebt $s' = i + n - 2$; man hat alsdann

$$(s' + i + 3) . (s' - i + 2) . U^{(i)} = \frac{6n . (s + 1) . \gamma . U^{(i)}}{(n + 3) . \beta};$$

woraus man

$$U^{(i)} = \frac{6(i - 1) . \gamma . U^{(i)}}{(n + 3)(2i + n + 1)\beta}$$

erhält, und folglich

$$h = a^{i-2} + \frac{6(i - 1) . \gamma . a^{i+n-2}}{(n + 3)(2i + n + 1)\beta} + \text{etc.}$$

$$\frac{dh}{da} = (i - 2)a^{i-3} + \frac{6(i - 1)(i + n - 2) . \gamma . a^{i+n-3}}{(n + 3)(2i + n + 1)\beta} + \text{etc.}$$

Da γ, β und n positiv sind, so sieht man, daſs h und dh positiv sind, wenn i gleich oder gröſser als 2 ist; sie sind also beständig vom Mittelpunkt bis zur Oberfläche positiv.

$Z^{(i)}$ ist für die Erde, für den Mond, für Jupiter u. s. w. gleich Null oder unmerklich, wenn i gleich oder gröſser als 3 ist; die Gleichung (2) des vorhergehenden Satzes wird dann

$$0 = \left[3a^{2i+1} . \int \varrho . d . \left(\frac{h}{a^{i-2}}\right) - (2i + 1)a^i . h . \int \varrho . d . a^3 + 3\int \varrho . d . (a^{i+3} . h)\right] . U^{(i)},$$

wo

wo das erste Integral von $a = a$ bis $a = 1$, und die zwey andern von $a = 0$ bis $a = a$ genommen werden müssen. An der Oberfläche, wo $a = 1$ ist, verwandelt sich diese Gleichung in folgende [38]:

$$0 = [-(2i+1) \cdot h \cdot \int \varrho \cdot d \cdot a^3 + 3 \int \varrho \cdot d \cdot (a^{i+3} \cdot h)]\, U^{(i)},$$

welcher Gleichung man folgende Gestalt geben kann [39]:

$$0 = [-(2i-2)\, \varrho \cdot h + (2i+1) \cdot h \cdot \int a^3 \cdot d\varrho - 3 \int a^{i+3}\, h \cdot d\varrho] \cdot U^{(i)}.$$

$d\varrho$ ist negativ vom Mittelpunkt an bis zur Oberfläche, und h wächst in demselben Zwischenraum; die Funktion $(2i+1)\, h \cdot \int a^3 \cdot d\varrho - 3 \int a^{i+3} \cdot h \cdot d\varrho$ ist daher in demselben Zwischenraum negativ; und der Koeffizient von $U^{(i)}$ in der vorhergehenden Gleichung ist negativ, und kann an der Oberfläche nicht gleich Null seyn. $U^{(i)}$ muſs also gleich Null seyn; dies giebt $Y^{(i)} = 0$; der Ausdruck des Halbmessers des Sphäroids verwandelt sich dadurch in $a + \alpha a \cdot [Y^{(0)} + Y^{(2)}]$; das heiſst, die Oberfläche jeder Horizontallage des Sphäroids ist elliptisch, und folglich ist die äuſsere Oberfläche elliptisch.

Für die Erde ist $Z^{(2)}$ nach Satz 23 gleich $-\frac{g}{2\alpha} \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3})$; die Gleichung (2) des vorhergehenden Satzes giebt dann

$$0 = [\tfrac{4}{5}\pi \cdot a^5 \cdot \int \varrho \cdot dh - \tfrac{4}{3}\pi a^2 \cdot h \cdot \int \varrho \cdot da^3 + \tfrac{4}{5}\pi \cdot \int \varrho\, d \cdot (a^5 \cdot h)]\, U^{(2)} - \frac{g}{2\alpha} \cdot a^2 \cdot (\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

An der Oberfläche ist das erste Integral $\int \varrho \cdot dh$ gleich Null; man hat also an dieser Oberfläche, wo $a = 1$ ist,

$$U^{(2)} = \frac{-\frac{1}{2\alpha}\, g \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3})}{\frac{4}{3}\pi \cdot h \cdot \int \varrho \cdot d \cdot a^3 - \frac{4}{5}\pi \cdot \int \varrho \cdot d \cdot (a^5 \cdot h)}.$$

Es sey $\alpha \phi$ das Verhältniſs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator, und da der Ausdruck der Schwere bis auf die Gröſsen von der Ordnung α

38) An der Oberfläche fallen die beiden Grenzen, zwischen welchen das Integral $3 a^{2i+1} \int \rho \cdot d \cdot \left(\frac{h}{a^{i-2}}\right)$ genommen werden muſs, zusammen, und es ist folglich gleich Null.

39) Man hat nämlich, wenn man theilweise integrirt, $-(2i+1)\, h \cdot \int \rho \cdot d \cdot a^3 = -(2i+1)\, h \cdot \rho \cdot a^3 + (2i+1)\, h \cdot \int a^3 \cdot d\rho$ und $3 \int \rho \cdot d \cdot (a^{i+3} \cdot h) = 3\rho \cdot a^{i+3} \cdot h - 3 \int a^{i+3} \cdot h \cdot d\rho$. Setzt man in den auſserhalb des Integralzeichens sich befindenden Gliedern $a = 1$, so erhält man die im Text gegebene Gleichung.

gleich $\frac{4}{3}\pi \int \varrho . d . a^5$ ist, so hat man $g = \frac{4}{3}\pi . \alpha \phi . \int \varrho . d . a^5$, und folglich

$$U^{(2)} = \frac{-\phi . (\mu^2 - \frac{1}{3})}{2h - \frac{2}{5} . \frac{\int \varrho . d . (a^5 . h)}{\int \varrho . a^2 . da}}.$$

Begreift man daher die Funktion

$$\alpha Y^{(0)} = \frac{\alpha h . \phi}{5h - \frac{3}{5} . \frac{\int \varrho . d . (a^5 . h)}{\int \varrho . a^2 . da}},$$

in der willkührlichen beständigen Gröſse a, welche wir zur Einheit angenommen haben, so ist der Halbmesser des Erdsphäroids an der Oberfläche gleich

$$1 + \frac{\alpha h . \phi (1 - \mu^2)}{2h - \frac{2 . \int \varrho . d . (a^5 . h)}{5 . \int \varrho . a^2 da}}.$$

Dieser Halbmesser ist der eines durch Umdrehung entstandenen Sphäroids, dessen halbe kleine Axe die Einheit, und dessen halbe groſse Axe gleich

$$1 + \frac{\alpha h . \phi}{2h - \frac{2 . \int \varrho . d . (a^5 . h)}{5 . \int \varrho . a^2 . da}}$$

ist. Nimmt man also an, daſs die Erde flüssig ist, so kann sie nur die Gestalt eines durch Umdrehung entstandenen Ellipsoids haben, wovon alle Lagen, welche beständige Dichte haben, elliptisch und durch Umdrehung erzeugt sind, und wo die Elliptizität vom Mittelpunkt zur Oberfläche wächst, die Dichte hingegen abnimmt. Die Differenzialgleichung der zweyten Ordnung

$$\left(\frac{d^2 h}{d a^2}\right) = \frac{6h}{a^2} . \left(1 - \frac{\varrho a^3}{3 . \int \varrho . a^2 . da}\right) - \frac{2 \varrho a^2}{\int \varrho . a^2 . da} . \frac{dh}{da}$$

giebt das Verhältniſs der Elliptizität zur Dichte. Diese Gleichung kann nur in einigen besondern Voraussetzungen für die Dichte ϱ durch die bekannten Methoden integrirt werden; wäre aber das Gesetz der Elliptizitäten gegeben, so würde man leicht das Gesetz der zugehörenden Dichten erhalten. Man hat gesehen, daſs der durch das Integral dieser Gleichung gegebene Werth von h in der gegenwärtigen Untersuchung nur eine willkührliche Gröſse enthält, welche in dem vorhergehenden Werth des Halbmessers des Sphäroids verschwindet; es giebt daher nur eine einzige mögliche Figur des Gleichgewichts, welche sehr wenig von der Kugel verschieden ist, und man kann sich leicht versichern, daſs

die Grenzen der Abplattung dieser Figur $\frac{\alpha\phi}{2}$ und $\frac{5}{4}\alpha\phi$ sind, wovon die erstere dem Fall entspricht, wo die ganze Masse des Sphäroids im Mittelpunkt vereinigt wäre, die zweyte hingegen dem Fall, wo diese Masse gleichartig wäre.

Die Richtungen der Schwere, von irgend einem Punkt der Oberfläche an bis zum Mittelpunkt, bilden keine gerade, sondern eine krumme Linie, deren Elemente auf die Horizontallagen, durch welche sie geht, senkrecht sind. Diese krumme Linie ist die rechtwinklige Trajectoria [40]) aller Ellipsen, welche durch ihre Umdrehung diese Lagen erzeugen. Man nehme, um ihre Natur zu bestimmen, den vom Mittelpunkt zu einem Punkt der Oberfläche gezogenen Halbmesser als Axe an, und es sey θ der Winkel, welchen dieser Halbmesser mit der geometrischen Umdrehungsaxe bildet. Man hat gesehen, dafs der allgemeine Ausdruck des Halbmessers irgend einer Lage des Sphäroids gleich $a + \alpha k . a h . (1 - \mu^2)$ ist, wo k von a unabhängig ist; nennt man nun $\alpha y'$ die von irgend einem Punkt der krummen Linie auf ihre Axe gezogene Ordinate, so kann man leicht hieraus schliefsen, dafs

$$\alpha y' = \alpha a k . \sin 2\theta . \left(c - \int \frac{h\, da}{a} \right)$$

ist, wo c der ganze Werth des Integrals $\int \frac{h\, da}{a}$, vom Mittelpunkt bis zur Oberfläche genommen, ist.

31. Wir wollen nun den allgemeinen Fall betrachten, wo das Sphäroid zwar wie vorher an der Oberfläche flüssig ist, aber einen festen Kern von irgend einer, von der Kugel wenig verschiedenen, Gestalt enthält. Der vom Schwerpunkt des Sphäroids an seine Oberfläche gezogene Halbmesser und das Gesetz der Schwere an dieser Oberfläche, haben einige allgemeine Eigenschaften, deren Betrachtung desto wesentlicher ist, da diese Eigenschaften von allen Voraussetzungen unabhängig sind.

40) Joh. Bernoulli und Euler haben sich vorzüglich mit dieser Aufgabe beschäftigt; der erstere in seinen Werken, der letztere in seinen opusculis, im 8ten Bande der ältern Kommentarien und im 14ten und 17ten Bande der neuern Kommentarien der Petersburger Akademie. Lacroix hat sie nach Euler dargestellt im 2ten Theil seines Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, pag. 298. §. 604.

Die erste dieser Eigenschaften besteht darinn, daſs der flüssige Theil des Sphäroids im Zustand des Gleichgewichts immer eine solche Gestalt annehmen muſs, daſs die Funktion $Y^{(1)}$ aus dem Ausdruck des Halbmessers verschwindet, welcher vom Schwerpunkt des ganzen Sphäroids zu seiner Oberfläche gezogen worden ist, so daſs der Schwerpunkt dieser Fläche mit dem des Sphäroids zusammenfällt.

Wir bemerken, um dies zu zeigen, daſs, wenn man annimmt, daſs R den vom Schwerpunkt des Sphäroids zu irgend einem seiner Theilchen gezogenen Halbmesser bezeichnet, dann der Ausdruck dieses Theilchens $\varrho . R^2 . dR . d\mu . d\varpi$ ist, und daſs man nach dem 12ten Satz vermöge der Eigenschaften des Schwerpunkts folgende Gleichungen hat:

$$o = \int \varrho \,.\, R^3 \,.\, dR \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \mu;$$

$$o = \int \varrho \,.\, R^3 \,.\, dR \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \sin \varpi;$$

$$o = \int \varrho \,.\, R^3 \,.\, dR \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \cos \varpi.$$

Man gedenke sich nun das Integral $\int \varrho \,.\, R^3 \,.\, dR$ in Beziehung auf R vom Anfangspunkt der R bis an die Oberfläche des Sphäroids genommen, und hernach in eine Reihe von der Form

$$N^{(0)} + N^{(1)} + N^{(2)} + N^{(3)} + \text{etc.}$$

entwickelt, wo $N^{(i)}$ für jeden Werth von i der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thun muſs:

$$o = \left\{ \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dN^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2N^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).N^{(i)};$$

so hat man nach Satz 12, wenn i von der Einheit verschieden ist,

$$o = \int N^{(i)} \,.\, \mu d\mu \,.\, d\varpi; \qquad o = \int N^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \sin \varpi;$$

$$o = \int N^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \cos \varpi.$$

Die drey vorhergehenden durch die Natur des Schwerpunkts gegebenen Gleichungen verwandeln sich in

$$o = \int N^{(1)} \,.\, \mu \,.\, d\mu \,.\, d\varpi; \qquad o = \int N^{(1)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \sin \varpi;$$

$$o = \int N^{(1)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \cos \varpi.$$

$N^{(1)}$ hat folgende Form: $H\mu + H' . \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \sin \varpi + H'' . \sqrt{1-\mu^2} . \cos \varpi$; setzt man diesen Werth in diese drey Gleichungen, so erhält man $H = o$;

$H' = 0$; $H'' = 0$ und folglich

$$N^{(1)} = 0;$$

dies ist die nothwendige Bedingung, wenn der Anfangspunkt der R im Schwerpunkt des Sphäroids seyn soll.

Wir wollen nun sehen, was $N^{(1)}$ in Beziehung auf die Sphäroide wird, welche wenig von der Kugel verschieden sind, und von einem Flüssigen, das im Gleichgewicht ist, bedeckt werden. Man hat in diesem Fall $R = a.(1 + \alpha y)$, und das Integral $\int \varrho \,.\, R^3 \,.\, dR$ wird $\frac{1}{4} \int \varrho \,.\, d \,.\, [a^4 \,.\, (1 + 4\,\alpha y)]$, wo das Differenzial und das Integral bloſs auf die veränderliche Gröſse a, wovon ϱ eine Funktion ist, sich beziehen. Substituirt man für y seinen Werth $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} +$ etc., so erhält man

$$N^{(1)} = \alpha \,.\int \varrho \,.\, d \,.\, (a^4 \,.\, Y^{(1)}).$$

Die Gleichung (2) des 29sten Satzes giebt an der Oberfläche, wo $a = 1$ ist, und wenn man bemerkt, daſs $Z^{(1)}$ gleich Null ist,

$$\int \varrho \,.\, d \,.\, (a^4 \,.\, Y^{(1)}) = Y^{(1)} \,.\int \varrho \,.\, d \,.\, a^3;$$

wo der Werth von $Y^{(1)}$ im zweyten Theil dieser Gleichung sich auf die Oberfläche bezieht. Da nun $N^{(1)} = 0$ ist, wenn der Anfangspunkt der R im Schwerpunkt des Sphäroids ist, so hat man auch $Y^{(1)} = 0$.

32. Der bleibende Zustand des Gleichgewichts der himmlischen Körper giebt uns noch einige Eigenschaften ihrer Halbmesser zu erkennen. Wenn sich die Planeten nicht genau, oder wenigstens nicht sehr nahe, um eine ihrer drey Hauptumdrehungsaxen [41]) drehten, so würden daraus in der Lage ihrer Umdrehungsaxen Veränderungen entstehen, welche vorzüglich für die Erde sehr merklich seyn würden; und da die genauesten Beobachtungen uns keine zu erkennen geben, so müssen wir daraus schlieſsen, daſs alle Theile der himmlischen Körper und vorzüglich die flüssigen Theile ihrer Oberflächen sich seit langer Zeit so geordnet haben, daſs ihr Zustand des Gleichgewichts und folglich ihre Umdrehungsaxen bleibend sind. Es ist in der That sehr natürlich zu denken, daſs

41) Die Umdrehungsaxen, von welchen in diesem Satz die Rede ist, sind die Axen, um welche sich der Planet wirklich dreht; da hingegen dies Wort in den vorhergehenden Sätzen diejenigen Axen anzeigt, welche man sich zur geometrischen Entstehung der Oberfläche des Planeten vorstellen muſs. Der Uebersetzer hat es nicht gewagt, ein neues Wort einzuführen, da keine Zweydeutigkeit aus dem doppelten Gebrauch dieses Wortes entsteht.

sie nach einer grofsen Anzahl Schwankungen einen bleibenden Zustand vermöge des Widerstandes, welchen sie erfahren, haben annehmen müssen. Wir wollen nun sehen, welche Bedingungen hieraus im Ausdruck der Halbmesser der himmlischen Körper entstehen.

Nennt man x, y, z die rechtwinklichten Koordinaten eines Theilchens dM des Sphäroids, welche sich auf die drey Hauptaxen beziehen, und wo die Axe der x die Umdrehungsaxe des Sphäroids ist; so hat man vermöge der im ersten Buch bewiesenen Eigenschaften dieser Axen

$$0 = \int xy \, . \, dM; \qquad 0 = \int xz \, . \, dM; \qquad 0 = \int yz \, . \, dM;$$

wo die Integrale auf die ganze Masse des Sphäroids erstreckt werden müssen. Ist nun R der vom Anfangspunkt der Koordinaten zum Theilchen dM gezogene Halbmesser, θ der Winkel, welchen R mit der Umdrehungsaxe macht, und ϖ der Winkel, welchen die durch diese Axe und durch R gehende Ebene mit der Ebene macht, die durch diese Axe und durch diejenige der beiden Hauptaxen geht, welche die Axe der y ist; so hat man

$$x = R\mu; \qquad y = R \, . \, \sqrt{1-\mu^2} \, . \, \cos\varpi; \qquad z = R \, . \, \sqrt{1-\mu^2} \, . \, \sin\varpi;$$
$$dM = \varrho \, . \, R^2 \, . \, dR \, . \, d\mu \, . \, d\varpi.$$

Die drey durch die Natur der Hauptumdrehungsaxen gegebenen Gleichungen verwandeln sich so in folgende:

$$0 = \int \varrho \, . \, R^4 \, . \, dR \, . \, d\mu \, . \, d\varpi \, . \, \mu \, . \, \sqrt{1-\mu^2} \, . \, \cos\varpi;$$
$$0 = \int \varrho \, . \, R^4 \, . \, dR \, . \, d\mu \, . \, d\varpi \, . \, \mu \, . \, \sqrt{1-\mu^2} \, . \, \sin\varpi;$$
$$0 = \int \varrho \, . \, R^4 \, . \, dR \, . \, d\mu \, . \, d\varpi \, . \, (1-\mu^2) \, . \, \sin 2\varpi.$$

Man gedenke sich nun das Integral $\int \varrho \, . \, R^4 \, . \, dR$ in Beziehung auf R, von $R = 0$ bis zum Werth von R an der Oberfläche des Sphäroids genommen, und hernach in eine Reihe von der Form $U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} +$ etc. entwickelt, wo $U^{(i)}$ für jeden Werth von i der folgenden Differenzialgleichung Genüge thun mufs:

$$0 = \left\{ \frac{d \, . \left[(1-\mu^2) \, . \left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 U^{(i)}}{d\varpi^2} \right)}{1-\mu^2} + i \, . \, (i+1) \, . \, U^{(i)}.$$

Man hat dann durch den Lehrsatz im 12ten Satz, wenn i von 2 verschieden ist, und wenn man bemerkt, dafs die Funktionen $\mu \, . \, \sqrt{1-\mu^2} \, . \, \cos\varpi$, $\mu \, . \, \sqrt{1-\mu^2} \, . \, \sin\varpi$ und $(1-\mu^2) \, . \, \sin 2\varpi$ in der Form $U^{(2)}$ begriffen sind,

$$0 = \int U^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \cos\varpi;$$
$$0 = \int U^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \sin\varpi;$$
$$0 = \int U^{(i)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, (1-\mu^2) \,.\, \sin 2\varpi.$$

Die drey aus der Natur der Umdrehungsaxen entstehenden Gleichungen verwandeln sich so in folgende:

$$0 = \int U^{(2)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \cos\varpi;$$
$$0 = \int U^{(2)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, \sin\varpi;$$
$$0 = \int U^{(2)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, (1-\mu^2) \,.\, \sin 2\varpi.$$

Diese Gleichungen hängen nur von dem Werth $U^{(2)}$ ab: dieser Werth ist von der Form

$$H.(\mu^2-\tfrac{1}{3}) + H'.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi + H''.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi + H'''.(1-\mu^2).\sin 2\varpi$$
$$+ H^{IV}.(1-\mu^2).\cos 2\varpi.$$

Substituirt man ihn in die drey vorhergehenden Gleichungen, so erhält man

$$H' = 0; \quad H'' = 0; \quad H''' = 0.$$

Dies sind die drey nothwendigen Bedingungen, wenn die drey Axen der x, der y und der z wirkliche Umdrehungsaxen seyn sollen, und alsdann wird $U^{(2)}$ von folgender Form seyn:

$$H \,.\, (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + H^{IV} \,.\, (1-\mu^2) \,.\, \cos 2\varpi.$$

Ist das Sphäroid ein fester, von der Kugel wenig verschiedener, Körper und von einem Flüssigen bedeckt, welches im Gleichgewicht ist; so hat man $R = a.(1+\alpha y)$ und folglich

$$\int \varrho \,.\, R^4 \,.\, dR = \tfrac{1}{5}\int \varrho \,.\, d \,.\, [a^5 \,.\, (1+5\,\alpha y)].$$

Substituirt man statt y seinen Werth $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} +$ etc., so erhält man

$$U^{(2)} = \alpha \,.\int \varrho \,.\, d \,.\, (a^5 \,.\, Y^{(2)}).$$

Die Gleichung (2) des 29sten Satzes giebt an der Oberfläche des Sphäroids

$$\frac{4\pi}{5} \,.\int \varrho \,.\, d \,.\, (a^5 \,.\, Y^{(2)}) = \tfrac{4}{3}\pi \,.\, Y^{(2)} \,.\int \varrho \,.\, d \,.\, a^3 - Z^{(2)},$$

wo sich $Y^{(2)}$ und $Z^{(2)}$ im zweyten Theil dieser Gleichung auf die Oberfläche beziehen; man hat also

$$U^{(2)} = \tfrac{5}{3}\,\alpha \,.\, Y^{(2)} \,.\int \varrho \,.\, d \,.\, a^3 - \frac{5\,\alpha \,.\, Z^{(2)}}{4\pi}.$$

Der Werth von $Z^{(2)}$ hat folgende Form:

$$- \frac{g}{2} . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + g' . \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . \sin \varpi + g'' . \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . \cos \varpi$$
$$+ g''' . (1 - \mu^2) . \sin 2\varpi + g^{\text{IV}} . (1 - \mu^2) . \cos 2\varpi,$$

und der von $Y^{(2)}$ ist von folgender:

$$- h . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + h' . \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . \sin \varpi + h'' . \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . \cos \varpi$$
$$+ h''' . (1 - \mu^2) . \sin 2\varpi + h^{\text{IV}} . (1 - \mu^2) . \cos 2\varpi.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, und $H . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + H^{\text{IV}} . (1 - \mu^2) . \cos 2\varpi$ statt $U^{(2)}$, so erhält man

$$h' = \frac{g'}{4\pi . \int \rho . a^2 da}; \quad h'' = \frac{g''}{4\pi . \int \rho . a^2 da}; \quad h''' = \frac{g'''}{4\pi . \int \rho . a^2 da}.$$

Dies sind die Bedingungen, welche aus der Voraussetzung entspringen, daſs das Sphäroid sich um eine seiner Hauptumdrehungsaxen dreht. Diese Voraussetzung bestimmt die beständigen Gröſsen h', h'', h''' vermittelst der Werthe von g', g'', g'''; sie läſst aber die Gröſsen h und h^{IV}, so wie auch die Funktionen $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$ etc. unbestimmt.

Wenn die von der Anziehung der Theilchen des Sphäroids verschiedenen Kräfte bloſs in der aus seiner Umdrehungsbewegung entstehenden Mittelpunktsfliehkraft bestehen, so hat man $g' = 0$, $g'' = 0$, $g''' = 0$; folglich $h' = 0$, $h'' = 0$, $h''' = 0$, und der Ausdruck von $Y^{(2)}$ hat folgende Form:

$$- h . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + h^{\text{IV}} . (1 - \mu^2) . \cos 2\varpi.$$

33. Wir wollen nun den Ausdruck der Schwere an der Oberfläche des Sphäroids betrachten. Nennt man diese Kraft p, so sieht man leicht aus dem 25sten Satz, daſs man ihren Werth erhält, wenn man den zweyten Theil der Gleichung (1) des 29sten Satzes in Beziehung auf r differenziirt, und dies Differenzial durch $- dr$ dividirt; man erhält so an der Oberfläche:

$$p = \frac{4\pi}{3r^2} . \int \rho . d\, a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r^2} . \int \rho . d . \left[a^3 . Y^{(0)} + \frac{2a^4}{3r} . Y^{(1)} + \frac{3a^5}{5r^2} . Y^{(2)} + \frac{4a^6}{7r^3} . Y^{(3)} + \text{etc.} \right]$$
$$- \alpha r . [2 Z^{(0)} + 2 Z^{(2)} + 3r . Z^{(3)} + 4r^2 . Z^{(4)} + \text{etc.}],$$

wo die Integrale von $a = 0$ bis $a = 1$ genommen werden müssen. Der Halbmesser r ist an der Oberfläche gleich $1 + \alpha y$ oder $1 + \alpha . [Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \text{etc}]$, man erhält also

$p =$

$$p = \frac{4\pi}{3} . \int \varrho . d . a^3 - \frac{8\alpha\pi}{3} [Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \text{etc.}] . \int \varrho . d . a^3$$

$$+ 4\alpha\pi . \int \varrho . d . \left[a^3 Y^{(0)} + \frac{2a^4}{3} . Y^{(1)} + \frac{3a^5}{5} . Y^{(2)} + \frac{4a^6}{7} . Y^{(3)} + \text{etc.} \right]$$

$$- \alpha . [2 Z^{(0)} + 2 Z^{(2)} + 3 Z^{(3)} + 4 Z^{(4)} + \text{etc.}].$$

Man kann die Integrale aus diesem Ausdruck wegschaffen, vermittelst der Gleichung (2) des 29sten Satzes, welche an der Oberfläche sich in folgende verwandelt:

$$\frac{4\pi}{2i+1} . \int \varrho . d . (a^{i+3} . Y^{(i)}) = \tfrac{4}{3}\pi . Y^{(i)} . \int \varrho . d . a^3 - Z^{(i)}.$$

Setzt man dann

$$P = \tfrac{4}{3}\pi . \int \varrho . d . a^3 - \frac{8\alpha\pi}{3} . Y^{(0)} + 4\alpha\pi . \int \varrho . d . (a^3 . Y^{(0)}) - 2\alpha . Z^{(0)};$$

so hat man

$$p = P + \alpha P . [Y^{(2)} + 2\, Y^{(3)} + 3\, Y^{(4)} + \ldots + (i-1)\, Y^{(i)} + \text{etc.}]$$
$$- \alpha . [5\, Z^{(2)} + 7\, Z^{(3)} + 9\, Z^{(4)} + \ldots + (2i+1)\, Z^{(i)} + \text{etc.}].$$

Man hat die Aenderung der Schwere an der Oberfläche der Erde durch Beobachtung der Längen des Sekundenpendels erkannt. Man hat im ersten Buch gesehen, daſs diese Längen der Schwere proportional sind; sind also l und L die den Schweren p und P entsprechenden Längen des Pendels, so giebt die vorhergehende Gleichung

$$l = L + \alpha L . [Y^{(2)} + 2\, Y^{(3)} + 3\, Y^{(4)} \ldots + (i-1)\, Y^{(i)} + \text{etc.}]$$
$$- \frac{\alpha L}{P} . [5\, Z^{(2)} + 7\, Z^{(3)} + 9\, Z^{(4)} \ldots + (2i+1)\, Z^{(i)} + \text{etc.}].$$

Für die Erde ist $\alpha Z^{(2)}$ nach Satz 23. gleich $- \frac{g}{2} . (\mu^2 - \frac{1}{3})$, oder, welches dasselbe ist, gleich $- \frac{\alpha \phi}{2} . P . (\mu^2 - \frac{1}{3})$, wo $\alpha\phi$ das Verhältniſs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator ist; überdies sind $Z^{(3)}$, $Z^{(4)}$ etc. gleich Null; man hat also

$$l = L + \alpha L . [Y^{(2)} + 2\, Y^{(3)} + 3\, Y^{(4)} \ldots + (i-1)\, Y^{(i)} + \text{etc.}]$$
$$+ \tfrac{5}{2}\, \alpha\phi . L . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Der Krümmungshalbmesser eines Meridians des Sphäroids, dessen Halbmesser $1 + \alpha y$ ist, ist

$$1 + \alpha \cdot \left(\frac{d \cdot \mu y}{d\mu}\right) + \alpha \cdot \left\{\frac{d \cdot \left[(1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dy}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\}.$$

Bezeichnet man daher durch c die Gröſse eines Grades des Kreises, dessen Halbmesser der von uns angenommenen Einheit gleich ist, so wird ein Grad des Meridians des Sphäroids, wie folgt, ausgedrückt [42]:

42) Die beiden rechtwinklichten Koordinaten des gegebenen Punktes sind $(1 + \alpha y)\, \mu$ und $(1 + \alpha y) \sqrt{1 - \mu^2}$. Man bezeichne sie mit x' und mit y'. Der Krümmungshalbmesser ist, wenn kein Differenzial beständig angenommen wird, und wenn man das Element des Bogens durch ds bezeichnet, gleich

$$\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}};$$

wie man sehr leicht aus der Anmerkung zum 9ten Satz des ersten Buches siehet. Nun ist aber, wenn man das Quadrat von α vernachläſsigt, $\frac{dx'}{d\mu} = 1 + \alpha y + \alpha\mu \cdot \frac{dy}{d\mu}$;
$\frac{dy'}{d\mu} = -\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot (1 + \alpha y) + \alpha \cdot \sqrt{1-\mu^2} \cdot \frac{dy}{d\mu}$ und $\frac{dx'^2}{d\mu^2} = 1 + 2\alpha y + 2\alpha\mu \cdot \frac{dy}{d\mu}$;
$\frac{dy'^2}{d\mu^2} = + \frac{(1 + 2\alpha y)\,\mu^2}{1 - \mu^2} - 2\alpha\mu \cdot \frac{dy}{d\mu}$, folglich $\frac{dx'^2 + dy'^2}{d\mu^2}$ oder $\frac{ds^2}{d\mu^2} = \frac{1 + 2\alpha y}{1 - \mu^2}$, oder
$\frac{ds}{d\mu} = \frac{1 + \alpha y}{\sqrt{1 - \mu^2}}$. Differenziirt man die gefundenen Differenziale von neuem, so findet man

$$\frac{d^2x'}{d\mu^2} = 2\alpha \cdot \frac{dy}{d\mu} + \alpha\mu \cdot \frac{d^2y}{d\mu^2};\quad \frac{d^2y'}{d\mu^2} = \frac{-(1 + \alpha y)}{(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \mu^2}} \cdot \left[\frac{d \cdot \left[(1 - \mu^2) \cdot \frac{dy}{d\mu}\right]}{d\mu}\right] \text{ und}$$

$\frac{d^2s'}{d\mu^2} = \frac{(1 + \alpha y)\,\mu}{(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \mu^2}} \cdot \frac{dy}{d\mu}$. Quadrirt man diese Werthe und vernachläſsigt man die Quadrate von α, so erhält man

$$\frac{d^2x'^2 + d^2y'^2 - d^2s'^2}{d\mu^4} = \frac{1 + 2\alpha y - 2\mu\alpha \cdot \frac{dy}{d\mu} - 2\alpha \cdot \left[\frac{d \cdot \left[(1 - \mu^2) \cdot \frac{dy}{d\mu}\right]}{d\mu}\right]}{(1 - \mu^2)^2}$$

und wenn man die Quadratwurzel dieser Gröſse vermittelst des Binomischen Lehrsatzes nimmt,

$$\left(\frac{d^2x'^2 + d^2y'^2 - d^2s'^2}{d\mu^4}\right)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \mu^2) \cdot \left[1 - \alpha y + \alpha\mu \cdot \frac{dy}{d\mu} + \alpha \cdot \left[\frac{d \cdot \left[(1 - \mu^2) \cdot \frac{dy}{d\mu}\right]}{d\mu}\right]\right];$$

multiplicirt man diese Gröſse mit ds^2, oder mit $\frac{1 + 2\alpha y}{1 - \mu^2}$, so erhält man den Krümmungshalbmesser gleich

$$c \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left(\frac{d \cdot \mu y}{d\mu}\right) + \alpha \cdot \left\{ \frac{d \cdot \left[(1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dy}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} \right\},$$

wo y gleich $Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots$ ist. Man kann $Y^{(0)}$ dadurch wegschaffen, daſs man es in die willkührliche beständige Gröſse, welche wir zur Einheit angenommen haben, begreift; und $Y^{(1)}$ dadurch, daſs man den Anfangspunkt der Halbmesser in den Schwerpunkt des ganzen Sphäroids setzt. Dieser Halbmesser wird dann

$$1 + \alpha \cdot [Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \text{etc.}].$$

Bemerkt man ferner, daſs

$$\left\{ \frac{d \cdot \left[(1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} = -i \cdot (i+1) \cdot Y^{(i)} - \frac{\left(\frac{d^2 Y^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2},$$

so verwandelt sich der Ausdruck des Meridiangrads in folgenden:

$$c - \alpha c \cdot [5\, Y^{(2)} + 11\, Y^{(3)} \ldots + (i^2 + i - 1)\, Y^{(i)} + \text{etc.}]$$

$$+ \alpha c \mu \cdot \left[\left(\frac{dY^{(2)}}{d\mu}\right) + \left(\frac{dY^{(3)}}{d\mu}\right) + \text{etc.}\right] - \alpha c \cdot \frac{\left[\left(\frac{d^2 Y^{(2)}}{d\varpi^2}\right) + \left(\frac{d^2 Y^{(3)}}{d\varpi^2}\right) + \text{etc.}\right]}{1-\mu^2}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke des Erdhalbmessers, der Pendellänge, und der Gröſse des Meridiangrades, so sieht man, daſs das Glied $\alpha Y^{(i)}$ des Erdhalbmessers im Ausdruck der Pendellänge mit $(i-1)$, und im Ausdruck des Grades mit $(i^2 + i - 1)$ multiplicirt ist. Es folgt hieraus, daſs dies Glied, wofern $i - 1$ nur etwas beträchtlich ist, in den Beobachtungen der Pendellängen bemerkbarer seyn wird, als in denen der Horizontalparallaxe des Monds, welche dem Erdhalbmesser proportional ist; und daſs dies Glied noch weit bemerkbarer in den Gradmessungen als in den Pendellängen seyn wird. Hiervon liegt die Ursache darinn, daſs die Glieder des Ausdrucks des Erdhalbmessers zwey Differentiationen im Ausdruck des Meridiangrades erfahren, und daſs jede

$$1 + \alpha y + \alpha\mu \cdot \frac{dy}{d\mu} + \alpha \cdot \left[\frac{d \cdot \left[(1-\mu^2) \cdot \frac{dy}{d\mu}\right]}{d\mu}\right],$$

wo man noch statt $\alpha y + \alpha\mu \cdot \frac{dy}{d\mu}$ seinen Werth $\alpha \cdot \frac{d \cdot y\mu}{d\mu}$ setzen kann.

Differenziation diese Glieder mit dem zugehörenden Exponenten von μ multiplicirt, und sie also beträchtlicher macht. Die Glieder des Ausdrucks des Erdhalbmessers werden dreymal im Ausdruck der Aenderung zweyer auf einander folgenden Meridiangrade differenziirt. Hierdurch können diejenigen Glieder, welche die Figur der Erde vom Ellipsoid entfernen, sehr beträchtlich werden, und die Elliptizität, welche man aus der Aenderung der Meridiangrade schliefst, kann dadurch sehr von der verschieden seyn, welche die beobachteten Pendellängen geben. Diese drey Ausdrücke haben den Vortheil, von der innern Beschaffenheit der Erde, das heifst, von der Gestalt und Dichte ihrer Lagen unabhängig zu seyn; so dafs man sogleich die Pendellänge haben wird, wenn man durch die Gradmessungen und Beobachtungen der Parallaxen dahin gelangt ist, die Funktionen $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}$ etc. zu bestimmen. Man wird daher auf diese Art prüfen können, ob das Gesetz der allgemeinen Schwere mit der beobachteten Gestalt der Erde, und mit den beobachteten Aenderungen der Schwere an ihrer Oberfläche übereinstimmt. Diese merkwürdigen Verhältnisse zwischen den Ausdrückungen der Meridiangrade und der Pendellängen können noch dazu dienen, die Hypothesen zu prüfen, welche die gemessenen Meridiangrade vorstellen können: wir wollen sie, um dies zu zeigen, auf die Hypothese anwenden, welche Bouguer vorgeschlagen hat, um die im Norden, in Frankreich und unterm Aequator gemessenen Grade darzustellen.

Man nehme an, dafs der Ausdruck des Erdhalbmessers $1 + \alpha Y^{(2)} + \alpha Y^{(4)}$ sey, und dafs man

$$Y^{(2)} = -A.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}); \qquad Y^{(4)} = -B.\left(\mu^4 - \frac{6}{7}\mu^2 + \frac{3}{35}\right)$$

hat. Man sieht leicht, dafs diese Funktionen von μ den partiellen Differenzialgleichungen Genüge thun, welchen $Y^{(2)}$ und $Y^{(4)}$ Genüge thun müssen. Die Aenderung der Meridiangrade ist nach dem Vorhergehenden

$$\alpha c\left(3A - \frac{102}{7}B\right).\mu^2 + 15\,\alpha c.B.\mu^4.$$

Bouguer nimmt an, dafs diese Aenderung der vierten Potenz des Sinus der Breite, oder, welches sehr nahe dasselbe ist, der Gröfse μ^4 proportional ist; da also das in μ^2 multiplicirte Glied der vorhergehenden Funktion verschwinden mufs, so erhält man

$$B = \frac{7}{34} \cdot A,$$

und der vom Schwerpunkt der Erde an ihre Oberfläche gezogene Halbmesser ist in diesem Fall gleich

$$1 - \frac{7\alpha A}{34} \cdot (4\mu^2 + \mu^4),$$

wenn man den Halbmesser des Aequators zur Einheit annimmt. Der Ausdruck der Pendellänge l wird

$$L + \tfrac{5}{2}\alpha.\varphi \cdot L \cdot \mu^2 - \frac{\alpha . AL}{34} \cdot (16\mu^2 + 21\,\mu^4),$$

wo L die Länge des Sekundenpendels unterm Aequator ist. Ist endlich c die Länge des Meridiangrads unterm Aequator, so ist der allgemeine Ausdruck dieser Länge

$$c + \frac{105}{34} \cdot \alpha A \cdot c \cdot \mu^4.$$

Wir bemerken hier, daſs, dem gemäſs, was wir schon oben gesagt haben, das in μ^4 multiplicirte Glied 3mal beträchtlicher im Ausdruck der Pendellänge, als im Ausdruck des Erdhalbmessers ist; und 5mal beträchtlicher im Ausdruck des Meridiangrades, als im Ausdruck der Pendellänge; daſs endlich dies Glied bey dem mittlern Parallelkreis 4mal beträchtlicher im Ausdruck der Aenderung zweyer auf einander folgenden Grade, als im Ausdruck der Grade selbst ist. Nach Bouguer ist der Unterschied der Grade am Pol und unterm Aequator, durch den Grad des Aequators dividirt, gleich $\frac{959}{56753}$; dies ist das Verhältniſs, welches in seiner Hypothese die gemessenen Grade zu Pello, Paris und unterm Aequator erfordern. Dies Verhältniſs ist gleich $\frac{105}{34} \cdot \alpha A$; man hat also

$$\alpha A = 0{,}0054717.$$

Nimmt man die Pendellänge unterm Aequator zur Einheit an, so ist die Aenderung dieser Länge an irgend einem andern Ort gleich

$$-\frac{0{,}0054717}{34} \cdot (16\mu^2 + 21\,\mu^4) + \tfrac{5}{2}\alpha\varphi \cdot \mu^2.$$

Man hat aber nach Satz 19. $\alpha\varphi = 0{,}00345113$, folglich $\frac{5}{2}\alpha\varphi = 0{,}0086278$, und die vorhergehende Formel verwandelt sich in folgende:

$$0{,}0060529 \,.\, \mu^2 - 0{,}0033796 \,.\, \mu^4.$$

Für Pello, wo $\mu = \sin 74^G 22'$, giebt diese Formel 0,0027016 für die Aenderung der Pendellänge. Die Beobachtungen geben diese Aenderung gleich 0, 0044625, und folglich viel gröſser; Bouguer's Hypothese kann daher nicht mit den beobachteten Pendellängen vereinigt, und folglich nicht angenommen werden.

34. Wir wollen nun die allgemeinen Resultate, welche wir gefunden haben, auf den Fall anwenden, wo das Sphäroid keine äuſsern Anziehungen erfährt, und wo es aus elliptischen Lagen besteht, welche ihren Mittelpunkt im Schwerpunkt des Sphäroids haben. Man hat gesehen, daſs dieser Fall bey der Erde Statt findet, wenn man annimmt, daſs sie ursprünglich flüssig war; er findet auch bey der Erde in der Hypothese Statt, wenn die Figuren ihrer Lagen einander ähnlich sind. Denn die Gleichung (2) des 29sten Satzes wird an der Oberfläche, wo $a = 1$ ist,

$$0 = Y^{(i)} \,.\, \int \varrho \,.\, a^2 \,.\, da - \frac{1}{2i+1} \,.\, \int \varrho \,.\, d \,.\, (a^{i+3} \,.\, Y^{(i)}) - \frac{Z^{(i)}}{4\pi}.$$

Nimmt man nun an, daſs die Lagen ähnlich sind, so ist der Werth von $Y^{(i)}$ für jede derselben identisch mit dem Werth an der Oberfläche; er ist folglich von a unabhängig, und man hat

$$Y^{(i)} \,.\, \int \varrho \,.\, a^2\, da \,.\, \left[1 - \left(\frac{i+3}{2i+1}\right) \,.\, a^i\right] = \frac{Z^{(i)}}{4\pi}.$$

Ist i gleich oder gröſser als 3, so ist $Z^{(i)}$ für die Erde gleich Null; da nun der Factor $1 - \left(\frac{i+3}{2i+1}\right) a^i$ immer positiv ist, so ist dann $Y^{(i)}$ gleich Null. Man hat noch $Y^{(1)}$ gleich Null, nach Satz 31, wenn man den Anfangspunkt der Halbmesser in den Schwerpunkt des Sphäroids setzt; man hat endlich, nach Satz 33, $Z^{(2)}$ gleich $- \frac{1}{2} \Phi \,.\, (\mu^2 - \frac{1}{3}) \,.\, 4\pi \,.\, \int \varrho \,.\, a^2 da$, folglich

$$Y^{(2)} = - \frac{\frac{1}{2} \Phi \,.\, (\mu^2 - \frac{1}{3}) : \int \varrho \,.\, a^2\, da}{\int \varrho \,.\, a^2\, da \,.\, (1 - a^2)}.$$

Die Erde ist also dann ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid. Wir wollen daher allgemein den Fall betrachten, wo die Gestalt der Erde elliptisch und durch Umdrehung entstanden ist.

Man hat in diesem Fall, wenn man den Anfangspunkt der Erdhalbmesser in den Schwerpunkt der Erde setzt,

$$Y^{(1)} = 0; \quad Y^{(3)} = 0; \quad Y^{(4)} = 0; \quad \text{etc.}$$
$$Y^{(2)} = -h.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

wo h eine Funktion von a ist; man hat ferner

$$Z^{(1)} = 0; \quad Z^{(3)} = 0; \quad Z^{(4)} = 0; \quad \text{etc.}$$
$$\alpha Z^{(2)} = -\tfrac{1}{2}\alpha\phi.(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).\tfrac{4}{3}\pi.\int\varrho.d.a^3.$$

Die Gleichung (2) des 29sten Satzes giebt dann an der Oberfläche

$$0 = 6.\int\varrho.d.(a^5 h) + 5.(\phi - 2h).\int\varrho.d.a^3. \quad (1)$$

Diese Gleichung enthält das Gesetz, welches, um des Gleichgewichts willen, zwischen der Dichte und zwischen der Elliptizität jeder Lage des Sphäroids vorhanden seyn muſs. Ist nämlich der Halbmesser einer Lage gleich $a.[1 + \alpha Y^{(0)} - \alpha h.(\mu^2 - \frac{1}{3})]$, so wird dieser Halbmesser $a.(1 - \alpha h.\mu^2)$, wenn man $Y^{(0)} = -\frac{1}{3}h$ setzt, welches erlaubt ist; und alsdann ist αh die Elliptizität der Lage.

An der Oberfläche des Sphäroids ist der Halbmesser gleich $1 - \alpha h.\mu^2$; man sieht hieraus, daſs die Abnahmen der Halbmesser, wenn man vom Aequator zu den Polen geht, der Gröſse μ^2, und folglich dem Quadrat des Sinus der Breite proportional sind.

Die Zunahme der Grade des Meridians vom Aequator zu den Polen ist nach dem vorhergehenden Satz gleich $3\alpha h c.\mu^2$, wenn c der Grad des Aequators ist, und ist folglich auch dem Quadrat des Sinus der Breite proportional.

Die Gleichung (1) zeigt uns, daſs die Elliptizität des Sphäroids in dem Fall, wenn die Dichten vom Mittelpunkt zur Oberfläche abnehmen, geringer ist, als im Fall der Gleichartigkeit, ausgenommen, wenn die Elliptizitäten von der Oberfläche zum Mittelpunkt in einem gröſsern Verhältniſs zunehmen, als im verkehrten Verhältniſs des Quadrats der Entfernungen vom Mittelpunkt. Setzt man nämlich $h = \frac{u}{a^2}$, so hat man

$$\int\varrho.d.(a^5 h) = \int\varrho.d.(a^3 u) = u.\int\varrho.d.a^3 + \int(du.\int a^3 d\varrho).$$

Wachsen die Elliptizitäten in einem geringern Verhältniſs als $\frac{1}{a^2}$, so nimmt u vom Mittelpunkt zur Oberfläche zu, und du ist folglich positiv; da nun $d\varrho$ vermöge der Voraussetzung, daſs die Dichten vom Mittelpunkt zur Oberfläche abnehmen, negativ ist, so ist $\int(du.\int a^3 d\varrho)$ eine negative Gröſse, und setzt man an der Oberfläche

$$\int\varrho.d(a^5 h) = (h - f).\int\varrho.d.a^3,$$

so wird f eine positive Gröſse seyn. Dies ſestgesetzt, giebt die Gleichung (1)

$$h = \frac{5\Phi - 6f}{4};$$

αh wird daher kleiner als $\frac{5\alpha\Phi}{4}$, und folglich kleiner als im Fall der Gleichartigkeit seyn, wo $d\varrho$ gleich Null, und also f gleich Null ist.

Es folgt hieraus, daſs die Abplattung des Sphäroids in den wahrscheinlichsten Hypothesen kleiner als $\frac{5\alpha\Phi}{4}$ ist; denn es ist natürlich zu denken, daſs die Lagen des Sphäroids dichter sind, so wie man sich dem Mittelpunkt nähert, und daſs die Elliptizitäten von der Oberfläche zum Mittelpunkt in einem geringern Verhältniſs zunehmen als $\frac{1}{a^2}$, weil dies Verhältniſs den Lagen, welche unendlich nahe beym Mittelpunkt sind, einen unendlich groſsen Halbmesser giebt, welches ungereimt ist. Diese Voraussetzungen sind desto wahrscheinlicher, da sie in dem Fall nothwendig werden, wenn das Sphäroid ursprünglich flüssig war: die dichtern Lagen sind alsdann, wie wir gesehen haben, dem Mittelpunkt näher, und die Elliptizitäten sind so weit entfernt, von der Oberfläche zum Mittelpunkt zuzunehmen, daſs sie vielmehr abnehmen.

Nimmt man an, daſs das Sphäroid ein durch Umdrehung *entstandenes* Ellipsoid ist, welches von einer flüssigen Masse, die gleichartig und von irgend einer Tiefe ist, bedeckt wird, und nennt man a' die halbe kleine Axe des festen Ellipsoids und $\alpha h'$ seine Elliptizität, so hat man an der Oberfläche des Flüssigen

$$\int\varrho\,.\,d\,.\,(a^5 h) = h - a'^5 h' + \int\varrho\,.\,d\,.\,(a^5 h),$$

wo das Integral des zweyten Theils dieser Gleichung in Beziehung auf das innere Ellipsoid von seinem Mittelpunkt bis zu seiner Oberfläche genommen werden muſs, und wo die Dichte des Flüssigen, von welchem es bedeckt wird, zur Einheit angenommen wird. Die Gleichung (1) giebt dann folgenden Ausdruck für die Elliptizität des Erdsphäroids:

$$\alpha h = \frac{5\alpha\Phi\,.\,(1 - a'^5 + \int\varrho\,.\,d\,.\,a^5) - 6\,\alpha h'\,.\,a'^5 + 6\alpha\,.\int\varrho\,.\,d\,.\,(a^5 h)}{4 - 10\,.\,a'^5 + 10\int\varrho\,.\,d\,.\,a^5},$$

wo die Integrale von $a = 0$ bis $a = a'$ zu nehmen sind.

Wir

Wir wollen nun das Gesetz der Schwere, oder welches dasselbe ist, das Gesetz der Pendellängen an der Oberfläche des elliptischen, im Gleichgewicht sich befindenden, Sphäroids betrachten. Der im vorhergehenden Satz gefundene Werth von l wird in diesem Fall

$$l = L + \alpha L\left(\tfrac{5}{2}\phi - h\right) \cdot \left(\mu^2 - \tfrac{1}{3}\right).$$

Setzt man also $L - \frac{1}{3}\alpha L\left(\frac{5}{2}\phi - h\right) = L'$, so erhält man, wenn man die Größen von der Ordnung α^2 vernachläßigt,

$$l = L' + \alpha L'\left(\tfrac{5}{2}\phi - h\right)\mu^2,$$

eine Gleichung, aus welcher folgt, daß L' die Länge des Sekundenpendels unterm Aequator ist, und daß diese Länge vom Aequator zu den Polen im Verhältniß des Quadrats des Sinus der Breite zunimmt.

Bezeichnet man durch $\alpha\varepsilon$ den Ueberschuß der Pendellänge unterm Pol über die Pendellänge unterm Aequator, nachdem man ihn durch diese letztere Länge dividirt hat, so hat man $\alpha\varepsilon = \alpha \cdot \left(\frac{5}{2}\phi - h\right)$, und folglich

$$\alpha\varepsilon + \alpha h = \tfrac{5}{2}\alpha\phi,$$

eine merkwürdige Gleichung zwischen der Elliptizität der Erde, und zwischen der Aenderung der Länge des Sekundenpendels vom Aequator zu den Polen. Im Fall der Gleichartigkeit ist $\alpha h = \frac{5}{4}\alpha\phi$; folglich ist in diesem Fall $\alpha\varepsilon = \alpha h$; ist aber das Sphäroid ungleichartig, so ist $\alpha\varepsilon$ um eben so viel kleiner oder größer als $\frac{5}{4}\alpha\phi$, als αh größer oder kleiner als diese Größe ist.

35. Nimmt man an, daß die Planeten von einem, im Gleichgewicht sich befindenden, Flüssigen bedeckt sind, so muß man in der Berechnung ihrer Anziehungen, die Anziehung der Sphäroide kennen, deren Oberflächen flüssig und im Gleichgewicht sind: man kann sie sehr einfach auf folgende Art ausdrücken. Wir wollen die Gleichung (5) des 14ten Satzes wieder vornehmen; man wird daraus die Integralzeichen vermittelst der Gleichung (2) des 29sten Satzes wegschaffen, welche an der Oberfläche des Sphäroids

$$\frac{4\pi}{2i+1} \cdot \int \rho \cdot d \cdot \left(a^{i+3} \cdot Y^{(i)}\right) = \tfrac{4}{3}\pi \cdot Y^{(i)} \cdot \int \rho \cdot d \cdot a^3 - Z^{(i)}$$

giebt. Setzt man dann den Anfangspunkt der Halbmesser r im Schwerpunkt des Sphäroids, wodurch $Y^{(1)}$ verschwindet, und bemerkt man ferner, daß $Z^{(1)}$ gleich Null ist, und daß man, da $Y^{(0)}$ willkührlich ist, $\frac{4}{3}\pi \cdot Y^{(0)} - Z^{(0)}$ gleich Null setzen kann, so giebt die Gleichung (5) des 14ten Satzes

$$V = \frac{4\pi}{3r} . \int \varrho . d . a^3 + \frac{4\alpha\pi}{3r^3} . \left[Y^{(2)} + \frac{Y^{(3)}}{r} + \frac{Y^{(4)}}{r^2} + \text{etc.} \right] . \int \varrho . d . a^3$$
$$- \frac{\alpha}{r^3} \left[Z^{(2)} + \frac{Z^{(3)}}{r} + \frac{Z^{(4)}}{r^2} + \text{etc.} \right].$$

Man muſs hierbey bemerken, daſs $\frac{4\pi}{3} . \int \varrho . d . a^3$ in diesem Ausdruck die Masse des Sphäroids ausdrückt, weil der Werth von V der durch r dividirten Masse des Sphäroids gleich ist, wenn r unendlich groſs wird. Dies festgesetzt, ist die Anziehung des Sphäroids parallel mit r gleich $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$; die auf diesen Halbmesser senkrechte Anziehung, in der Ebene des Meridians, ist gleich $-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} . \left(\frac{dV}{d\mu}\right)$; und die auf denselben Halbmesser senkrechte Anziehung in der Richtung der Parallelkreise ist gleich $-\frac{\left(\frac{dV}{d\varpi}\right)}{r . \sqrt{1-\mu^2}}$. Nimmt man an, daſs die Erde elliptisch ist, so verwandelt sich der Ausdruck von V in folgenden:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{(\frac{1}{2}\alpha\phi - \alpha h)}{r^3} . M . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

wo M die Masse der Erde ist.

36. Ob gleich das Gesetz der Anziehung, nach welchem sie im verkehrten Verhältniſs mit dem Quadrat der Entfernung steht, das einzige ist, welches uns interessirt, so bietet doch die Gleichung (1) des 10ten Satzes eine so einfache Bestimmung der Schwere an der Oberfläche gleichartiger, im Gleichgewicht sich befindender, Sphäroide dar, was auch immer der Exponent der Potenz der Entfernung ist, welcher die Anziehung proportional ist, daſs wir glauben, sie hier darstellen zu können. Verhält sich nämlich die Anziehung wie irgend eine Potenz n der Entfernung, und bezeichnet man durch dm ein Theilchen des Sphäroids, und durch f seine Entfernung vom angezogenen Punkte, so ist die Wirkung von dm auf diesen Punkt durch das Element ihrer Richtung $-df$ multiplicirt, gleich $-dm.f^n.df$. Das Integral dieser Gröſse, in Beziehung auf f genommen, ist $-\frac{dm \, . \, f^{n+1}}{n+1}$, und die Summe dieser Integrale, auf

das ganze Sphäroid erstreckt, ist $-\frac{V}{n+1}$, wenn man, wie im 10ten Satz, $V = \int . f^{n+1} . dm$ setzt.

Ist das Sphäroid flüssig, gleichartig, mit einer Umdrehungsbewegung versehen, und keiner äufsern Anziehung ausgesetzt, so hat man an seiner Oberfläche, im Fall des Gleichgewichts, nach Satz 23.

$$\text{Beständige Größe} = -\frac{V}{n+1} + \tfrac{1}{2} g \cdot r^2 \cdot (1-\mu^2),$$

wo r der vom Schwerpunkt des Sphäroids an seine Oberfläche gezogene Halbmesser, und g die Mittelpunktsfliehkraft in der Entfernung 1 von der Umdrehungsaxe ist.

Die Schwere p an der Oberfläche des Sphäroids ist dem Differenzial des zweyten Theils dieser Gleichung in Beziehung auf r genommen, und durch $-dr$ dividirt, gleich; dies giebt

$$p = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{dV}{dr}\right) - gr \cdot (1-\mu^2).$$

Man nehme nun die Gleichung (1) des 10ten Satzes wieder vor, welche sich auf die Oberfläche bezieht,

$$\left(\frac{dV}{dr}\right) = A' - \frac{(n+1)\,A}{2a} + \frac{(n+1)\,V}{2a};$$

verbindet man diese Gleichung mit der vorhergehenden, so erhält man

$$p = \text{beständige Größe} + \left(\frac{(n+1)\,r}{4a} - 1\right) \cdot gr \cdot (1-\mu^2).$$

An der Oberfläche ist r sehr nahe gleich a; setzt man dann zu mehrerer Vereinfachung $a = 1$, so erhält man

$$p = \text{beständige Größe} + \left(\frac{n-3}{4}\right) \cdot g \cdot (1-\mu^2).$$

Es sey P die Schwere unterm Aequator des Sphäroids, und $\alpha\phi$ das Verhältnifs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator, so hat man

$$p = P \cdot \left[1 + \left(\frac{3-n}{4}\right) \cdot \alpha\phi \cdot \mu^2\right].$$

Es folgt hieraus, dafs die Schwere vom Aequator zu den Polen im Verhältnifs des Quadrats des Sinus der Breite sich ändert. Im Fall der Natur, wo $n = -2$, erhält man

$$p = P \cdot \left(1 + \frac{5}{4} \cdot \alpha\Phi \cdot \mu^2\right),$$

welches dem oben gefundenen Resultat gemäfs ist. Es ist aber merkwürdig, dafs für $n = 3$, $p = P$ ist; das heifst, dafs die Schwere an der Oberfläche gleichartiger Sphäroide überall gleich grofs ist, was auch ihre Umdrehungsbewegung ist, wenn die Anziehung der dritten Potenz der Entfernung proportional ist.

37. Wir haben in der Untersuchung der Gestalt der himmlischen Körper nur auf die Gröfsen von der Ordnung α Rücksicht genommen; man kann aber leicht durch die vorhergehende Analysis die Annäherungen auf die Gröfsen von der Ordnung α^2 und der höhern Ordnungen erstrecken. Wir wollen hierzu die Gestalt einer flüssigen, gleichartigen Masse betrachten, welche sich im Gleichgewicht befindet, ein, von der Kugel wenig verschiedenes, Sphäroid bedeckt und eine Umdrehungsbewegung hat; welches der Fall bey der Erde und bey den Planeten ist. Die Bedingung des Gleichgewichts an der Oberfläche giebt nach dem 13ten Satz die Gleichung

$$\text{Beständige Gröfse} = V - \tfrac{1}{2} g \cdot r^2 \cdot (\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Der Werth von V besteht erstlich aus der Anziehung des vom Flüssigen bedeckten Sphäroids auf das Theilchen der Oberfläche, welches die Koordinaten r, θ, ϖ bestimmen; zweytens, aus der Anziehung der flüssigen Masse auf dieses Theilchen. Nun ist aber die Summe dieser Anziehung eben so grofs, als die Summe der Anziehungen erstlich des Sphäroids, wenn man annimmt, dafs die Dichte jeder seiner Lagen um die Dichte des Flüssigen vermindert ist; zweytens eines Sphäroids, welches dieselbe Dichte wie das Flüssige hat und dessen äufsere Oberfläche dieselbe ist, wie die des Flüssigen. Es sey V' die erste dieser Anziehungen und V'' die zweyte, so dafs $V = V' + V''$; dann hat man, wenn man annimmt, dafs g von der Ordnung α und gleich $\alpha g'$ ist,

$$\text{Beständige Gröfse} = V' + V'' - \frac{\alpha g'}{2} \cdot r^2 \cdot (\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Man hat im 9ten Satz gesehen, dafs V' in eine Reihe von folgender Form entwickelt werden kann:

$$\frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U^{(1)}}{r^2} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \text{etc.},$$

wo $U^{(i)}$ der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thun mufs:

$$o = \left\{ \frac{d . \left[(1-\mu^2) . \left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 U^{(i)}}{d\varpi^2} \right)}{1 - \mu^2} + i . (i + 1) . U^{(i)};$$

und man kann durch die Analysis des 17ten Satzes $U^{(i)}$ mit aller erforderlichen Schärfe bestimmen, wenn die Figur des Sphäroids bekannt ist.

Man kann eben so V'' in eine Reihe von folgender Form entwickeln:

$$\frac{U_{,}^{(0)}}{r} + \frac{U_{,}^{(1)}}{r^2} + \frac{U_{,}^{(2)}}{r^3} + \text{etc.}$$

wo $U_{,}^{(i)}$ derselben partiellen Differenzialgleichung Genüge thun muſs wie $U^{(i)}$. Nimmt man zur Einheit der Dichten, die Dichte des Flüssigen an, so hat man nach Satz 17.

$$U_{,}^{(i)} = \frac{4\pi}{(i+3)(2i+1)} . Z^{(i)},$$

wenn man annimmt, daſs r^{i+3} in die Reihe

$$Z^{(0)} + Z^{(1)} + Z^{(2)} + \text{etc.}$$

entwickelt worden ist, in welcher $Z^{(i)}$ derselben partiellen Differenzialgleichung Genüge thun muſs, wie $U^{(i)}$. Die Gleichung des Gleichgewichts verwandelt sich so in folgende:

$$\text{Best. Gröſse} = \frac{U^{(0)}}{r} + \frac{U_{,}^{(0)}}{r} + \Sigma . \frac{1}{r^{i+1}} . \left[U^{(i)} + \frac{4\pi}{(i+3).(2i+1)} . Z^{(i)} \right] - \alpha g' . r^2 . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

wo i gleich oder gröſser als die Einheit ist.

Wäre die Entfernung r des angezogenen Theilchens vom Mittelpunkt des Sphäroids unendlich groſs, so würde V der Summe der Massen des Sphäroids und des Flüssigen, durch r dividirt, gleich seyn. Nennt man also diese Summe m, so hat man $U^{(0)} + U_{,}^{(0)} = m$. Treibt man die Annäherung nur bis zu den Gröſsen von der Ordnung α^2, so kann man

$$r = 1 + \alpha y + \alpha^2 y'$$

setzen; dieſs giebt

$$r^{i+3} = 1 + (i+3) . \alpha y + \frac{(i+2).(i+3)}{1 . 2} . \alpha^2 . y^2 + (i+3)\, \alpha^2 . y'.$$

Man setze
$$y = Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \text{etc.}$$
$$y' = Y'^{(1)} + Y'^{(2)} + Y'^{(3)} + \text{etc.}$$
$$y^2 = M^{(0)} + M^{(1)} + M^{(2)} + \text{etc.},$$

wo $Y^{(i)}$, $Y'^{(i)}$ und $M^{(i)}$ derselben partiellen Differenzialgleichung Genüge thun müssen wie $U^{(i)}$; so erhält man

$$Z^{(i)} = (i+3) \cdot \alpha\, Y^{(i)} + \frac{(i+2) \cdot (i+3)}{1 \cdot 2} \cdot \alpha^2 . M^{(i)} + (i+3) . \alpha^2 . Y'^{(i)}.$$

Wir bemerken ferner, daſs $U^{(i)}$ eine Gröſse von der Ordnung α ist, weil sie gleich Null seyn würde, wenn das Sphäroid eine Kugel wäre. Treibt man also die Annäherung nur bis auf die Glieder von der Ordnung α^2, so wird $U^{(i)}$ von der Form $\alpha . U'^{(i)} + \alpha^2 . U''^{(i)}$ seyn. Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung des Gleichgewichts, und verwandelt man in ihr r in $1 + \alpha y + \alpha^2 y'$, so erhält man bis auf die Gröſsen von der Ordnung α^2,

$$\text{Beständige Gröſse} = m \,. \left(1 - \alpha y + \alpha^2 y^2 - \alpha^2 y'\right)$$
$$+ \Sigma . \left\{ \begin{array}{l} \alpha\, U'^{(i)} + \alpha^2 . U''^{(i)} - (i+1) . \alpha^2 y \,.\, U'^{(i)} \\ + \dfrac{4\alpha\pi}{2i+1} . Y^{(i)} - \dfrac{4\alpha^2\pi . (i+1)}{2i+1} . y\, Y^{(i)} + \dfrac{4\alpha^2\pi}{2i+1} . Y'^{(i)} \\ + \dfrac{4\alpha^2\pi \,.\, (i+2)}{2(2i+1)} . M^{(i)} \end{array} \right\}$$
$$- \tfrac{1}{2} . \alpha g' . (1 + 2\alpha y) . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Setzt man die Glieder von der Ordnung α und die von der Ordnung α^2 einzeln gleich Null, so erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$\Sigma . \left(m - \frac{4\pi}{2i+1}\right) . Y^{(i)} = \Sigma\, U'^{(i)} - \tfrac{1}{2} g' . (\mu^2 - \tfrac{1}{3})$$

$$\Sigma . \left(m - \frac{4\pi}{2i+1}\right) . Y'^{(i)} = C' + \Sigma . \left\{ \begin{array}{l} U''^{(i)} - (i+1) . y . U'^{(i)} - \dfrac{4\pi . (i+1)}{2i+1} . y\, Y^{(i)} \\ + \left(m + \dfrac{4\pi . (i+2)}{2 . (2i+1)}\right) . M^{(i)} \end{array} \right\}$$
$$- g' y \,.\, (\mu^2 - \tfrac{1}{3}),$$

wo C' eine willkührliche beständige Gröſse ist. Die erste dieser Gleichungen bestimmt $Y^{(i)}$ und folglich den Werth von y. Substituirt man ihn im zweyten Theil der zweyten Gleichung, so wird man denselben durch die Methode des 16ten Satzes in eine Reihe von der Form

$$N^{(0)} + N^{(1)} + N^{(2)} + \text{etc.}$$

entwickeln, wo $N^{(i)}$ der nämlichen partiellen Differenzialgleichung Genüge thun muſs, wie $U^{(i)}$; und man wird die beständige Gröſse C' so bestimmen, daſs $N^{(0)}$ gleich Null wird; man erhält so

$$Y'^{(i)} = \frac{N^{(i)}}{m - \frac{4\pi}{2i+1}},$$

und folglich

$$y' = \frac{N^{(1)}}{m - \frac{4}{3}\pi} + \frac{N^{(2)}}{m - \frac{4}{5}\pi} + \frac{N^{(3)}}{m - \frac{4}{7}\pi} + \text{etc.}$$

Der Ausdruck des Halbmessers r der Oberfläche des Flüssigen wird so bis auf die Gröſsen von der Ordnung α^2 bestimmt werden, und man wird durch dasselbe Verfahren die Annäherung so weit treiben können als man will. Wir werden nicht länger bey diesem Gegenstand verweilen, der keine andern Schwierigkeiten hat, als die Länge der Berechnung; wir werden aber aus der vorhergehenden Analysis den wichtigen Schluſs ziehen, daſs man behaupten kann, daſs das Gleichgewicht streng möglich ist, wenn man gleich nicht die Figur mit geometrischer Schärfe angeben kann, welche ihm Genüge thut: denn man kann eine Reihe Figuren finden, welche, in die Gleichung des Gleichgewichts substituirt, nach und nach immer kleinere Reste lassen, und welche endlich kleiner als jede gegebene Gröſse werden können.

Fünftes Kapitel.

Vergleichung der vorhergehenden Theorie mit den Beobachtungen.

38. Will man die vorgetragene Theorie mit den Beobachtungen vergleichen, so muſs man die krumme Linie der Erdmeridiane und diejenige krumme Linie kennen, welche man durch eine Reihe geodätischer Operationen beschreibt. Gedenkt man sich durch die Umdrehungsaxe der Erde und durch das Zenith eines Orts ihrer Oberfläche eine bis zum Himmel verlängerte Ebene, so wird diese Ebene daselbst den Umkreis eines gröſsten Kreises beschreiben, welcher der Mittagskreis dieses Orts seyn wird: alle Punkte der Oberfläche der Erde, welche ihr Zenith in diesem Umkreis haben, werden unter demselben Himmelsmittagskreis seyn, und sie werden auf dieser Oberfläche eine krumme Linie bilden, welche der entsprechende Erdmeridian seyn wird.

Wir stellen zur Bestimmung dieser krummen Linie die Gleichung der Oberfläche der Erde durch $u = 0$ vor, wo u eine Funktion der drey rechtwinklichten Koordinaten x, y, z ist. Es seyen x', y', z' die drey Koordinaten der Verticallinie, die durch den Ort der Oberfläche der Erde geht, welchen die Koordinaten x, y, z bestimmen, so hat man durch die Theorie der krummen Oberflächen folgende zwey Gleichungen [43]):

o =

43) Man sehe über die Theorie der krummen Oberflächen das fünfte Kapitel des ersten Theils des Traité du calcul différentiel et du calcul intégral par Lacroix. Die Art, wie man vermittelst der Elimination die Durchschnitte zweyer Flächen erhält, hat Monge vortrefflich dargestellt in seiner Géométrie descriptive §. 49. pag. 60. (Paris an VII.).

$$o = \left(\frac{du}{dx}\right) . dy' - \left(\frac{du}{dy}\right) . dx';$$

$$o = \left(\frac{du}{dx}\right) . dz' - \left(\frac{du}{dz}\right) . dx'.$$

Multiplicirt man die erste mit der unbestimmten Gröſse λ, und addirt sie dann zur zweyten, so erhält man

$$dz' = \left\{ \frac{\left(\frac{du}{dz}\right) + \lambda . \left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{du}{dx}\right)} \right\} . dx' - \lambda . dy'.$$

Dies ist die Gleichung irgend einer mit der erwähnten Verticallinie parallelen Ebene. Da diese Verticallinie, wenn sie unendlich verlängert wird, mit dem Himmelsmeridian zusammentrifft, so lange ihr Fuſs nur um eine endliche Gröſse von der Ebene dieses Meridians entfernt ist; so kann man sie als parallel mit dieser Ebene ansehen; die Differenzialgleichung dieser Ebene kann also mit der vorhergehenden übereinstimmen, wofern man die unbestimmte Gröſse λ schicklich bestimmt. Es sey

$$dz' = a . dx' + b . dy'$$

die Gleichung der Ebene des Himmelsmeridians. Vergleicht man sie mit der vorhergehenden, so erhält man

$$\left(\frac{du}{dz}\right) - a . \left(\frac{du}{dx}\right) - b . \left(\frac{du}{dy}\right) = o; \quad . . . \quad (a).$$

Man muſs zur Bestimmung der beständigen Gröſsen a und b die Koordinaten des Fuſses der mit der Umdrehungsaxe der Erde parallelen Verticallinie, und die der Verticallinie eines gegebenen Ortes der Oberfläche als bekannt annehmen. Substituirt man diese Koordinaten nach und nach in die vorhergehende Gleichung, so erhält man zwey Gleichungen, vermittelst welcher man a und b bestimmen wird. Verbindet man die vorhergehende Gleichung mit der Gleichung der Oberfläche, $u = o$, so erhält man die krumme Linie des Erdmeridians, welcher durch den gegebenen Ort geht.

Ist die Erde irgend ein Ellipsoid, so würde u eine rationale und ganze Funktion des zweyten Grads von x, y, z seyn; die Gleichung (a) wird dann die Gleichung einer Ebene seyn, deren Durchschnitt mit der Oberfläche der

Erde den Erdmittagskreis bilden wird; und dieser Mittagskreis wird im Allgemeinen eine krumme Linie von doppelter Krümmung seyn.

Die durch die geodätischen Messungen bestimmte Linie ist in diesem Fall nicht die Linie des Erdmittagskreises. Man bildet, um diese Linie zu beschreiben, ein erstes horizontales Dreyeck, dessen einer Winkel zur Spitze den Anfangspunkt dieser krummen Linie hat, und dessen zwey andere Winkel zur Spitze irgend zwey sichtbare Gegenstände haben. Man bestimmt die Richtung der ersten Seite der krummen Linie gegen die Seiten des Dreyecks, und ihre Länge bis zum Punkt, wo sie die Seite schneidet, welche die beiden Gegenstände vereinigt. Man bildet dann ein zweytes horizontales Dreyeck mit diesem und mit einem dritten Gegenstand, welcher vom Anfangspunkt entfernter ist als dieselben. Dieses zweyte Dreyeck ist nicht in der Ebene des ersten; es hat nur die Seite mit ihm gemein, welche die zwey ersten Gegenstände bilden. Die Verlängerung der ersten Seite der krummen Linie erhebt sich also über die Ebene des zweyten Dreyecks; man biegt es aber gegen diese Ebene und zwar so, daſs es immer die nämlichen Winkel mit der den beiden Dreyecken gemeinschaftlichen Seite bildet, und man sieht leicht, daſs man es nach einer auf diese Ebene senkrechten Linie biegen muſs. Dies ist die unterscheidende Eigenschaft der durch geodätische Operationen gezogenen krummen Linie. Ihre erste Seite, deren Richtung nach Willkühr angenommen werden kann, ist eine *Tangente* an die Oberfläche der Erde; ihre zweyte Seite ist die Verlängerung dieser Tangente nach einer Verticallinie gebogen; ihre dritte Seite ist die Verlängerung der zweyten nach einer Verticallinie gebogen, und so für die übrigen.

Zieht man durch den Vereinigungspunkt zweyer dieser Seiten in der Ebene, welche die Oberfläche des Sphäroids berührt, eine auf die erstere dieser Seiten senkrechte Linie, so ist sichtbar, daſs sie auch auf die zweyte Seite senkrecht seyn wird. Es folgt hieraus, daſs die Summe dieser Seiten die kürzeste Linie ist, welche man auf dieser Fläche zwischen ihren Endpunkten ziehen kann [44]). Die durch die geodätischen Messungen beschriebenen Linien haben also die Eigenschaft, daſs sie die kürzesten sind, welche man auf der Oberfläche

44) Man vergleiche hierüber Euler in Commentariis Academiae scientiarum Petropolitanae, Tom. III. 1728. pag. 110. und vorzüglich Joh. Bernoulli Opera omnia, Tom. IV. pag. 108. No. 166. Man kann vermittelst dieser Methoden die beiden folgenden Gleichungen für die kürzeste Linie auf der Erdoberfläche finden.

des Sphäroids zwischen irgend zweyen ihrer Punkte ziehen kann, und sie würden durch einen sich gleichförmig auf dieser Fläche bewegenden Körper beschrieben werden, wie man im 9ten Satz des ersten Buches gesehen hat.

Es seyen x, y, z die rechtwinklichten Koordinaten irgend eines Punktes der krummen Linie, so werden $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, die Koordinaten eines unendlich nahen Punktes seyn. Man nenne ds das Element der krummen Linie und man nehme an, daſs dies Element um eine, mit ds gleiche, Gröſse verlängert worden ist, so werden $x + 2dx$, $y + 2dy$, $z + 2dz$ die Koordinaten des Endes dieser Verlängerung seyn. Biegt man sie nach einer Verticallinie, so werden die Koordinaten dieses Endes $x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$, $z + 2dz + d^2z$; folglich sind $-d^2x$, $-d^2y$, $-d^2z$ die Koordinaten der Verticallinie, von ihrem Fuſs an gerechnet. Man erhält also durch die Natur dieser Verticallinie, und wenn man annimmt, daſs $u = 0$ die Gleichung der Oberfläche der Erde ist,

$$0 = \left(\frac{du}{dx}\right) . d^2y - \left(\frac{du}{dy}\right) . d^2x;$$

$$0 = \left(\frac{du}{dx}\right) . d^2z - \left(\frac{du}{dz}\right) . d^2x,$$

welche Gleichungen von denen des Erdmeridians verschieden sind. Man muſs in diesen Gleichungen ds als beständig ansehen; denn es ist klar, daſs die Verlängerung von ds den Fuſs der Verticallinie, nach welcher man sie biegt, bis auf ein unendlich Kleines der vierten Ordnung antrifft [45]).

Wir wollen nun sehen, welche Kenntnisse über die Figur der Erde geodätische Messungen verschaffen können, welche man in der Richtung der Meridiane und in der auf die Meridiane senkrechten Richtung angestellt hätte. Man kann sich immer ein Ellipsoid gedenken, welches irgend einen Punkt der Erdoberfläche berührt, und auf welchem die geodätischen Messungen, die Längen und Breiten, in einem geringen Umfang, vom Punkt der Berührung an gerechnet, identisch mit denjenigen sind, welche sie auf der Oberfläche der Erde seyn würden. Wäre die ganze Oberfläche ein Ellipsoid, so würde das tangi-

45) Die Grundlinie des rechtwinklichten Dreyecks, dessen Hypotenuse ds und dessen Seite d^2z ist, ist gleich $\sqrt{ds^2 - (d^2z)^2} = ds - \frac{1}{2} . \frac{(d^2z)^2}{ds} -$ etc. . . .; der Unterschied zwischen der Grundlinie und der Hypotenuse ds ist also ein unendlich Kleines der vierten Ordnung, nämlich $\frac{1}{2} . \frac{(d^2z)^2}{ds}$.

rende Ellipsoid überall dasselbe seyn; ist aber die Gestalt der Meridiane nicht elliptisch, welches man zu glauben Ursache hat, so wird das tangirende Ellipsoid von einem Lande zum andern sich ändern, und man wird es nur durch geodätische, in verschiedenen Richtungen angestellte, Vermessungen bestimmen können. Es würde sehr interessant seyn, wenn man auf diese Art die Krümmungsellipsoide einer grofsen Anzahl Oerter auf der Erde hätte.

Es sey $u = x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u'$ die Gleichung der Oberfläche des Sphäroids, von welchem wir annehmen, dafs es sehr wenig von einer Kugel, deren Halbmesser 1 ist, verschieden sey, so dafs α ein sehr kleiner Koeffizient ist, dessen Quadrat wir vernachlässigen werden. Man kann immer u' als eine Funktion der zwey veränderlichen Gröfsen x und y allein ansehen; denn sieht man es als eine Funktion von x, y, z an, so kann man z vermittelst der Gleichung $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ eliminiren. Dieses festgesetzt, verwandeln sich die drey Gleichungen, welche wir oben für die kürzeste Linie auf der Erdoberfläche gefunden haben, in folgende [46]):

$$\left.\begin{aligned} x d^2 y - y d^2 x &= \alpha \cdot \left(\frac{du'}{dx}\right) \cdot d^2 y - \alpha \cdot \left(\frac{du'}{dy}\right) \cdot d^2 x; \\ x d^2 z - z d^2 x &= \alpha \cdot \left(\frac{du'}{dx}\right) \cdot d^2 z; \\ y d^2 z - z d^2 y &= \alpha \cdot \left(\frac{du'}{dy}\right) \cdot d^2 z. \end{aligned}\right\} \quad (O)$$

Wir werden diese Linie die geodätische Linie nennen.

Man nenne r den vom Mittelpunkt der Erde an seine Oberfläche gezogenen Halbmesser, θ den Winkel, welchen dieser Halbmesser mit der Umdrehungsaxe macht, für welche wir die Axe der z annehmen, und ϕ den Winkel, welchen die durch diese Axe und durch r gehende Ebene mit der Ebene der x und der z macht, so hat man

46) Man findet nämlich $\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x - 2\alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)$; $\left(\frac{du}{dy}\right) = 2y - 2\alpha\left(\frac{du'}{dy}\right)$ und $\left(\frac{du}{dz}\right) = 2z$. Substituirt man diese Werthe in die vorhergehenden beiden Gleichungen, so erhält man die beiden ersten der Gleichungen (O); und aus ihnen findet man die dritte, wenn man die erste mit $-\frac{d^2 z}{d^2 x}$, die zweyte mit $\frac{d^2 y}{d^2 x}$ multiplicirt und sie beide addirt.

$$x = r \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\phi; \qquad y = r \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\phi; \qquad z = r \,.\, \cos\theta.$$

Hieraus erhält man [47])

$$r^2 \,.\, \sin\theta^2 \,.\, d\phi = xdy - ydx;$$
$$- r^2 d\theta = (xdz - zdx) \,.\, \cos\phi + (ydz - zdy) \,.\, \sin\phi;$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 \,.\, d\theta^2 + r^2 \,.\, d\phi^2 \,.\, \sin\theta^2.$$

Betrachtet man hernach u' als eine Funktion von x und von y, und bezeichnet man die Breite durch ψ, so kann man in dieser Funktion $r = 1$ und $\psi = 100^G - \theta$ setzen; dies giebt

$$x = \cos\psi \,.\, \cos\phi; \qquad y = \cos\psi \,.\, \sin\phi.$$

Man erhält dann [48])

47) Es ist $x.dy - y.dx = x^2.d.\left(\frac{y}{x}\right) = r^2 \,.\, \sin\theta^2 \,.\, \cos\varphi^2 \,.\, d \,.\, (\text{tang}\,\varphi) = r^2 \,.\, \sin\theta^2 \,.\, d\varphi$; ferner

$$x.dz - z.dx = - z^2.d.\left(\frac{x}{z}\right) = - z^2.d.(\text{tang}\,\theta \,.\, \cos\varphi) = - \frac{z^2.d\theta.\cos\varphi}{\cos\theta^2} + z^2.\,d\varphi.\sin\varphi \,.\, \text{tang}\,\theta, \text{ und}$$

$$y.dz - z.dy = - z^2.d.\left(\frac{y}{z}\right) = - z^2.d.(\text{tang}\,\theta \,.\, \sin\varphi) = - \frac{z^2.d\theta.\sin\varphi}{\cos\theta^2} - z^2.\,d\varphi.\cos\varphi \,.\, \text{tang}\,\theta;$$

Folglich $(xdz - zdx) \,.\, \cos\varphi + (ydz - zdy) \,.\, \sin\varphi = - \frac{z^2\, d\theta}{\cos\theta^2} = - r^2 d\theta$. Aus diesen beiden gefundenen Gleichungen erhält man, wenn man dividirt,

$$r \sin\theta \,.\, d\varphi = \frac{x}{r \,.\, \sin\theta} \,.\, dy - \frac{y}{r \,.\, \sin\theta} \,.\, dx = \cos\varphi \,.\, dy - \sin\varphi \,.\, dx; \text{ und}$$

$$- r\, d\theta = \left(\frac{x}{r}\, dz - \frac{z}{r}\, dx\right) \cos\varphi + \left(\frac{y}{r}\, dz - \frac{z}{r}\, dy\right) \sin\varphi = dz.\sin\theta - dy.\sin\varphi.\cos\theta - dx.\cos\varphi.\cos\theta.$$

Da ferner $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, oder $xdx + ydy + zdz = rdr$, oder $dr = \frac{x}{r}\, dx + \frac{y}{r}\, dy + \frac{z}{r}\, dz$ ist, so findet man, wenn man statt $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ ihre Werthe substituirt,

$dr = \sin\theta \,.\, \cos\varphi \,.\, dx + \sin\theta \,.\, \sin\varphi \,.\, dy + \cos\theta \,.\, dz$. Quadrirt man diese drey Gleichungen, so giebt ihre Summe die dritte der im Text gegebenen Gleichungen. Man erhält diese Gleichung auch leicht directe, wenn man $r \sin\theta$ durch ω bezeichnet. Dann ist $dx = d\omega \,.\, \cos\varphi - d\varphi \,.\, \omega \,.\, \sin\varphi$, und $dy = d\omega \,.\, \sin\varphi + d\varphi \,.\, \omega \,.\, \cos\varphi$, folglich $dx^2 + dy^2 = d\omega^2 + d\varphi^2 \,.\, \omega^2$. Setzt man in dieser Gleichung $x = \omega$, $y = z$, und folglich $\omega = r$, $\varphi = \theta$, so findet man $d\omega^2 + dz^2 = dr^2 + d\theta^2 \,.\, r^2$. Addirt man zu den beiden Theilen der ersten Gleichung dz^2, so erhält man $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dz^2 + d\omega^2 + d\varphi^2 \,.\, \omega^2$; substituirt man nun statt $d\omega^2 + dz^2$ seinen in der zweyten Gleichung gefundenen Werth, so erhält man

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 \,.\, d\theta^2 + \omega^2 \,.\, d\varphi^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin\theta^2 \,.\, d\varphi^2.$$

48) Da u' eine Funktion von x und y ist, so ist $du' = \left(\frac{du'}{dx}\right) dx + \left(\frac{du'}{dy}\right) dy$; vermöge der gege-

$$\left(\frac{du'}{dx}\right).dx + \left(\frac{du'}{dy}\right).dy = \left(\frac{du'}{d\psi}\right).d\psi + \left(\frac{du'}{d\phi}\right).d\phi.$$

Man hat aber

$$x^2 + y^2 = \cos\psi^2; \quad \frac{y}{x} = \text{tang}\ \phi,$$

folglich

$$d\psi = -\frac{(xdx + ydy)}{\sin\psi . \cos\psi}; \quad d\phi = \frac{(xdy - ydx)}{x^2} . \cos\phi^2.$$

Substituirt man diese Werthe von $d\psi$ und $d\phi$ in die vorhergehende Differenzialgleichung für u', und vergleicht man die Koeffizienten von dx und von dy einzeln mit einander, so erhält man

$$\left(\frac{du'}{dx}\right) = -\frac{\cos\phi}{\sin\psi}.\left(\frac{du'}{d\psi}\right) - \frac{\sin\phi}{\cos\psi}.\left(\frac{du'}{d\phi}\right);$$

$$\left(\frac{du'}{dy}\right) = -\frac{\sin\phi}{\sin\psi}.\left(\frac{du'}{d\psi}\right) + \frac{\cos\phi}{\cos\psi}.\left(\frac{du'}{d\phi}\right);$$

dies giebt

$$\left(\frac{du'}{dx}\right).d^2y - \left(\frac{du'}{dy}\right).d^2x = -\frac{\left(\frac{du'}{d\psi}\right)}{\sin\psi . \cos\psi}.(xd^2y - yd^2x)$$

$$-\frac{\left(\frac{du'}{d\phi}\right)}{\cos\psi^2}.(x.d^2x + y.d^2y).$$

Man hat aber, wenn man die Gröſsen von der Ordnung α vernachlässigt [49]), $xd^2y - yd^2x = 0$; und die zwey Gleichungen

$$xd^2z - zd^2x = 0; \quad yd^2z - zd^2y = 0$$

geben

$$zd^2z = \frac{z^2\,(xd^2x + yd^2y)}{x^2 + y^2}.$$

Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ giebt

benen Werthe von x und y ist aber u' auch eine Funktion von ψ und φ, und folglich

$$du' = \left(\frac{du'}{d\psi}\right).d\psi + \left(\frac{du'}{d\varphi}\right).d\varphi.$$

49) Vermöge der Gleichungen (O).

$$x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z + ds^2 = 0.$$

Substituirt man statt zd^2z seinen vorhergehenden Werth, so erhält man

$$xd^2x + yd^2y = -(x^2 + y^2)\,.\,ds^2 = -ds^2\,.\,\cos\psi^2,$$

folglich

$$\left(\frac{du'}{dx}\right).\,d^2y - \left(\frac{du'}{dy}\right).\,d^2x = \left(\frac{du'}{d\phi}\right).\,ds^2.$$

Die erste der Gleichungen (O) giebt so, wenn man sie integrirt [50]),

$$r^2\,d\phi\,.\,\sin\theta^2 = c.ds + \alpha.ds\,.\int ds\,.\left(\frac{du'}{d\phi}\right);\quad \text{(p)}$$

wo c eine willkührliche beständige Gröſse ist.

Die zweyte der Gleichungen (O) giebt,

$$d.(xdz - zdx) = \alpha\,.\left(\frac{du'}{dx}\right).\,d^2z;$$

man sieht aber leicht aus dem Vorhergehenden, daſs [51])

$$d^2z = -ds^2\,.\,\sin\psi$$

ist; man hat also

$$d.(xdz - zdx) = -\alpha\,ds^2\,.\left(\frac{du'}{dx}\right).\,\sin\psi;$$

man hat ebenfalls

$$d.(ydz - zdy) = -\alpha\,ds^2\,.\left(\frac{du'}{dy}\right).\,\sin\psi.$$

50) Da $xd^2y - yd^2x = d.(xdy - ydx)$ ist, so verwandelt sich die erste der Gleichungen (O) in folgende: $d.(xdy - ydx) = \alpha\,ds^2\,.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$, und wenn man integrirt $xdy - ydx = \alpha.\int ds^2.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right) +$ Constans. Nun ist aber im Allgemeinen, wenn X eine Funktion von x ist, $\int X\,dx^2 = dx\int X\,dx$, weil eine Integration nothwendig nur ein Differenzial wegschaffen kann, und weil das zweyte durch eine folgende Integration weggeschaft werden muſs. Es ist also $\alpha\int ds^2.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right) = \alpha\,ds\int ds.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$, und da alle Glieder einer Gleichung von einerley Ordnung seyn müssen, so ist die beständige Gröſse der obigen Gleichung nothwendig von der Form $c\,ds$, und folglich

$$xdy - ydx = \alpha\,ds\,.\int ds\,.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right) + c\,.\,ds.$$

51) Man hat oben $d^2z = z\,.\,\frac{x.\,d^2x + y.\,d^2y}{x^2 + y^2}$ und $x\,.\,d^2x + y\,.\,d^2y = -(x^2 + y^2)\,ds^2$ gefunden, folglich $d^2z = -z.\,ds^2$; nun ist aber $z = r.\cos\theta = \cos\theta = \cos(100^G - \psi) = \sin\psi$; dies giebt $d^2z = -ds^2\,.\,\sin\psi$.

Man erhält folglich [52])

$$r^2 d\theta = c' . ds . \sin\phi + c'' . ds . \cos\phi$$
$$- \alpha . ds . \cos\phi . \int ds . \left[\left(\frac{du'}{d\psi}\right) . \cos\phi + \left(\frac{du'}{d\phi}\right) . \sin\phi . \text{tang}\,\psi\right]$$
$$- \alpha . ds . \sin\phi . \int ds . \left[\left(\frac{du'}{d\psi}\right) . \sin\phi - \left(\frac{du'}{d\phi}\right) . \cos\phi . \text{tang}\,\psi\right] . \quad (q)$$

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, wenn die erste Seite der geodätischen Linie mit der entsprechenden Ebene des Himmelsmeridians parallel ist. In diesem Fall ist $d\phi$, so wie dr, von der Ordnung α; man hat also, wenn man die Gröſsen von der Ordnung α^2 vernachlässigt, $ds = - r d\theta$, wo man annimmt, daſs der Bogen s vom Aequator zu den Polen wächst. Man sieht leicht, daſs $\theta = 100^G - \psi - \left(\frac{dr}{d\psi}\right)$ ist, wenn ψ die Breite bezeichnet [53]); dies giebt

$d\theta$

52) Die beiden vorhergehenden Gleichungen geben, wenn man integrirt, $xdz - zdx = - c'' . ds - \alpha ds . \int ds . \left(\frac{du'}{dx}\right) \sin\psi$, und wenn man statt $\left(\frac{du'}{dx}\right)$ seinen obigen Werth substituirt, $xdz - zdx = - c'' ds + \alpha ds . \int ds \left[\left(\frac{du'}{d\psi}\right) . \cos\varphi + \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) . \sin\varphi . \text{tang}\,\psi\right]$; eben so findet man $ydz - zdy = - c' ds + \alpha ds . \int ds \left[\left(\frac{du'}{d\psi}\right) . \sin\varphi - \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) . \cos\varphi . \text{tang}\,\psi\right]$. Substituirt man diese Werthe von $xdz - zdx$ und von $ydz - zdy$ in die oben für $- r^2 d\theta$ gefundene Gleichung, so erhält man die im Text gegebene Gleichung (q).

53) Da der Winkel φ sich nur um Gröſsen von der Ordnung α ändert, so kann man annehmen, daſs die geodätische Linie in einer Ebene ist. Es seyen dann y' und x' die neuen Koordinaten, so ist $y' = z = r . \cos\theta$ und $x' = \sqrt{y^2 + x^2} = r . \sin\theta$. Die Breite ψ ist gleich dem Winkel, welchen die Normale mit der Ebene des Aequators macht; folglich $\text{tang}\,(100^G - \psi) = - \frac{dy'}{dx'}$; und die Tangente des Unterschiedes zwischen $100^G - \psi$ und θ ist nach dem Bekannten trigonometrischen Lehrsatz gleich $\frac{\text{tang}\,(100^G - \psi) - \text{tang}\,\theta}{1 + \text{tang}\,(100^G - \psi) . \text{tang}\,\theta}$. Substituirt man statt $\text{tang}\,(100^G - \psi)$ seinen Werth $- \frac{dy}{dx}$ und $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ statt $\text{tang}\,\theta$, und schafft man dann die Divisoren weg, so erhält man $\text{tang}\,(100^G - \psi - \theta) = \frac{dy' . \cos\theta + dx' . \sin\theta}{dy' . \sin\theta - dx' . \cos\theta}$. Die oben für y' und x' gefundenen Werthe geben $dy' = dr . \cos\theta - d\theta . r . \sin\theta$ und $dx = dr . \sin\theta + d\theta . r . \cos\theta$; folglich

tang

$$d\theta = -d\psi - \alpha . d\psi . \left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right),$$

man hat also

$$ds = d\psi . \left[1 + \alpha u' + \alpha . \left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right)\right].$$

Nennt man nun ε den Unterschied der Breite der beiden äuſsersten Punkte des Bogens s, so erhält man [54])

$$s = \varepsilon + \alpha\varepsilon . \left[u_{,}' + \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\psi^2}\right)\right] + \frac{\alpha . \varepsilon^2}{1 . 2} . \left[\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) + \left(\frac{d^3u_{,}'}{d\psi^3}\right)\right] + \text{etc.},$$

wo $u_{,}'$ der Werth von u' am Anfangspunkt des Bogens s ist.

Ist die Erde ein durch Umdrehung entstandener Körper, so ist die geodätische Linie immer in der Ebene eines und desselben Mittagskreises; sie entfernt sich von derselben, wenn die Parallelen keine Kreise sind. Die Beobachtung dieser Abweichung kann uns also über diesen wichtigen Punkt der Theorie der Erde Aufschluſs geben. Man nehme die Gleichung (p) wieder vor, und bemerke, daſs in dem jetzigen Fall $d\Phi$ und die beständige Gröſse c dieser

$\tang (100^G - \psi - \theta) = \frac{1}{r} . \frac{dr}{d\theta}$ oder $= \frac{1}{r} . \left(\frac{dr}{d\theta}\right)$, weil man φ als beständig angesehen hat. Die Gleichung für die Oberfläche, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u' = 0$, giebt $r^2 = 1 + 2\alpha u'$, weil $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, und hieraus vermittelst des binomischen Lehrsatzes $r = 1 + \alpha u'$, wenn man die höhern Potenzen von α vernachlässigt. Dieser Werth von r giebt $\frac{dr}{d\theta} = \alpha \left(\frac{du'}{d\theta}\right)$ und $\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right) = \alpha \left(\frac{du'}{d\theta}\right)$, weil man wie immer die höhern Potenzen von α vernachlässigen muſs. Die $\tang (100^G - \psi - \theta)$ ist also sehr klein, und der Winkel $100^G - \psi - \theta$ auch sehr klein, so daſs man statt der Tangente den Bogen setzen kann; dies giebt $100^G - \psi - \theta = \alpha \left(\frac{du'}{d\theta}\right)$. Man sieht nun, daſs man in u' statt θ das Complement der Breite ψ setzen kann, weil der Unterschied beider Winkel nur von der Ordnung α ist, und weil das partielle Differenzial $\left(\frac{du'}{d\theta}\right)$ schon in α multiplicirt ist; dann wird man aber auch dies Differenzial in Beziehung auf ψ, und nicht in Beziehung auf θ nehmen müssen.

54) Der Bogen s ist eine Funktion von ψ; ändert sich nun ψ um ε, so ändert sich der Bogen s vermittelst des Taylorschen Lehrsatzes um

$\varepsilon . \frac{ds}{d\psi} + \frac{\varepsilon^2}{1 . 2} . \frac{d^2s}{d\psi^2} + \ldots$ Nun ist $\frac{ds}{d\psi} = 1 + \alpha u' + \alpha \left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right)$, wo aber u' sich auf den Anfangspunkt des Bogens s bezieht, welchen Werth von u' der Hr. Verfasser zu mehrerer Deutlichkeit mit $u_{,}'$ bezeichnet. Man wird nun ohne Schwierigkeit den im Text gegebenen Werth von s finden.

Gleichung von der Ordnung α sind, und daſs man in ihr $r = 1$, $ds = d\psi$ und $\theta = 100^G - \psi$ setzen kann; man erhält so

$$d\phi \,.\, \cos\psi^2 = c.d\psi + \alpha.d\psi.\int d\psi.\left(\frac{du'}{d\phi}\right).$$

Nennt man nun V den Winkel, welchen die Ebene des Himmelsmittagskreises mit der Ebene der x und der z macht, welche durch den Anfangspunkt der Winkel ϕ geht, so hat man $dx'.\operatorname{tang} V = dy'$; wo x', y', z' die Koordinaten dieses Meridians sind, dessen Differenzialgleichung nach dem vorhergehenden Satz gleich

$$dz' = a\,dx' + b\,dy'$$

ist. Vergleicht man sie mit der vorhergehenden, so sieht man, daſs a und b unendlich groſs und so beschaffen sind, daſs $-\frac{a}{b} = \operatorname{tang} V$ ist. Die Gleichung (a) des vorhergehenden Satzes giebt ferner

$$0 = \left(\frac{du}{dx}\right).\operatorname{tang} V - \left(\frac{du}{dy}\right).$$

Hieraus erhält man [55])

$$0 = x.\operatorname{tang} V - y - \alpha.\left(\frac{du'}{dx}\right).\operatorname{tang} V + \alpha.\left(\frac{du'}{dy}\right).$$

Man kann in den mit α multiplicirten Gliedern, $V = \phi$ und $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\phi$ setzen; man findet so [56])

55) Es ist $u = x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha u'$; $\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x - 2\alpha.\left(\frac{du'}{dx}\right)$ und

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = 2y - 2\alpha.\left(\frac{du'}{dy}\right).$$

56) Man hat im vorhergehenden $\left(\frac{du'}{dx}\right) = -\frac{\cos\varphi}{\sin\psi}.\left(\frac{du'}{d\psi}\right) - \frac{\sin\varphi}{\cos\psi}.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$ gefunden; folglich

$$-\alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)\operatorname{tang} V, \text{ oder } -\alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)\operatorname{tang}\varphi = +\alpha.\left(\frac{du'}{d\psi}\right).\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} + \alpha\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)\frac{\sin\varphi^2}{\cos\psi.\cos\varphi}.$$

Eben so $+\alpha\left(\frac{du'}{dy}\right) = -\frac{\alpha.\sin\varphi}{\sin\psi}.\left(\frac{du'}{d\psi}\right) + \alpha.\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$. Die Summe beider Gleichungen giebt

$$-\alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)\operatorname{tang} V + \alpha\left(\frac{du'}{dy}\right) = \alpha.\left(\frac{du'}{d\varphi}\right).\frac{1}{\cos\psi.\cos\varphi}.$$

$$\cos\psi \,.\, \cos\Phi \,.\, (\tang \Phi - \tang V) = \frac{\alpha \,.\, \left(\frac{du'}{d\Phi}\right)}{\cos\psi \,.\, \cos\Phi};$$

dies giebt [57])

$$\Phi - V = \frac{\alpha \,.\, \left(\frac{du'}{d\Phi}\right)}{\cos\psi^2}.$$

Da man annimmt, daſs die erste Seite der geodätischen Linie parallel mit der Ebene des Himmelsmeridians ist, so sind die Differenziale des Winkels V und der Entfernung, $(\Phi - V) . \cos\psi$ des Anfangspunkts der krummen Linie von der Ebene des Himmelsmeridians in diesem Anfangspunkt gleich Null; man hat daher für diesen Punkt

$$\left(\frac{d\Phi}{d\psi}\right) = (\Phi - V) \,.\, \tang\psi = \frac{\alpha \,.\, \left(\frac{du'}{d\Phi}\right) \,.\, \tang\psi}{\cos\psi^2};$$

und die Gleichung (p) giebt folglich

$$c = \alpha . \left(\frac{du_,'}{d\Phi}\right) . \tang\psi_, ,$$

wo $u_,'$ und $\psi_,$ sich auf den Anfangspunkt des Bogens s beziehen.

Ferner $x \tang V - y = x \left(\tang V - \frac{y}{x}\right) = x \,(\tang V - \tang\varphi) = \cos\psi \,.\, \cos\varphi \,.\, (\tang V - \tang\varphi)$.

Substituirt man diese beiden Werthe in die Gleichung $0 = x \tang V - y - \alpha\left(\frac{du'}{dx}\right)\tang V + \alpha\left(\frac{du'}{dy}\right)$, so erhält man

$$0 = \cos\psi \,.\, \cos\varphi \,(\tang V - \tang\varphi) + \alpha \,.\, \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) \,.\, \frac{1}{\cos\psi \,.\, \cos\varphi}.$$

57) Die vorhergehende Gleichung giebt $\cos\varphi^2 \,(\tang\varphi - \tang V) = \frac{\alpha}{\cos\psi^2} \,.\, \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)$. Nun ist aber

$\cos\varphi^2 = \frac{1}{\sec\varphi^2} = \frac{1}{1 + \tang\varphi^2} = \frac{1}{1 + \tang\varphi \,.\, \tang V}$, wenn man die Gröſsen von der Ordnung α vernachlässigt, welches erlaubt ist, weil der Zähler dieses Bruchs, nämlich $\tang\varphi - \tang V$, von der Ordnung α ist, so daſs die im Nenner weggelassenen Gröſsen nur Glieder von der Ordnung α^2 hervorgebracht haben würden. Dieser Werth von $\cos\varphi^2$ giebt

$$\cos\varphi^2 \,.\, (\tang\varphi - \tang V) = \frac{\tang\varphi - \tang V}{1 + \tang\varphi \,.\, \tang V} = \tang(\varphi - V) = \varphi - V,$$

weil $\varphi - V$ sehr klein und folglich Bogen und Tangente einander gleich sind.

Am Ende des gemessenen Bogens macht die Seite der krummen Linie mit der Ebene des zugehörenden Himmelsmeridians einen Winkel, welcher sehr nahe dem Differenzial von $(\phi - V) \cdot \cos\psi$, durch $d\psi$ dividirt, gleich ist [58]), wo man aber V in den Differenziationen als beständig ansehen muſs. Bezeichnet man daher diesen Winkel durch ϖ, so erhält man

$$\varpi = \frac{d\phi}{d\psi} \cdot \cos\psi - (\phi - V) \cdot \sin\psi.$$

Substituirt man statt $\frac{d\phi}{d\psi}$ seinen aus der Gleichung (p) hergeleiteten Werth, und statt $\phi - V$ seinen vorhergehenden Werth, so erhält man

$$\varpi = \frac{\alpha}{\cos\psi} \cdot \left[\left(\frac{du_{,}'}{d\phi}\right) \cdot \operatorname{tang}\psi_{,} - \left(\frac{du'}{d\phi}\right) \cdot \operatorname{tang}\psi + \int d\psi \cdot \left(\frac{du'}{d\phi}\right)\right],$$

wo das Integral vom Anfang des gemessenen Bogens bis zu seinem Ende genommen werden muſs. Man nenne ε den Unterschied der Breiten seiner zwey Endpunkte, und man nehme an, daſs ε klein genug ist, um sein Quadrat vernachlässigen zu können, so hat man [59])

$$\varpi = -\frac{\alpha\varepsilon \cdot \operatorname{tang}\psi}{\cos\psi} \cdot \left[\left(\frac{du'}{d\phi}\right) \cdot \operatorname{tang}\psi + \left(\frac{d^2u'}{d\phi \cdot d\psi}\right)\right];$$

wo die Werthe von ψ, $\left(\frac{du'}{d\phi}\right)$, und $\left(\frac{d^2u'}{d\phi \cdot d\psi}\right)$ sich hier, um mehrerer Genauigkeit willen, auf die Mitte des gemessenen Bogens beziehen müssen. Der Winkel ϖ muſs als positiv angesehen werden, wenn er sich in der Richtung der Vermehrungen von ϕ vom Mittagskreis entfernt.

58) Vermöge des Taylorschen Lehrsatzes.

59) Wenn sich ψ in $\psi + \varepsilon$ verwandelt, so ist die zugehörende Aenderung des Werthes von ϖ vermöge des Taylorschen Lehrsatzes gleich $\varepsilon \cdot \frac{d\varpi}{d\psi} + \ldots$ Nun ist

$$-\frac{d \cdot \left(\frac{du'}{d\varphi} \cdot \operatorname{tang}\psi\right)}{d\psi} = -\left(\frac{d^2u'}{d\varphi \cdot d\psi}\right) \operatorname{tang}\psi - \left(\frac{du'}{d\varphi}\right) \cdot (1 + \operatorname{tang}\psi^2), \text{ und}$$

$$\frac{d \cdot \int \cdot d\psi \cdot \left(\frac{du'}{d\varphi}\right)}{d\psi} = \left(\frac{du'}{d\varphi}\right), \text{ folglich } \varepsilon \cdot \left(\frac{d\varpi}{d\psi}\right) \text{ oder}$$

$$\varpi = -\frac{\varepsilon\alpha \cdot \operatorname{tang}\psi}{\cos\psi} \cdot \left[\left(\frac{du'}{d\varphi}\right) \cdot \operatorname{tang}\psi + \left(\frac{d^2u'}{d\varphi \cdot d\psi}\right)\right].$$

Um den Unterschied der geographischen Länge der beiden durch die Endpunkte des Bogens gehenden Meridiane zu erhalten, muſs man bemerken, daſs

$$\Phi_{,} - V_{,} = \frac{a \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\Phi}\right)}{\cos \psi_{,}^{2}}, \text{ und } \Phi - V = \frac{a \cdot \left(\frac{du'}{d\Phi}\right)}{\cos \psi^{2}}$$

ist, wenn $u_{,}'$, $V_{,}$, $\psi_{,}$ und $\Phi_{,}$ die Werthe sind, welche u', V, ψ und Φ am ersten Endpunkt haben. Man hat aber sehr nahe, wenn man das Quadrat von ε vernachlässigt,

$$\Phi - \Phi_{,} = \frac{c \cdot \varepsilon}{\cos \psi_{,}^{2}}; \qquad c = a \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\Phi}\right) \cdot \text{tang}\, \psi_{,};$$

folglich

$$V - V_{,} = -\frac{a \cdot \varepsilon}{\cos \psi_{,}^{2}} \cdot \left[\left(\frac{du_{,}'}{d\Phi}\right) \cdot \text{tang}\, \psi_{,} + \left(\frac{d^{2}u_{,}'}{d\Phi \cdot d\psi}\right)\right],$$

woraus folgende sehr einfache Gleichung folgt:

$$(V - V_{,}) \cdot \sin \psi_{,} = \varpi.$$

Man kann also durch die Beobachtungen allein und unabhängig von der Kenntniſs der Gestalt der Erde den Längenunterschied der Meridiane bestimmen, welche durch die Endpunkte des gemessenen Bogens gehen; und wenn der Winkel ϖ so beschaffen ist, daſs man ihn nicht Fehlern der Beobachtungen zuschreiben kann, so wird man versichert seyn, daſs die Erde kein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid ist.

Wir wollen nun den Fall betrachten, wenn die erste Seite der geodätischen Linie senkrecht auf die Ebene des zugehörenden Himmelsmeridians ist. Nimmt man diese Ebene zur Ebene der x und der z an, so ist der Kosinus des Winkels, welchen diese Seite mit dieser Ebene bildet, gleich $\frac{\sqrt{dx^{2} + dz^{2}}}{ds}$.

Da nun dieser Kosinus im Anfangspunkt gleich Null ist, so hat man $dx = 0$, $dz = 0$; dies giebt

$$d.(r \cdot \sin \theta \cdot \cos \Phi) = 0; \qquad d.(r \cdot \cos \theta) = 0,$$

und folglich [60])

60) Es ist $d.(r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi) = dr \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + d\theta \cdot r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi - d\varphi \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta = 0$; dividirt man diese Gleichung durch $\cos \varphi$ und multiplicirt man sie mit $\cos \theta$, so erhält man

$$r \,.\, d\theta = r \,.\, d\phi \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, \operatorname{tang}\phi;$$

man hat aber bis auf die Gröſsen von der Ordnung α^2, $ds = r \,.\, d\phi \,.\, \sin\theta$ [61]); und folglich im Anfangspunkt

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\operatorname{tang}\phi \,.\, \cos\theta}{r}.$$

Die beständige Gröſse c'' der Gleichung (q) ist dem Werth von $xdz - zdx$ am Anfangspunkt gleich; sie ist also gleich Null; und die Gleichung (q) giebt am Anfangspunkt

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{c'}{r^2} \,.\, \sin\phi;$$

man hat also, wenn man bemerkt, daſs ϕ von der Ordnung α ist, und daſs folglich $\sin\phi = \operatorname{tang}\phi$ ist, wenn man die Gröſsen von der Ordnung α^2 vernachlässigt,

$$c' = r_{,} \,.\, \cos\theta_{,},$$

wo die Gröſsen $r_{,}$ und $\theta_{,}$ sich auf den Anfangspunkt beziehen. Betrachtet man nun, daſs der Winkel ϕ an diesem Anfangspunkt eben derselbe ist, welchen wir vorher $\phi_{,} - V_{,}$ genannt haben, und dessen Werth wir gleich $\alpha \,.\, \left(\frac{du_{,}'}{d\phi}\right) \,.\, \cos\psi_{,}^{-2}$ gefunden haben, so erhält man an diesem Punkt [62])

$dr \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta + d\theta \,.\, r \,.\, \cos\theta^2 - d\varphi \,.\, r \,.\, \operatorname{tang}\varphi \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta = 0$. Die zweyte Gleichung, $d.(r \,.\, \cos\theta) = 0$, giebt $dr \,.\, \cos\theta - d\theta \,.\, r \,.\, \sin\theta = 0$, und wenn man sie mit $\sin\theta$ multiplicirt, $dr \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\theta - d\theta \,.\, r \,.\, \sin\theta^2 = 0$. Zieht man diese letztere Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man

$$r \,.\, d\theta - d\varphi \,.\, r \,.\, \operatorname{tang}\varphi \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta = 0.$$

61) Man hat im Vorhergehenden (m. s. d. 47ste Anm.) $ds^2 = r^2 d\varphi^2 \,.\, \sin\theta^2 + (r^2 d\theta^2 + dr^2)$ gefunden; hieraus vermittelst des binomischen Lehrsatzes, $ds = r \,.\, d\varphi \,.\, \sin\theta + \frac{1}{2}\,\frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{r\, d\varphi \,.\, \sin\theta} - \ldots$ Bey einer auf den Mittagskreis senkrechten geodätischen Linie sind aber $d\theta$ und dr von der Ordnung α; das zweyte Glied des Werths von ds ist also von der Ordnung α^2.

62) Die vorher gefundene Gleichung $\frac{d\theta}{ds} = \frac{c'}{r^2} \,.\, \sin\varphi$ bezieht sich auf den Anfangspunkt; man muſs also θ in $\theta_{,}$ und r in $r_{,}$ nach der angenommenen Bezeichnung verwandeln; sie giebt dann $\frac{d\theta_{,}}{ds} = \frac{c'}{r_{,}^2} \,.\, \sin\varphi$. Setzt man statt c' seinen Werth $r_{,} \,.\, \cos\theta_{,}$ oder $r_{,} \,.\, \sin\psi_{,}$, und statt $\sin\varphi$ seinen Werth $\alpha \left(\frac{du_{,}'}{d\varphi}\right) \cos\psi^{-2}$, so erhält man $\frac{d\theta_{,}}{ds} = \frac{\alpha \,.\, \sin\psi_{,}}{r_{,} \,.\, \cos\psi_{,}^2} \,.\, \left(\frac{du_{,}'}{d\varphi}\right)$, wo man noch $r_{,}$ gleich 1 setzen muſs, weil $r_{,}$ nur um Gröſsen von der Ordnung α von der Einheit verschieden ist.

$$\frac{d\theta_,}{ds} = \alpha \left(\frac{du_,'}{d\phi}\right) \cdot \frac{\sin \psi_,}{\cos \psi_,^2}.$$

Die Gleichung (q) giebt ferner [63]):

$$\frac{d^2\theta_,}{ds^2} = \frac{\cos \theta_,}{r_,} \cdot \frac{d\phi_,}{ds} - \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right).$$

Man hat aber [64])

$$\frac{d\phi_,}{ds} = \frac{1}{r_, \cdot \sin \theta_,}; \quad r_, = 1 + \alpha u_,'; \quad \theta_, = 100^G - \psi_, - \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right),$$

folglich [65])

$$\frac{d^2\theta_,}{ds^2} = (1 - 2\alpha u_,') \cdot \tang \psi_, + \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right) \cdot \tang \psi_,^2.$$

Bemerkt man nun, daſs am Anfangspunkt [66])

$$\frac{d\phi_,}{ds} = \frac{1}{r_, \cdot \sin \theta_,} = \frac{1}{\cos \psi_,} \cdot \left[1 - \alpha u_,' + \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right) \cdot \tang \psi_,\right]$$

ist, so giebt die Gleichung (p) folgende:

$$c = r_, \cdot \sin \theta_,.$$

63) $\varphi_,$ ist der Werth von φ am Anfangspunkt; und da $\varphi_,$ von der Ordnung α ist, so ist $\cos \varphi_,$ der Einheit gleich, wenn man die Gröſsen von der Ordnung α^2 vernachlässigt.

64) Die Gleichung (p) giebt am Anfangspunkt, wo das Integral gleich Null ist, $r_,^2 \cdot d\varphi_, \cdot \sin \theta_,^2 = c\,ds$. Setzt man statt $r_, \cdot d\varphi_, \cdot \sin \theta_,$ seinen Werth ds, und dividirt man durch ds, so erhält man $c = r_, \cdot \sin \theta_,$. Substituirt man diesen Werth von c in die gegebene Gleichung, so erhält man $r_,^2 . d\varphi_, . \sin \theta_,^2 = r_, . \sin \theta_, . ds$ und folglich $\frac{d\varphi_,}{ds} = \frac{1}{r_, \cdot \sin \theta_,}$.

65) Es ist nämlich $\cos \theta_, = \tang \left[\psi_, + \alpha \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right)\right] = \tang \psi_, + \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right) \cdot (1 + \tang \psi_,^2)$, vermöge der bekannten Differenzialformel $d . \tang x = dx . (1 + \tang x^2)$.

66) Es ist $\frac{1}{\sin \theta_,} = \cos \left[\psi' + \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right)\right]^{-1}$ und $d . (\cos \psi_,^{-1}) = d\psi_, . \sin \psi_, . \cos \psi_,^{-2}$ $= d\psi_, . \tang \psi_, . \cos \psi_,^{-1}$. Setzt man $d\psi_, = \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right)$, so erhält man

$$\cos \left[\psi_, + \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right)\right]^{-1} \text{ oder } \frac{1}{\sin \theta_,} = \frac{1}{\cos \psi_,} \left[1 + \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right) \cdot \tang \psi_,\right].$$

Multiplicirt man diese Gröſse mit $\frac{1}{r_,}$ oder mit $1 - \alpha u_,'$, so erhält man die im Text gegebene Gleichung.

Hieraus erhält man [67])

$$\frac{d^2\Phi_{,}}{ds^2} = -\frac{2\,\alpha\,.\,\frac{du_{,}'}{ds}}{r_{,}\,.\,\sin\theta_{,}} - \frac{2\,.\,\frac{d\theta_{,}}{ds}\,.\,\cos\theta_{,}}{r_{,}\,.\,\sin\theta_{,}^2} + \frac{\alpha\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\Phi_{,}}\right)}{\cos\psi_{,}^2},$$

und folglich

$$\frac{d^2\Phi_{,}}{ds^2} = -\,\alpha\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\Phi}\right).\left(\frac{2-\cos\psi_{,}^2}{\cos\psi_{,}^4}\right).$$

Die Gleichung

$$\theta = 100^G - \psi - \alpha\,.\left(\frac{du'}{d\psi}\right)$$

giebt, wenn man unter den Gliedern von der Ordnung s^2 nur diejenigen behält, welche von α unabhängig sind [68]),

ψ —

67) Man bemerke, daſs $\alpha\,\frac{du_{,}'}{ds} = \alpha\left(\frac{du_{,}'}{d\varphi_{,}}\right).\frac{d\varphi_{,}}{ds} + \alpha\left(\frac{du_{,}'}{d\psi_{,}}\right).\frac{d\psi_{,}}{ds}$ ist. Da aber $\frac{d\psi_{,}}{ds}$ so wie $\frac{d\theta_{,}}{ds}$ von der Ordnung α ist, so ist das letzte Glied dieser Gleichung von der Ordnung α^2, und muſs also weggelassen werden; dies giebt $\alpha\,\frac{du_{,}'}{ds} = \alpha\left(\frac{du_{,}'}{d\varphi_{,}}\right).\frac{d\varphi_{,}}{ds} = \frac{\alpha}{r_{,}\,.\,\sin\theta_{,}}.\left(\frac{du_{,}'}{d\varphi_{,}}\right)$. Man bemerke ferner, daſs die beiden Zeichen $\left(\frac{du_{,}'}{d\varphi}\right)$ und $\left(\frac{du_{,}'}{d\varphi_{,}}\right)$ einerley Bedeutung haben.

68) Da $\psi_{,} = 100^G - \theta_{,} - \alpha\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)$ ist, so giebt der Taylorsche Lehrsatz

$$\psi = \psi_{,} + s\,.\,\frac{d\,.\left[-\theta_{,} - \alpha\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)\right]}{ds} + \frac{s^2}{1\,.\,2}\,.\,\frac{d^2\,.\left[-\theta_{,} - \alpha\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)\right]}{ds^2}.$$

Nun ist $\frac{d\,.\left[-\theta_{,} - \alpha\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)\right]}{ds} = -\frac{d\theta_{,}}{ds} - \frac{\alpha\,d\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)}{ds}$. Es ist aber $\frac{d\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)}{ds}$ $= \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\psi\,.\,d\varphi_{,}}\right).\frac{d\varphi_{,}}{ds} + \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\psi\,.\,d\psi_{,}}\right).\frac{d\psi_{,}}{ds} = \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\psi\,.\,d\varphi_{,}}\right).\frac{d\varphi_{,}}{ds}$, weil $\frac{d\psi_{,}}{ds}$ von der Ordnung α ist. Substituirt man nun noch statt $\frac{d\varphi_{,}}{ds}$ seinen Werth $\frac{1}{\cos\psi_{,}}$, wo man die Gröſsen von der Ordnung α weglässt, so erhält man $\frac{d\,.\left[-\theta_{,} - \alpha\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)\right]}{ds} = -\frac{d\theta_{,}}{ds} - \frac{\alpha}{\cos\psi_{,}}.\left(\frac{d^2u_{,}'}{d\psi\,.\,d\varphi_{,}}\right)$. Man hat ferner $\frac{d^2\,.\left[-\theta_{,} - \alpha\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)\right]}{ds^2} = -\frac{d^2\theta_{,}}{ds^2}$, weil dies Differenzial schon den Factor s^2 hat. Substituirt

man

$$\psi - \psi_{,} = - s \cdot \frac{d\theta_{,}}{ds} - \tfrac{1}{2} s^2 \cdot \frac{d^2\theta_{,}}{ds^2} - \frac{\alpha s}{\cos\psi_{,}} \cdot \left(\frac{d^2 u_{,}'}{d\phi \cdot d\psi}\right),$$

folglich

$$\psi - \psi_{,} = - \frac{\alpha s}{\cos\psi_{,}} \cdot \left[\left(\frac{du_{,}'}{d\phi}\right) \cdot \tang\psi_{,} + \alpha \cdot \left(\frac{d^2 u_{,}'}{d\phi \cdot d\psi}\right)\right] - \tfrac{1}{2} s^2 \cdot \tang\psi_{,}.$$

Man wird also durch den Unterschied der an den beiden Endpunkten gemessenen Breiten den Werth der Funktion

$$- \frac{\alpha s}{\cos\psi_{,}} \cdot \left[\left(\frac{du_{,}'}{d\phi}\right) \cdot \tang\psi_{,} + \alpha \cdot \left(\frac{d^2 u_{,}'}{d\phi \cdot d\psi}\right)\right]$$

erkennen. Es ist merkwürdig, daſs diese Funktion für denselben Bogen, wenn er in der Richtung des Mittagskreises gemessen worden, vermöge des vorhergehenden gleich $\frac{\varpi}{\tang\psi_{,}}$ ist; man wird sie also auf diese zwey verschiedenen Arten bestimmen, und dadurch beurtheilen können, ob die gefundenen Werthe sowohl für den Unterschied der Breiten, als für den Azimuthalwinkel ϖ von Beobachtungsfehlern, oder von der Eccentrizität der Erdparallelkreise herrühren.

Behält man nur die erste Potenz von s, so hat man

$$\phi - \phi_{,} = s \cdot \frac{d\phi_{,}}{ds} = \frac{s}{\cos\psi_{,}} \cdot \left[1 - \alpha u_{,}' + \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) \cdot \tang\psi_{,}\right];$$

$\phi - \phi_{,}$ ist aber nicht der Längenunterschied der beiden Endpunkte des Bogens s; dieser Unterschied ist gleich $V - V_{,}$; man hat aber nach dem Vorhergehenden

$$\phi - V = \frac{\alpha \cdot \left(\frac{du'}{d\phi}\right)}{\cos\psi^2};$$

dies giebt

$$\phi - V - (\phi_{,} - V_{,}) = \frac{\alpha s \cdot \left(\frac{d^2 u_{,}'}{d\phi \cdot ds}\right)}{\cos\psi_{,}^2} = \frac{\alpha s \cdot \left(\frac{d^2 u_{,}'}{d\phi^2}\right)}{\cos\psi_{,}^3},$$

folglich

man diese Werthe in die Gleichung für ψ, so findet man

$$\psi = \psi_{,} - s \cdot \frac{d\theta_{,}}{ds} - \frac{\alpha \cdot s}{\cos\psi_{,}} \cdot \left(\frac{d^2 u_{,}'}{d\psi \cdot d\varphi_{,}}\right) - \tfrac{1}{2} s^2 \cdot \frac{d^2\theta_{,}}{ds^2}.$$

$$V - V_{,} = \frac{s}{\cos \psi_{,}} \cdot \left\{ 1 - \alpha \cdot u_{,}' + \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) \cdot \tang \psi_{,} - \frac{\alpha \cdot \left(\frac{d^2 u_{,}'}{d\Phi^2}\right)}{\cos \psi_{,}^2} \right\}.$$

Man muſs zu diesem Werth von $V - V_{,}$, um mehrerer Genauigkeit willen, das Glied hinzusetzen, welches von s^3 abhängt, aber von α unabhängig ist, und welches man in der Voraussetzung erhält, daſs die Erde eine Kugel ist; dieses Glied ist gleich $-\frac{1}{3} s^3 \cdot \frac{\tang \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}}$ [69]); man findet so

69) Der Taylorsche Lehrsatz giebt $\varphi - \varphi_{,} = s \cdot \frac{d\varphi_{,}}{ds} + \frac{s^2}{2} \cdot \frac{d^2\varphi_{,}}{ds^2} + \frac{s^3}{6} \cdot \frac{d^3\varphi_{,}}{ds^3} + \ldots$ Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so ist $\alpha = 0$, und folglich $\frac{d\varphi_{,}}{ds} = \frac{1}{\cos \psi_{,}}$ und man wird $\frac{d^3\varphi'}{ds^3} = \frac{d^2\psi_{,}}{ds^2} \cdot \frac{\sin \psi_{,}}{\cos \psi_{,}^2} = -\frac{\tang \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}}$ finden. Das von s^3 abhängende Glied der Gröſse $\varphi - \varphi_{,}$ oder $V - V_{,}$ würde folglich $-\frac{1}{6} s^3 \cdot \frac{\tang \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}}$ und also nur die Hälfte seines wahren Werthes seyn. Dieser Unterschied rührt daher, daſs man bey den vorhergehenden, zur Bestimmung von $d\varphi_{,}$ geführten, Berechnungen sin φ und tang φ dem Bogen φ gleich gesetzt hat, wodurch man Gröſsen von der Ordnung s^3 vernachlässigt. Man wird in der folgenden 77sten Anmerkung ein Beyspiel finden, wo sich dieser Umstand deutlicher zeigt. Wir nehmen daher die im vorhergehenden gefundene Gleichung $ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\theta + r^2 \cdot d\varphi^2 \cdot \sin \theta^2$ wieder vor; für eine Kugel ist r beständig und gleich 1, und $dr = 0$; folglich $ds^2 = d\theta^2 + d\varphi^2 \cdot \sin \theta^2$, oder $1 = \frac{d\theta^2}{ds^2} + \frac{d\varphi^2}{ds^2} \sin \theta^2$. Differenziirt man diese Gleichung und dividirt man sie durch $2\,ds$, welches Differenzial man als beständig annimmt, so erhält man

$$0 = \frac{d\theta \cdot d^2\theta}{ds^3} + \frac{d\varphi \cdot d^2\varphi}{ds^3} \cdot \sin \theta^2 + \frac{d\theta \cdot d\varphi^2}{ds^3} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta.$$

Diese Gleichung enthält nur das zweyte Differenzial von φ; man wird sie also von neuem differenziiren müssen, um $d^3\varphi$ zu erhalten. Hierbey kann man aber die Glieder, welche den Factor $\frac{d\theta}{ds}$ behalten, weglassen, weil der Werth des Differenzials $\frac{d\theta}{ds}$ die Gröſse α als Factor enthält, welche bey einer Kugel gleich Null ist. Man erhält so

$$0 = \frac{(d^2\theta)^2}{ds^4} + \frac{(d^2\varphi)^2}{ds^4} \cdot \sin \theta^2 + \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{d^3\varphi}{ds^3} \cdot \sin \theta^2 + \frac{d^2\theta}{ds^2} \cdot \frac{d\varphi^2}{ds^2} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta.$$

Setzt man nun in den für $\frac{d\theta_{,}}{ds}$, $\frac{d^2\theta_{,}}{ds^2}$, $\frac{d\varphi_{,}}{ds}$ und $\frac{d^2\varphi_{,}}{ds^2}$ gefundenen Gleichungen α gleich Null, so findet man $\frac{(d^2\theta)^2}{ds^2} = \tang \psi_{,}^2$; $\frac{(d^2\varphi)^2}{ds^4} = 0$; $\frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{d^3\varphi}{ds^3} \cdot \sin \theta^2 = \frac{\sin \theta^2}{\cos \psi_{,}} \cdot \frac{d^3\varphi}{ds^3} = \frac{\cos \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}} \cdot \frac{d^3\varphi}{ds^3} = \cos \psi_{,} \cdot \frac{d^3\varphi}{ds^3}$; endlich $\frac{d^2\theta}{ds^2} \cdot \frac{d\varphi^2}{ds^2} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \tang \psi_{,} \cdot \frac{\sin \psi_{,} \cdot \cos \psi_{,}}{\cos \psi_{,}^2} = \tang \psi_{,}^2$. Substituirt

$$V - V_{,} = \frac{s}{\cos \psi_{,}} \cdot \left\{ 1 - \alpha u_{,}' + \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) . \text{tang}\, \psi_{,} - \frac{\alpha \cdot \left(\frac{d^2 u_{,}'}{d\Phi^2}\right)}{\cos \psi_{,}^2} - \tfrac{1}{3} s^2 . \text{tang}\, \psi_{,}^2 \right\}.$$

Wir haben nur noch den Azimuthalwinkel am Ende des Bogens s zu bestimmen. Man nenne hierzu x' und y' die Koordinaten x und y in Beziehung auf den Mittagskreis des Endpunkts des Bogens s; man sieht dann leicht, daſs der Kosinus des Azimuthalwinkels gleich $\frac{\sqrt{dx'^2 + dz^2}}{ds}$ ist. Bezieht man die Koordinaten x und y auf die Ebene des Mittagskreises, welcher durch den Anfangspunkt des Bogens geht, so hat man, da man annimmt, daſs die erste Seite senkrecht auf die Ebene dieses Mittagskreises ist [70]),

$$\frac{dx_{,}}{ds} = 0; \quad \frac{dz_{,}}{ds} = 0; \quad \frac{dy_{,}}{ds} = 1,$$

folglich, wenn man nur die erste Potenz von s behält [71]),

$$\frac{dx}{ds} = s \cdot \frac{d^2 x_{,}}{ds^2}; \quad \frac{dz}{ds} = s \cdot \frac{d^2 z_{,}}{ds^2}.$$

Man hat aber

$$x' = x \cdot \cos(V - V_{,}) + y \cdot \sin(V - V_{,});$$

da nun $V - V_{,}$ vermöge des Vorhergehenden von der Ordnung α ist, so hat man

$$\frac{dx'}{ds} = s \cdot \frac{d^2 x_{,}}{ds^2} + (V - V_{,}) \cdot \frac{dy_{,}}{ds}.$$

man diese vier Werthe in die vorhergehende Gleichung, so erhält man $0 = 2\, \text{tang}\, \psi_{,}^2 + \frac{d^3\varphi}{ds^3} \cdot \cos \psi_{,}$, oder $\frac{d^3\varphi}{ds^3} = -2 \cdot \frac{\text{tang}\, \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}}$ und $\frac{1}{6} s^3 \cdot \frac{d^3\varphi}{ds^3} = -\frac{1}{3} s^3 \cdot \frac{\text{tang}\, \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}}$.

70) $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ sind die Koordinaten des Anfangspunktes, x, y, z die des Endpunktes des Bogens s, beide auf die Ebene des Mittagskreises bezogen, welche durch den Anfangspunkt des Bogens geht, so daſs diese Ebene die Ebene der x und der z ist.

71) Der Taylorsche Lehrsatz giebt $\frac{dx}{ds} = \frac{dx_{,}}{ds} + s \cdot \frac{d^2x_{,}}{ds^2} = s \cdot \frac{d^2x_{,}}{ds^2}$; eben so $\frac{dz}{ds} = \frac{dz_{,}}{ds} + s \cdot \frac{d^2z_{,}}{ds^2} = s \cdot \frac{d^2z_{,}}{ds^2}$; endlich $\frac{dy}{ds} = \frac{dy_{,}}{ds} + s \cdot \frac{d^2y_{,}}{ds^2}$. Da aber $\frac{dy_{,}}{ds} = 1$ ist, so ist $\frac{d^2y_{,}}{ds^2} = 0$; folglich $\frac{dy}{ds} = \frac{dy_{,}}{ds}$. Diese letztere Gleichung wird man in der folgenden Gleichung für $\frac{dx'}{ds}$ gebrauchen.

Man hat nun

$$x = r . \sin \theta . \cos \phi; \quad z = r . \cos \theta;$$

man erhält also, wenn man die Grössen von der Ordnung α^2 vernachlässigt und bemerkt, daſs $\phi_{,}$, $\frac{d^2\phi_{,}}{ds^2}$ und $\frac{d\theta_{,}}{ds}$ Grössen von der Ordnung α sind [72]),

$$\frac{d^2x_{,}}{ds^2} = \alpha . \frac{d^2u_{,}'}{ds^2} . \sin \theta_{,} + r_{,} . \frac{d^2\theta_{,}}{ds^2} . \cos \theta_{,} - r_{,} . \sin \theta_{,} . \frac{d\phi_{,}^2}{ds^2} .$$

Man hat ferner [73])

72) Es ist $x_{,} = r_{,} . \sin \theta_{,} . \cos \varphi_{,}$, folglich $\frac{dx_{,}}{ds} = \frac{dr_{,}}{ds} . \sin \theta_{,} . \cos \varphi_{,} + \frac{d\theta_{,}}{ds} . r_{,} . \cos \theta_{,} . \cos \varphi_{,} - \frac{d\varphi_{,}}{ds} . r_{,} . \sin \theta_{,} . \sin \varphi_{,}$,

und da $\frac{dr_{,}}{ds} = \frac{d . (1 + \alpha u_{,}')}{ds} = \alpha . \frac{du_{,}'}{ds}$, so ist

$$\frac{dx_{,}}{ds} = \alpha . \frac{du_{,}'}{ds} . \sin \theta_{,} . \cos \varphi_{,} + \frac{d\theta_{,}}{ds} . r_{,} . \cos \theta_{,} . \cos \varphi_{,} - \frac{d\varphi_{,}}{ds} . r_{,} . \sin \theta_{,} . \sin \varphi_{,} \; . \; . \; . \quad (1).$$

Nun ist $\frac{\alpha . d . \left(\frac{du_{,}'}{ds} . \sin \theta_{,} . \cos \varphi_{,}\right)}{ds} = \alpha . \frac{d^2u_{,}'}{ds^2} . \sin \theta_{,} . \cos \varphi_{,} + \alpha . \frac{d\theta_{,}}{ds} . \frac{du_{,}'}{ds} . \cos \theta_{,} . \cos \varphi_{,}$

$- \alpha . \frac{du'}{ds} . \frac{d\varphi_{,}}{ds} . \sin \theta_{,} . \sin \varphi_{,}$. Die beiden letzten Glieder sind von der Ordnung α^2, weil $\frac{d\theta_{,}}{ds}$ und $\sin \varphi_{,}$ von der Ordnung α sind, und können also vernachlässigt werden; im ersten Glied muſs man $\cos \varphi_{,} = 1$ setzen, weil φ von der Ordnung α ist; man findet so

$$\frac{\alpha . d . \left(\frac{du_{,}'}{ds} . \sin \theta_{,} . \cos \varphi_{,}\right)}{ds} = \alpha . \frac{d^2u_{,}'}{ds^2} . \sin \theta_{,} \; . \; . \; . \quad (2).$$

Man findet eben so $\frac{d . \left(\frac{d\theta_{,}}{ds} . r' . \cos \varphi_{,} . \cos \theta_{,}\right)}{ds} = \frac{d^2\theta_{,}}{ds^2} . r' . \cos \theta_{,} \; . \; . \; . \quad (3),$

und $\frac{d . \left(\frac{d\varphi_{,}}{ds} . r' . \sin \varphi_{,} . \sin \theta_{,}\right)}{ds} = r' . \frac{d\varphi_{,}^2}{ds^2} . \sin \theta_{,} \; . \; . \; . \quad (4).$

Differenziirt man die Gleichung (1), so findet man vermittelst der Gleichungen (2), (3) und (4) den Werth von $\frac{d^2x_{,}}{ds^2}$.

73) Man hat $\alpha \frac{du_{,}'}{ds} = \alpha \left(\frac{du_{,}'}{d\varphi_{,}}\right) . \frac{d\varphi_{,}}{ds} + \alpha \left(\frac{du_{,}'}{d\psi_{,}}\right) . \frac{d\psi_{,}}{ds} \; . \; . \; . \quad (1).$

Differenziirt man von neuem, so ist

$$\frac{\alpha . d . \left[\left(\frac{du_{,}'}{d\varphi_{,}}\right) . \frac{d\varphi_{,}}{ds}\right]}{ds} = \alpha \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\varphi'^2}\right) . \frac{d\varphi_{,}^2}{ds^2} + \alpha \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\varphi_{,} . d\psi_{,}}\right) . \frac{d\psi_{,}}{ds} . \frac{d\varphi_{,}}{ds}$$

$$\alpha \cdot \frac{d^2u_,'}{ds^2} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2u_,'}{d\Phi^2}\right) \cdot \frac{d\Phi_,^2}{ds^2} - \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right) \cdot \frac{d^2\theta_,}{ds^2} = \frac{\alpha \cdot \left(\frac{d^2u_,'}{d\Phi^2}\right)}{\cos\psi_,^2} - \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right) . \text{tang}\,\psi_,,$$

und noch aufserdem $ds = r_, . \sin\theta_, . d\Phi_,$. Man erhält so, wenn man statt $r_,$, $\theta_,$, $\frac{d\Phi_,}{ds}$ und $\frac{d^2\theta_,}{ds^2}$ ihre vorhergehenden Werthe setzt [74]),

$+ \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\varphi_,}\right) \cdot \frac{d^2\varphi_,}{ds^2} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2u_,'}{d\varphi'^2}\right) \cdot \frac{d\varphi_,^2}{ds^2}$, weil die beiden letzten Glieder von der Ordnung α^2 sind.

Eben so: $\frac{\alpha . d . \left[\left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) \cdot \frac{d\psi_,}{ds}\right]}{ds} = \alpha \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) \cdot \frac{d^2\psi_,}{ds^2}$, weil alle übrigen Glieder dieses Differenzials nothwendig die beiden Factoren α und $\frac{d\psi_,}{ds}$ enthalten, und folglich von der Ordnung α^2 sind. Man findet vermittelst dieser beiden Gleichungen das Differenzial der Gleichung (1), nämlich

$$\alpha \cdot \frac{d^2u_,'}{ds^2} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2u_,'}{d\varphi_,^2}\right) \cdot \frac{d\varphi_,^2}{ds^2} + \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) \cdot \frac{d^2\psi_,}{ds^2}.$$

Setzt man hier statt $d^2\psi_,$ seinen Werth $- d^2\theta_,$, so erhält man die im Text gegebene Gleichung.

74) Man hat $\sin\theta_, = \cos\psi_, - \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) . \sin\psi_,$ und $\cos\theta_, = \sin\psi_, + \alpha \cdot \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) . \cos\psi_,$; man mufs also in den Gliedern, welche schon α enthalten, $\sin\theta_, = \cos\psi_,$ und $\cos\theta_, = \sin\psi_,$ setzen; man erhält so $\alpha . \frac{d^2u_,'}{ds^2} . \sin\theta_, = \left(\frac{d^2u_,'}{d\varphi_,^2}\right) \cdot \frac{\alpha}{\cos\psi_,} - \alpha . \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) . \sin\psi_, \ldots (1).$

Ferner $r_, . \frac{d^2\theta_,}{ds^2} . \cos\theta_, = \frac{d^2\theta_,}{ds^2} . \cos\theta_, + \alpha u_,' . \frac{d^2\theta_,}{ds^2} . \cos\theta_,$. Nun ist $\alpha u_,' . \frac{d^2\theta_,}{ds^2} . \cos\theta_, = \alpha u_,' . \text{tang}\,\psi_, . \sin\psi_,$, und $\frac{d^2\theta_,}{ds^2} . \cos\theta_, = \left[(1 - 2\alpha u_,') . \text{tang}\,\psi_, + \alpha . \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) \text{tang}\,\psi_,^2\right] . \left[\sin\psi_, + \alpha . \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) . \cos\psi_,\right]$

$= (1 - 2\alpha u_,') \text{ tang}\,\psi_, . \sin\psi_, + \alpha . \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) \text{tang}\,\psi_,^2 . \sin\psi_, + \alpha . \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) \text{tang}\,\psi_, . \cos\psi_,.$

Diese beiden Werthe geben

$r_, . \frac{d^2\theta_,}{ds^2} . \cos\theta_, = (1 - \alpha u_,') \frac{\sin\psi_,^2}{\cos\psi_,} + \alpha . \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) \text{tang}\,\psi_,^2 . \sin\psi_, + \alpha \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) . \sin\psi_, \ldots (2).$

Man findet endlich $- r_, . \sin\theta_, . \frac{d\varphi_,^2}{ds^2} = - \sin\theta_, . \frac{d\varphi_,^2}{ds^2} - \alpha u_,' . \sin\theta_, . \frac{d\varphi_,^2}{ds^2}$,

wo $- \alpha u_,' . \sin\theta_, . \frac{d\varphi_,^2}{ds_,} = - \frac{\alpha u_,' . \cos\psi_,}{\cos\psi_,^2} = - \frac{\alpha u_,'}{\cos\psi_,}$ und $- \sin\theta_, . \frac{d\varphi_,^2}{ds^2}$

$= - \left[\cos\psi_, - \alpha \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) . \cos\psi_,\right] . \frac{1}{\cos\psi_,^2} . \left[1 - 2\alpha u_,' + 2\alpha \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) . \text{tang}\,\psi_,\right]$

$= - \frac{1}{\cos\psi} \left[1 - 2\alpha u_,' + 2\alpha \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right) \text{tang}\,\psi_,\right] + \frac{\alpha}{\cos\psi} . \left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right).$ Diese beiden Werthe geben

$$\frac{d^2x_{,}}{ds^2} = (1 - \alpha u_{,}') \cdot \frac{\sin \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}} + \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) \cdot \text{tang}\, \psi_{,}^2 \cdot \sin \psi_{,}$$

$$- \frac{1}{\cos \psi_{,}} \cdot \left[1 - \alpha u_{,}' + \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) \cdot \text{tang}\, \psi_{,}\right] + \frac{\alpha \cdot \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\Phi^2}\right)}{\cos \psi_{,}}.$$

Man hat aber, wie man so eben gesehen hat, wenn man die höhern Potenzen von s vernachläſsigt,

$$V - V_{,} = \frac{s}{\cos \psi_{,}} \cdot \left\{1 - \alpha u_{,}' + \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) \cdot \text{tang}\, \psi_{,} - \frac{\alpha \cdot \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\Phi^2}\right)}{\cos \psi_{,}^2}\right\},$$

und $\frac{dy_{,}}{ds} = 1$; folglich

$$\frac{dx'}{ds} = s.(1 - \alpha u_{,}') \cdot \frac{\sin \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}} + \alpha s. \left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) \cdot \text{tang}\, \psi_{,}^2 \cdot \sin \psi_{,} - \alpha s. \left(\frac{d^2u_{,}'}{d^2\Phi}\right) \cdot \frac{\sin \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}^3}.$$

Man findet auf ähnliche Art [75])

$$- r_{,} \cdot \sin \theta_{,} \cdot \frac{d\varphi_{,}^2}{ds^2} = - \frac{1}{\cos \psi_{,}} \left[1 - \alpha u_{,}' + \alpha \left(\frac{du_{,}'}{d\psi_{,}}\right) \cdot \text{tang}\, \psi_{,}\right] \quad \ldots (3).$$

Vereinigt man die in (1), (2), (3) gefundenen Werthe, so erhält man den im Text gegebenen Ausdruck von $\frac{d^2x_{,}}{ds^2}$.

75) Da $z' = r_{,} \cdot \cos \theta_{,} = (1 + \alpha u_{,}') \cdot \cos \theta_{,}$, so ist $\frac{dz_{,}}{ds} = \alpha \cdot \frac{du_{,}'}{ds} \cdot \cos \theta_{,} - \frac{d\theta_{,}}{ds} \cdot \sin \theta_{,} \cdot (1 + \alpha u_{,}')$, und wenn man von neuem differenziirt und die Glieder, welche $\alpha \cdot \frac{d\theta}{ds}$ enthalten würden, wegläſst,

$\frac{d^2z_{,}}{ds^2} = \alpha \cdot \frac{d^2u_{,}'}{ds^2} \cdot \cos \theta_{,} - \frac{d^2\theta_{,}}{ds^2} \cdot \sin \theta_{,} \cdot (1 + \alpha u_{,}')$. Nun ist, so wie in der vorhergehenden Anmerkung,

$$\alpha \cdot \frac{d^2u_{,}'}{ds^2} \cdot \cos \theta_{,} = \alpha \cdot \frac{d^2u_{,}'}{ds^2} \cdot \sin \psi_{,} = \alpha \cdot \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\varphi_{,}^2}\right) \cdot \frac{\sin \psi_{,}}{\cos \psi_{,}^2} - \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi_{,}}\right) \cdot \frac{\sin \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}} \quad \ldots (1),$$

und $- \frac{d^2\theta_{,}}{ds^2} \cdot \sin \theta_{,} \cdot (1 + \alpha u_{,}') = - \alpha u_{,}' \cdot \text{tang}\, \psi_{,} \cdot \cos \psi_{,} - \frac{d^2\theta_{,}}{ds^2} \cdot \left[\cos \psi_{,} - \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi_{,}}\right) \cdot \sin \psi_{,}\right]$

$$= - (1 - \alpha u_{,}') \cdot \sin \psi_{,} - \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi_{,}}\right) \cdot \text{tang}\, \psi_{,}^2 \cdot \cos \psi_{,} + \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi_{,}}\right) \cdot \frac{\sin \psi_{,}^2}{\cos \psi_{,}} \quad \ldots (2).$$

Die Werthe (1) und (2) geben

$$\frac{d^2z_{,}}{ds^2} = - (1 - \alpha u_{,}') \sin \psi_{,} - \alpha \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi_{,}}\right) \cdot \text{tang}\, \psi_{,}^2 \cdot \cos \psi_{,} + \alpha \cdot \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\varphi_{,}^2}\right) \cdot \frac{\sin \psi_{,}}{\cos \psi_{,}^2}.$$

$$\frac{dz}{ds} = -s.(1-\alpha u_,').\sin\psi_, - \alpha s.\left(\frac{du_,'}{d\psi}\right).\text{tang}\,\psi_,^2.\cos\psi_, + \alpha s.\left(\frac{d^2u_,'}{d\Phi^2}\right).\frac{\sin\psi}{\cos\psi_,^2}.$$

Der Kosinus des Azimuthalwinkels am Ende des Bogens s ist also [76])

$$s.\text{tang}\,\psi_, . \left\{1 - \alpha u_,' + \alpha.\left(\frac{du_,'}{d\psi}\right).\text{tang}\,\psi_, - \frac{\alpha.\left(\frac{d^2u_,'}{d\Phi^2}\right)}{\cos\psi_,^2}\right\}.$$

Da dieser Kosinus sehr klein ist, so kann er für die Ergänzung des Azimuthelwinkels angenommen werden, welcher folglich gleich

$$100^G - s.\text{tang}\,\psi_, . \left\{1 - \alpha u_,' + \alpha.\left(\frac{du'}{d\psi}\right).\text{tang}\,\psi_, - \frac{\alpha.\left(\frac{d^2u_,'}{d\Phi^2}\right)}{\cos\psi_,^2}\right\} \text{ ist.}$$

Man mufs um mehrerer Genauigkeit willen zu diesem Winkel den Theil hinzusetzen, welcher von s^3 abhängt, von α aber unabhängig ist, und welcher in der Voraussetzung, dafs die Erde eine Kugel ist, gleich $\frac{1}{3}.s^3.(\frac{1}{2}+\text{tang}\,\psi_,^2).\text{tang}\,\psi_,$ ist [77]); der Azimuthalwinkel am Ende des Bogens s ist folglich gleich

76) Der Kosinus des Azimuthalwinkels ist gleich $\sqrt{\frac{dx'^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}}$. Man findet leicht die Quadrate von $\frac{dx'}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$, weil diese Gröfsen von der Form $a+\alpha b$ sind, dessen Quadrat gleich $a^2+2\alpha ab$ ist. Man erhält so

$$\frac{dx'^2}{ds^2} = s^2.\left[\frac{\sin\psi_,^4}{\cos\psi_,^2} - 2\alpha u_,'.\frac{\sin\psi_,^4}{\cos\psi_,^2} + 2\alpha s.\left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right).\frac{\sin\psi_,^5}{\cos\psi_,^3} - 2\alpha.\left(\frac{d^2u_,'}{d\varphi_,^2}\right).\frac{\sin\psi_,^4}{\cos\psi_,^4}\right];$$

$$\frac{dz^2}{ds^2} = s^2.\left[\sin\psi_,^2 - 2\alpha u_,'.\sin\psi_, + 2\alpha.\left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right).\frac{\sin\psi_,^3}{\cos\psi_,} - 2\alpha.\left(\frac{d^2u_,'}{d\varphi_,^2}\right).\frac{\sin\psi_,^2}{\cos\psi_,^2}\right].$$

Hieraus erhält man $\frac{dx'^2+dz^2}{ds^2}$

$$= s^2.\left[\text{tang}\,\psi_,^2 - 2\alpha u_,'.\text{tang}\,\psi_,^2 + 2\alpha.\left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right)\text{tang}\,\psi_,^3 - 2\alpha.\frac{\text{tang}\,\psi_,^2}{\cos\psi_,^2}.\left(\frac{d^2u_,'}{d\varphi_,^2}\right)\right].$$

Der binomische Lehrsatz giebt $\sqrt{A^2+\alpha B} = A + \frac{1}{2}\alpha.\frac{B}{A}$, folglich

$$\frac{\sqrt{dx'^2+dz^2}}{ds} = s.\text{tang}\,\psi_,\left[1 - \alpha u_,' + \alpha.\left(\frac{du_,'}{d\psi_,}\right).\text{tang}\,\psi_, - \frac{\alpha}{\cos\psi_,^2}.\left(\frac{d^2u_,'}{d\varphi_,^2}\right)\right].$$

77) Es sey $A_,$ der Azimuthalwinkel am Anfang des Bogens, welcher Winkel gleich 100^G ist, und A der Azimuthalwinkel am Ende des Bogens; er ist für eine Kugel, wo $\alpha = 0$ ist, gleich $100^G - s.\text{tang}\,\psi_,$ und folglich $A = A_, - s.\text{tang}\,\psi_,$. Der Taylorsche Lehrsatz giebt aber

$A = A_, + s.\frac{dA_,}{ds} + \frac{1}{2}s^2.\frac{d^2A_,}{ds^2} + \frac{1}{6}s^3.\frac{d^3A}{ds^3}$. Vergleicht man beide Werthe von A, so erhält

$$100^G - s.\tan\psi_, . \left\{ 1 - \alpha u_,' + \alpha . \left(\frac{du_,'}{d\psi}\right) . \tan\psi_, - \frac{\alpha . \left(\frac{d^2u_,'}{d\phi^2}\right)}{\cos\psi_,^2} - \tfrac{1}{3}s^2 . (\tfrac{1}{2} + \tan\psi_,^2) \right\}.$$

Der Krümmungshalbmesser einer geodätischen Linie, welche irgend einen Winkel mit der Ebene des Meridians macht, ist gleich

$$\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}},$$

wenn man ds beständig annimmt; es sey dieser Halbmesser R. Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\alpha u'$ giebt

$$x . d^2x + y . d^2y + z . d^2z = - ds^2 + \alpha . d^2u'.$$

Addirt man zum Quadrat dieser Gleichung die Quadrate der Gleichung (O), so erhält man, wenn man die Glieder von der Ordnung α^2 vernachlässigt,

$$(x^2 + y^2 + z^2) . [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] = ds^4 - 2\alpha ds^2 . d^2u'.$$

Hieraus erhält man

$$R = 1 + \alpha u' + \alpha . \frac{d^2u'}{ds^2}.$$

In der Richtung des Mittagskreises ist $\alpha . \frac{d^2u'}{ds^2} = \alpha . \left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right)$; folglich

$$R = 1 + \alpha u' + \alpha . \left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right).$$

In der auf den Mittagskreis senkrechten Richtung hat man, nach dem Vorhergehenden,

α.

man $\frac{dA_,}{ds} = - \tan\psi_,$, und hieraus durch Differenziiren $\frac{d^2A_,}{ds^2} = - \frac{d\psi_,}{ds} . (1 + \tan\psi_,^2)$, und $\frac{d^3A_,}{ds^3} = - \frac{d^2\psi_,}{ds^2} (1 + \tan\psi^2) - 2 \frac{d\psi_,^2}{ds^2} . \tan\psi . (1 + \tan\psi^2)$. Nun ist $\frac{d\psi_,}{ds} = - \frac{d\theta_,}{ds} = 0$, weil $\alpha = 0$ ist, und $- \frac{d^2\psi_,}{ds^2} = + \frac{d^2\theta_,}{ds^2} = \tan\psi_,$: folglich $\frac{d^2A}{ds} = 0$ und $\frac{d^3A}{ds^3} = \tan\psi_, (1 + \tan\psi^2)$. Dies ist aber nicht der vollständige Werth des Gliedes, welches von s^3 abhängt. Man hat nämlich $\cos A$, oder $\sin (100^G - A) = s . \tan\psi_,$ gefunden, und da dieser Bogen sehr klein ist, so hat man den Bogen selbst, statt des Sinus gesetzt. Nach der bekannten Formel, welche den Bogen durch den Sinus giebt, ist aber $100^G - A = s . \tan\psi_, + \frac{1}{6} s^3 . \tan\psi_,^3 \ldots$ Setzt man das Glied $\frac{1}{6} s^3 . \tan\psi_,^3$ zu dem obigen Werth von $\frac{1}{6} s^3 . \frac{d^3A}{ds^3}$, nämlich $\frac{1}{6} s^3 . \tan\psi_, . (1 + \tan\psi_,^2)$, so ist die Summe gleich $\frac{1}{3} s^3 . \tan\psi_, . (\frac{1}{2} + \tan\psi_,^2)$.

$$a \cdot \frac{d^2u_{,}'}{ds^2} = \frac{a \cdot \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\Phi^2}\right)}{\cos \psi_{,}^2} - a \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) \cdot \operatorname{tang} \psi_{,},$$

folglich

$$R = 1 + a u_{,}' - a \cdot \left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) \cdot \operatorname{tang} \psi_{,} + \frac{a}{\cos \psi_{,}^2} \cdot \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\Phi^2}\right).$$

Setzt man im vorhergehenden Ausdruck von $V - V_{,}$, $\frac{s}{R} = s'$, so erhält er, in Beziehung auf eine Kugel vom Halbmesser R, folgende sehr einfache Gestalt:

$$V - V_{,} = \frac{s'}{\cos \psi_{,}} \cdot (1 - \tfrac{1}{3} s'^2 \cdot \operatorname{tang} \psi_{,}^2).$$

Der Ausdruck des Azimuthalwinkels verwandelt sich in

$$100^{\circ} - s' \cdot \operatorname{tang} \psi_{,} \cdot [1 - \tfrac{1}{3} s'^2 \cdot (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang} \psi_{,}^2)].$$

Nennt man λ den Winkel, welchen die erste Seite der geodätischen Linie mit der entsprechenden Ebene des Himmelsmeridians macht, so hat man

$$\frac{d^2u'}{ds^2} = \left(\frac{du'}{d\Phi}\right) \cdot \frac{d^2\Phi}{ds^2} + \left(\frac{du'}{d\psi}\right) \cdot \frac{d^2\psi}{ds^2} + \left(\frac{d^2u'}{d\Phi^2}\right) \cdot \frac{d\Phi^2}{ds^2}$$
$$+ 2\left(\frac{d^2u'}{d\Phi \cdot d\psi}\right) \cdot \frac{d\Phi}{ds} \cdot \frac{d\psi}{ds} + \left(\frac{d^2u'}{d\psi^2}\right) \cdot \frac{d\psi^2}{ds^2}.$$

Man hat aber in der Voraussetzung, daſs die Erde eine Kugel ist [78]),

78) Wenn zwey Bogen sich unter dem sehr kleinen Winkel $d\varphi_{,}$ schneiden, so ist der Kreisbogen, welcher in der Entfernung $\theta_{,}$ vom Durchschnittspunkt senkrecht auf diese beiden Bogen ist, bekanntlich gleich $d\varphi_{,} \cdot \sin \theta_{,} = d\varphi_{,} \cdot \cos \psi_{,}$. Gedenkt man sich nun auf der Kugelfläche das rechtwinklichte Dreyeck, dessen Hypotenuse ds, und dessen zwey Seiten $d\psi_{,}$ und $d\varphi_{,} \cdot \cos \psi_{,}$ sind, und in welchem ds und $d\psi_{,}$ den Winkel λ einschlieſsen, so sieht man sogleich, daſs $ds \cdot \cos \lambda = d\psi_{,}$ und $ds \cdot \sin \lambda = d\varphi_{,} \cdot \cos \psi_{,}$ ist, oder $\frac{d\psi_{,}}{ds} = \cos \lambda$ und $\frac{d\varphi_{,}}{ds} = \frac{\sin \lambda}{\cos \psi_{,}}$. Differenziirt man diese beiden Gleichungen, wo ds wie immer als beständig angesehen wird, so findet man $\frac{d^2\psi_{,}}{ds^2} = -\frac{d\lambda}{ds} \cdot \sin \lambda$ und

$$\frac{d^2\varphi_{,}}{ds^2} = \frac{d\lambda}{ds} \cdot \frac{\cos \lambda}{\cos \psi_{,}} + \frac{d\psi_{,}}{ds} \cdot \frac{\sin \lambda \cdot \sin \psi_{,}}{\cos \psi^2} = \frac{d\lambda}{ds} \cdot \frac{\cos \lambda}{\cos \psi_{,}} + \frac{\sin \lambda \cdot \cos \lambda}{\cos \psi_{,}} \cdot \operatorname{tang} \psi_{,}.$$

Das Differenzial der Gleichung $ds^2 = d\psi_{,}^2 + d\varphi_{,}^2 \cdot \cos \psi_{,}^2$ giebt

$\frac{d\psi_{,}}{ds} \cdot \frac{d^2\psi_{,}}{ds^2} + \frac{d\varphi_{,}}{ds} \cdot \frac{d^2\varphi_{,}}{ds^2} \cdot \cos \psi - \frac{d\varphi_{,}^2}{ds^2} \cdot \frac{d\psi_{,}}{ds} \cdot \sin \psi_{,} \cdot \cos \psi_{,} = 0$; setzt man hier statt der Differenziale ihre so eben gefundenen Werthe, so erhält man $\frac{d\lambda}{ds} = \sin \lambda \cdot \operatorname{tang} \psi_{,}$, und vermittelst dieses Differenzials die im Text gegebenen Gleichungen für $d^2\psi_{,}$ und $d^2\varphi_{,}$.

$$\frac{d\phi_{,}}{ds} = \frac{\sin\lambda}{\cos\psi_{,}};\quad \frac{d^2\phi_{,}}{ds^2} = \frac{2\,.\sin\lambda\,.\cos\lambda}{\cos\psi_{,}}\,.\,\mathrm{tang}\,\psi_{,};$$

$$\frac{d\psi_{,}}{ds} = \cos\lambda;\quad \frac{d^2\psi_{,}}{ds^2} = -\sin\lambda^2\,.\,\mathrm{tang}\,\psi_{,};$$

folglich

$$\frac{d^2u_{,}'}{ds^2} = 2\,.\frac{\sin\lambda\,.\cos\lambda}{\cos\psi_{,}}\,.\left[\left(\frac{du_{,}'}{d\phi}\right).\,\mathrm{tang}\,\psi_{,} + \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\phi\,.\,d\psi}\right)\right] - \sin\lambda^2.\mathrm{tang}\psi_{,}.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)$$
$$+ \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\phi^2}\right).\frac{\sin\lambda^2}{\cos\psi_{,}^2} + \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\psi^2}\right).\cos\lambda^2.$$

Der Krümmungshalbmesser R ist also, in der Richtung dieser geodätischen Linie, gleich

$$1 + \alpha u_{,}' + 2\alpha.\frac{\sin\lambda.\cos\lambda}{\cos\psi_{,}}.\left[\left(\frac{du_{,}'}{d\phi}\right).\mathrm{tang}\psi_{,} + \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\phi\,.\,d\psi}\right)\right] - \alpha.\sin\lambda^2.\mathrm{tang}\psi_{,}.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right)$$
$$+ \alpha\,.\left(\frac{d^2u_{,}'}{d\phi^2}\right).\frac{\sin\lambda^2}{\cos\psi_{,}^2} + \alpha\,.\left(\frac{d^2u_{,}'}{d\psi^2}\right).\cos\lambda^2.$$

Man setze der Kürze wegen

$$K = 1 + \alpha u_{,}' - \tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\psi_{,}\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha.\left(\frac{d^2u_{,}'}{d\phi^2}\right).\cos\psi_{,}^{-2} + \tfrac{1}{2}\alpha.\left(\frac{d^2u_{,}'}{d\psi^2}\right);$$

$$A = \frac{\alpha}{\cos\psi_{,}}.\left[\left(\frac{du_{,}'}{d\phi}\right).\,\mathrm{tang}\,\psi_{,} + \left(\frac{d^2u_{,}'}{d\phi\,.\,d\psi}\right)\right];$$

$$B = \tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\mathrm{tang}\,\psi_{,}\,.\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) - \tfrac{1}{2}\alpha\,.\left(\frac{d^2u_{,}'}{d\phi^2}\right).\,\cos\psi_{,}^{-2} + \tfrac{1}{2}\alpha\,.\left(\frac{d^2u_{,}'}{d\psi^2}\right),$$

so erhält man

$$R = K + A\,.\sin 2\lambda + B\,.\cos 2\lambda.$$

Die Beobachtungen der Azimuthalwinkel und des Unterschieds der Breiten an den Endpunkten zweyer geodätischen Linien, wovon die eine in der Richtung des Mittagskreises, die andere in der auf den Mittagskreis senkrechten Richtung gemessen worden ist, werden nach dem Vorhergehenden die Werthe von A, B und K zu erkennen geben; denn diese Beobachtungen geben die Krümmungshalbmesser in diesen zwey Richtungen. Es seyen R und R' diese zwey Halbmesser, so hat man

$$K = \frac{R' + R}{2};\quad B = \frac{R' - R}{2},$$

und der Werth von A wird theils durch das Azimuth des Endes des in der

Richtung des Meridians gemessenen Bogens, theils durch den Unterschied der Breiten des Bogens, welcher in einer auf den Mittagskreis senkrechten Richtung gemessen worden ist, bestimmt werden. Man erhält so den Krümmungshalbmesser der geodätischen Linie, deren erste Seite irgend einen Winkel mit der Ebene des Mittagskreises macht.

Bezeichnet man den Winkel, dessen Tangente $\frac{A}{B}$ ist, durch $2\,E$, so hat man

$$R = K + \sqrt{A^2 + B^2} \,.\, \cos\,(2\,\lambda - 2\,E).$$

Der gröſste Krümmungshalbmesser findet dann Statt, wenn $\lambda = E$ ist, und die entsprechende geodätische Linie macht also mit der Ebene des Mittagskreises den Winkel E. Der kleinste Krümmungshalbmesser entspricht dem Werth von λ gleich $100^G + E$; es sey r dieser kleinste Halbmesser und r' der gröſste, so hat man

$$R = r + (r' - r) \,.\, \cos\,(\lambda - E)^2,$$

wo $\lambda - E$ der Winkel ist, welchen die zu R gehörende geodätische Linie mit derjenigen macht, welche zu r' gehört.

Wir haben schon bemerkt, daſs man sich für jeden Punkt der Oberfläche der Erde ein Krümmungsellipsoid gedenken kann, auf welchem die Grade in allen Richtungen, in einem kleinen Umfang um den Berührungspunkt, merklicher Weise mit denen auf der Oberfläche der Erde identisch sind. Man drücke den Halbmesser dieses Ellipsoids durch die Funktion

$$1 - \alpha \,.\, \sin\psi^2 \,.\, [1 + h \,.\, \cos 2(\phi + \beta)]$$

aus, wo die Längen ϕ von einem gegebenen Mittagskreis zu zählen sind. Der Ausdruck des Erdbogens, welcher in der Richtung des Mittagskreises gemessen worden ist, ist nach dem Vorhergehenden [79])

79) Es ist nämlich $s = \iota + \alpha\iota \,.\, \left[u_{,}' + \left(\frac{d^2 u_{,}'}{d\psi^2}\right)\right] + \frac{\alpha\,\iota^2}{1\,.\,2} \,.\, \left[\left(\frac{du_{,}'}{d\psi}\right) + \left(\frac{d^3 u_{,}'}{d\psi^3}\right)\right]$ + etc., wo der Halbmesser $1 + \alpha u_{,}'$ ist. Da nun hier der Halbmesser gleich $1 - \alpha \,.\, \sin\psi^2\ [1 + h \,.\, \cos 2(\varphi + \beta)]$, so ist $u_{,}' = -\sin\psi^2 \,.\, [1 + h \,.\, \cos 2(\varphi + \beta)] = -A \,.\, \sin\psi^2$, wenn man der Kürze wegen den Koeffizienten $1 + h \,.\, \cos 2(\varphi + \beta)$ durch A bezeichnet. Hieraus findet man durch Differenziiren $\frac{du_{,}'}{d\psi} = -2\,A \,.\, \sin\psi \,.\, \cos\psi = -A \,.\, \sin 2\psi$ und $\frac{d^2 u_{,}'}{d\psi^2} = -2\,A \,.\, \cos 2\psi$, endlich $\frac{d^3 u_{,}'}{d\psi^3} = +4\,A \,.\, \sin 2\psi$. Substituirt man die Werthe dieser Differenziale in die obige Gleichung für s, so erhält man den im Text gegebenen Ausdruck.

$$\varepsilon - \frac{\alpha \varepsilon}{2} \cdot [1 + h \cos 2(\phi + \beta)] \cdot [1 + 3 \cos 2\psi - 3\varepsilon \sin 2\psi].$$

Ist der gemessene Bogen beträchtlich, und hat man, wie in Frankreich, die Breite einiger Zwischenpunkte zwischen den äuſsersten beobachtet, so findet man durch diese Messungen sowohl die Gröſse des zur Einheit angenommenen Halbmessers, als auch den Werth von $\alpha . [1 + h \cos 2(\phi + \beta)]$. Man hat ferner nach dem Vorhergehenden

$$\varpi = - 2 \alpha h . \varepsilon . \frac{\tang \psi^2 . (1 + \cos \psi^2)}{\cos \psi} . \sin 2 (\phi + \beta).$$

Die Beobachtung der Azimuthalwinkel an den beiden Endpunkten des Bogens wird $\alpha h . \sin 2 . (\phi + \beta)$ zu erkennen geben. Der Grad, welcher in einer auf den Mittagskreis senkrechten Richtung gemessen worden, ist endlich gleich

$$1^G + 1^G . \alpha . [1 + h . \cos 2(\phi + \beta)] . \sin \psi^2 + 4^G . \alpha h . \tang \psi^2 . \cos 2 (\phi + \beta).$$

Die Messung dieses Grades wird also den Werth von $\alpha h . \cos 2 (\phi + \beta)$ geben. Das Krümmungsellipsoid wird daher durch diese verschiedenen Messungen bestimmt seyn: es würde sogar nothwendig seyn, bey einem so groſsen Bogen auf das Quadrat von ε im Ausdruck des Winkels ϖ Rücksicht zu nehmen; besonders wenn der Azimuthalwinkel sich nicht proportional mit dem gemessenen Bogen ändert, wie man dies in Frankreich beobachtet hat. Man würde selbst alsdann zum vorhergehenden Ausdruck des Halbmessers des Ellipsoids ein Glied von der Form $\alpha k . \sin \psi . \cos \psi . \sin (\phi + \beta')$ hinzusetzen müssen, um den allgemeinsten Ausdruck dieses Halbmessers zu erhalten.

39. Die elliptische Figur ist nach der Kugel die einfachste; man hat vorher gesehen, daſs sie die Figur der Erde und der Planeten seyn muſs, wenn man annimmt, daſs sie ursprünglich flüssig waren, und daſs sie überdies bey ihrer Erhärtung ihre ursprüngliche Figur behalten haben. Es war also natürlich, die gemessenen Meridiangrade mit dieser Figur zu vergleichen; diese Vergleichung hat aber für die Gestalt der Meridiane verschiedene Ellipsen gegeben, und welche sich zu sehr von den Beobachtungen entfernen, um angenommen werden zu können. Man muſs jedoch, ehe man gänzlich auf die elliptische Figur Verzicht thut, diejenige Ellipse bestimmen, wo die gröſste Abweichung von den gemessenen Graden kleiner ist, als in jeder andern Ellipse, und man muſs zusehen, ob diese Abweichung innerhalb der Grenzen der Fehler der Beobachtungen ist. Man wird dies durch folgende Methode erhalten.

Es seyen $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ etc. die gemessenen Grade des Mittagskreises; $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ etc. die Quadrate der Sinus der zugehörenden Breiten: man nehme an, daſs in der gesuchten Ellipse der Meridiangrad durch die Formel $z + py$ ausgedrückt werde. Nennt man nun $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ etc. die Fehler der Beobachtungen, so erhält man die folgenden Gleichungen, in welchen wir annehmen, daſs $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$. . . eine wachsende Progression bilden:

$$\left.\begin{array}{l} a^{(1)} - z - p^{(1)} . y = x^{(1)}; \\ a^{(2)} - z - p^{(2)} . y = x^{(2)}; \\ a^{(3)} - z - p^{(3)} . y = x^{(3)}; \\ \ldots\ldots\ldots \\ a^{(n)} - z - p^{(n)} . y = x^{(n)}; \end{array}\right\} \quad (A)$$

wo n die Anzahl der gemessenen Grade ist.

Man eliminire aus diesen Gleichungen die beiden unbekannten Gröſsen z und y, so erhält man $(n - 2)$ Bedingungsgleichungen zwischen den n Fehlern $x^{(1)}$, $x^{(2)}$. . . $x^{(n)}$. Man muſs nun das System dieser Fehler bestimmen, wo der gröſste, das Zeichen abgerechnet, kleiner ist, als in jedem andern System.

Man nehme zuerst an, daſs man zwischen diesen Fehlern nur eine einzige Bedingungsgleichung hat, welche wir auf folgende Art vorstellen können:

$$a = mx^{(1)} + nx^{(2)} + px^{(3)} + \text{etc.},$$

wo a positiv ist. Man wird dann das System der Werthe von $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ etc. erhalten, wo, das Zeichen abgerechnet, der gröſste ein Kleinstes ist, wenn man annimmt, daſs sie alle, das Zeichen ausgenommen, einander und dem Quotienten von a, durch die Summe der positiv genommenen Koeffizienten m, n, p . . . dividirt, gleich sind. Jede Gröſse muſs dasselbe Zeichen haben, welches der Koeffizient dieser Gröſse in der gegebenen Gleichung hat [80]).

80) Wenn die Summe einer Reihe eine beständige Gröſse ist, so muſs jedes Glied dieser Reihe positiv seyn, wenn man haben will, daſs diese Glieder sämmtlich so klein als möglich sind. Wären nämlich einige derselben negativ, so würden diese negativen Glieder durch die positiven aufgehoben werden müssen, welche letztern dann nothwendig gröſser seyn würden, als im Fall, wenn alle Glieder positiv sind. Die Producte $mx^{(1)}$, $nx^{(2)}$, $px^{(3)}$. . . müssen also sämmtlich positiv seyn, und die beiden Factoren müssen folglich immer einerley Zeichen haben. Es sey nun $\pm m \pm n \pm p \ldots = S$, wo die Zeichen $\pm$ so zu wählen sind, daſs alle Glieder der Reihe für S positiv sind, so ist $\frac{a}{S} = x^{(1)} = x^{(2)} = x^{(3)}$

Hat man zwey Bedingungsgleichungen zwischen diesen Fehlern, so wird das System, welches dem gröſsten Fehler den kleinsten Werth giebt, so beschaffen seyn, daſs alle diese Werthe, das Zeichen abgerechnet, einander gleich seyn werden, einen einzigen ausgenommen, welcher kleiner, oder wenigstens nicht gröſser als die übrigen seyn wird. Nimmt man an, daſs $x^{(1)}$ dieser Fehler ist, so wird man ihn durch eine Funktion von $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ etc., vermittelst einer der gegebenen Bedingungsgleichungen bestimmen: substituirt man hernach diesen Werth von $x^{(1)}$ in die andere Bedingungsgleichung, so wird man eine Gleichung zwischen $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ etc. erhalten, welche wir durch die ſolgende vorstellen werden:

$$a = mx^{(2)} + nx^{(3)} + \text{etc.},$$

wo a positiv ist; man erhält, wie oben, die Werthe von $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ etc., wenn man a durch die Summe der positiv genommenen Koeffizienten m, n etc. dividirt, und dem Quotienten successive die Zeichen von m, n etc. giebt. Substituirt man diese Werthe in dem durch $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ etc. gegebenen Ausdruck von $x^{(1)}$, so erhält man den Werth von $x^{(1)}$; und ist dieser Werth, das Zeichen abgerechnet, nicht gröſser als der von $x^{(2)}$, so ist dies System der Werthe dasjenige, welches man annehmen muſs; ist er aber gröſser, so ist die Annahme, daſs $x^{(1)}$ der kleinste Fehler ist, nicht richtig, und man muſs dieselbe Voraussetzung ſür $x^{(2)}$, $x^{(3)}$. . . machen, bis man auf einen Fehler kommt, welcher ihr Genüge thut.

Hat man drey Bedingungsgleichungen zwischen diesen Fehlern, so wird

$= \dots$ Um dies zu beweisen, nehme man an, daſs es nicht der Fall sey; dann wird z. B. einer dieser Fehler kleiner seyn, als alle übrigen einander gleichen Fehler. Es sey $x^{(3)}$ dieser Fehler, so wird man den gröſsten Fehler $x^{(1)} = x^{(2)} = \dots$ so lange vermindern können, bis $x^{(3)} = x^{(1)}$ wird, er würde also nicht ein Kleinstes seyn. Nimmt nämlich $x^{(1)}$ ab, so werden die positiven Gröſsen $mx^{(1)}$, $nx^{(2)}$. . . sämmtlich abnehmen; diese Abnahme muſs durch die Zunahme des positiven Produktes $px^{(3)}$ ersetzt werden, damit die Summe aller Glieder immer gleich a bleibt. Diese Abnahme von $x^{(1)}$ und die damit verbundene Zunahme von $x^{(3)}$ werden so lange Statt finden, bis $x^{(3)} = x^{(1)}$ wird; dann wird man $x^{(1)}$ nicht mehr vermindern können, weil sonst $x^{(3)}$ gröſser als $x^{(1)}$ werden würde, so daſs $x^{(1)}$ nicht mehr der gröſste Fehler seyn würde.

das System, welches dem gröſsten Fehler den kleinsten möglichen Werth giebt, so beschaffen seyn, daſs diese Fehler alle, wenn man das Zeichen abrechnet, einander gleich seyn werden, zwey ausgenommen, welche kleiner als die übrigen seyn werden. Nimmt man dann an, daſs $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ diese beiden Fehler sind, so wird man sie aus der dritten Bedingungsgleichung vermittelst der zwey andern eliminiren, und man wird dann eine Bedingungsgleichung zwischen den Fehlern $x^{(3)}$, $x^{(4)}$. . . erhalten; man stelle sie durch die folgende vor:

$$a = mx^{(3)} + nx^{(4)} + \text{etc.},$$

wo a positiv ist. Man wird die Werthe von $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ etc. erhalten, wenn man a durch die Summe der positiv genommenen Koeffizienten m, n etc. dividirt, und jedem Quotienten nach und nach das Zeichen von m, n etc. giebt. Substituirt man diese Werthe in die durch $x^{(3)}$, $x^{(4)}$. . . gegebenen Ausdrücke von $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, so erhält man die Werthe von $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, und übertreffen diese Werthe nicht $x^{(3)}$, ohne auf das Zeichen zu sehen, so hat man das System von Fehlern, welches man annehmen muſs. Uebertrifft aber einer dieser Werthe $x^{(3)}$, so ist die Voraussetzung, daſs $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ die kleinsten Fehler sind, nicht richtig, und man muſs dieselbe Voraussetzung für eine andere Verbindung der Fehler $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$. . ., zwey zu zwey genommen, wiederholen, bis man auf eine Verbindung kommt, wo diese Voraussetzung richtig ist. Man kann leicht diese Methode auf den Fall erstrecken, wo man vier, oder eine gröſsere Anzahl, Bedingungsgleichungen zwischen den Fehlern $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$. . . hätte. Sind dann diese Fehler bekannt, so wird man leicht die Werthe von z und von y daraus herleiten können.

Man kann die Methode, welche wir vorgetragen haben, auf alle Fragen derselben Gattung anwenden; hat man z. B. eine Anzahl n Beobachtungen eines Kometen, so kann man vermittelst derselben die parabolische Bahn bestimmen, in welcher der gröſste Fehler, das Zeichen abgerechnet, kleiner ist, als in jeder andern parabolischen Bahn, und man kann dadurch erkennen, ob die parabolische Bahn diese Beobachtungen darstellen kann. Ist aber die Anzahl der Beobachtungen beträchtlich, so führt diese Methode auf sehr lange Berechnungen, und man kann bey der Aufgabe, welche uns beschäftigt, leicht zu dem gesuchten System der Fehler durch die folgende Methode gelangen.

Man gedenke sich, daſs $x^{(i)}$, das Zeichen abgerechnet, der gröſste der Fehler $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ etc. sey: dann ist erstlich zu bemerken, daſs es einen andern

Fehler $(x^{i''})$ geben muſs, welcher $x^{(i)}$ gleich, aber ein entgegengesetztes Zeichen hat; sonst könnte man durch schickliche Aenderung der Gröſse z in der Gleichung

$$a^{(i)} - z - p^{(i)} \cdot y = x^{(i)}$$

den Fehler von $x^{(i)}$ vermindern, ohne daſs er die Eigenschaft verliehrt, der gröſste Fehler zu seyn, welches gegen die Voraussetzung ist. Wir bemerken ferner, daſs, da $x^{(i)}$ und $x^{(i')}$ die beiden äuſsersten Fehler sind, der eine positiv, der andere negativ und welche einander gleich seyn müssen, wie wir so eben gesehen haben, es einen dritten Fehler $x^{(i'')}$ geben muſs, welcher, das Zeichen abgerechnet, gleich $x^{(i)}$ ist. Zieht man nämlich die zu $x^{(i)}$ gehörende Gleichung von der $x^{(i')}$ entsprechenden Gleichung ab, so erhält man

$$a^{(i')} - a^{(i)} - (p^{(i')} - p^{(i)}) \cdot y = x^{(i')} - x^{(i)}.$$

Der zweyte Theil dieser Gleichung ist, das Zeichen abgerechnet, die Summe der gröſsten Fehler; und es ist klar, daſs man sie durch eine schickliche Aenderung von y würde vermindern können, ohne daſs sie die Eigenschaft verlöhre, die gröſste der Summen zu seyn, welche man durch die Addition oder durch die Subtraction der Fehler $x^{(1)}$, $x^{(2)}$. . ., zwey zu zwey genommen, erhalten kann, wofern es nicht einen dritten Fehler $x^{(i'')}$ giebt, welcher $x^{(i)}$, das Zeichen abgerechnet, gleich ist. Vermindert man nämlich die Summe der gröſsten Fehler, welche durch den Werth von z einander gleich gemacht worden sind, so würde jeder dieser Fehler vermindert werden, welches gegen die Voraussetzung ist. Es giebt also drey Fehler $x^{(i)}$, $x^{(i')}$, $x^{(i'')}$, welche, das Zeichen abgerechnet, einander gleich sind, und wovon der eine ein den beiden übrigen entgegengesetztes Zeichen hat.

Man nehme an, daſs $x^{(i')}$ dieser Fehler sey; dann wird die Zahl i' zwischen die zwey Zahlen i und i'' fallen. Man gedenke sich, um dies zu zeigen, daſs dies nicht der Fall sey, und daſs i' auſserhalb der Zahlen i und i'' falle. Zieht man dann die zu i' gehörende Gleichung nach und nach von den zu i und i'' gehörenden Gleichungen ab, so erhält man

$$a^{(i)} - a^{(i')} - [p^{(i)} - p^{(i')}] \cdot y = x^{(i)} - x^{(i')};$$

$$a^{(i'')} - a^{(i')} - [p^{(i'')} - p^{(i')}] \cdot y = x^{(i'')} - x^{(i')}.$$

Die zweyten Theile dieser Gleichungen sind einander gleich und haben dasselbe Zeichen; sie sind auch noch, das Zeichen abgerechnet, die Summe der gröſsten Fehler; nun ist aber klar, daſs man durch eine schickliche Aenderung von y jede dieser Summen vermindern kann, weil der Koeffizient von y in den beiden ersten

ersten Theilen dasselbe Zeichen hat; man kann überdies durch eine schickliche Aenderung von z der Gröſse $x^{(i')}$ denselben Werth erhalten; $x^{(i)}$ und $x^{(i'')}$ würden also dann, das Zeichen abgerechnet, kleiner als $x^{(i')}$ seyn, welcher der gröſste Fehler werden würde, ohne einen gleich groſsen Fehler zu haben. In diesem Fall kann man aber, wie wir gezeigt haben, den gröſsten Fehler vermindern, welches gegen die Voraussetzung ist. Die Zahl i' muſs also zwischen die Zahlen i und i'' fallen.

Wir wollen nun bestimmen, welches die gröſsten Fehler unter den Fehlern $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ etc. sind. Hierzu ziehe man die erste der Gleichungen (A) nach und nach von den folgenden ab; man erhält dann die folgende Reihe Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a^{(2)} - a^{(1)} - (p^{(2)} - p^{(1)}) \,.\, y = x^{(2)} - x^{(1)}; \\ a^{(3)} - a^{(1)} - (p^{(3)} - p^{(1)}) \,.\, y = x^{(3)} - x^{(1)}; \\ a^{(4)} - a^{(1)} - (p^{(4)} - p^{(1)}) \,.\, y = x^{(4)} - x^{(1)}; \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (B)$$

Man setze y unendlich groſs, so werden die ersten Theile dieser Gleichungen negativ seyn, und der Werth von $x^{(1)}$ wird dann gröſser seyn als $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ etc. Vermindert man y ohne Aufhören, so wird man endlich auf einen Werth kommen, der einen dieser ersten Theile positiv macht, welcher, ehe er in diesen Zustand kam, gleich Null ward. Um nun denjenigen dieser Theile zu erkennen, welcher zuerst gleich Null wird, formire man die Gröſsen

$$\frac{a^{(2)} - a^{(1)}}{p^{(2)} - p^{(1)}}; \quad \frac{a^{(3)} - a^{(1)}}{p^{(3)} - p^{(1)}}; \quad \frac{a^{(4)} - a^{(1)}}{p^{(4)} - p^{(1)}}; \text{ etc.}$$

Man bezeichne die gröſste dieser Gröſsen durch $\beta^{(1)}$, und man nehme an, daſs sie $\frac{a^{(r)} - a^{(1)}}{p^{(r)} - p^{(1)}}$ sey: giebt es mehrere Werthe, welche gleich $\beta^{(1)}$ sind, so werden wir denjenigen betrachten, wo die Zahl r am gröſsten ist. Substituirt man in die $(r-1)$te der Gleichungen (B), $\beta^{(1)}$ statt y, so wird $x^{(r)}$ gleich $x^{(1)}$ seyn, und es wird gröſser als $x^{(1)}$ werden, wenn man y vermindert, weil dann der erste Theil dieser Gleichung positiv wird. Dieser erste Theil wird durch die allmähligen Verminderungen von y schneller wachsen, als die ersten Theile der vorhergehenden Gleichungen; da er nun Null wird, wenn die vorhergehenden noch negativ sind, so ist sichtbar, daſs er bey den allmähligen Verminderungen von

y immer gröſser als sie wird; dies zeigt, daſs $x^{(r)}$ beständig gröſser als $x^{(1)}$, $x^{(2)} \ldots x^{(r-1)}$ seyn wird, wenn y kleiner als $\beta^{(1)}$ ist.

Die ersten Theile der Gleichungen (B), welche auf die $(r-1)$te folgen, werden Anfangs negativ seyn, und so lange dies Statt hat, werden $x^{(r+1)}$, $x^{(r+2)}$ etc. kleiner als $x^{(1)}$ und folglich kleiner als $x^{(r)}$ seyn, welches der gröſste aller Fehler $x^{(1)}$, $x^{(2)} \ldots x^{(n)}$ wird, wenn y anfängt kleiner als $\beta^{(1)}$ zu werden. Fährt man aber fort y zu vermindern, so gelangt man zu einem solchen Werth dieser veränderlichen Gröſse, welcher einige der Fehler $x^{(r+1)}$, $x^{(r+2)} \ldots$ gröſser als $x^{(r)}$ zu machen anfängt.

Zur Bestimmung dieses Werthes von y ziehe man die rte der Gleichungen (A) nach und nach von den folgenden ab, so erhält man

$$a^{(r+1)} - a^{(r)} - [p^{(r+1)} - p^{(r)}] \cdot y = x^{(r+1)} - x^{(r)};$$
$$a^{(r+2)} - a^{(r)} - [p^{(r+2)} - p^{(r)}] \cdot y = x^{(r+2)} - x^{(r)};$$
etc.

Man bilde hernach die Gröſsen

$$\frac{a^{(r+1)} - a^{(r)}}{p^{(r+1)} - p^{(r)}}; \quad \frac{a^{(r+2)} - a^{(r)}}{p^{(r+2)} - p^{(r)}}; \text{ etc.}$$

Man bezeichne die gröſste dieser Gröſsen durch $\beta^{(2)}$, und man nehme an, daſs es $\frac{a^{(r')} - a^{(r)}}{p^{(r')} - p^{(r)}}$ sey: sind mehrere dieser Gröſsen gleich $\beta^{(2)}$, so nehmen wir noch an, daſs r' die gröſste unter den ihnen zugehörenden Zahlen ist. Dieses festgesetzt, wird $x^{(r)}$ der gröſste der Fehler $x^{(1)}$, $x^{(2)} \ldots x^{(n)}$ seyn, so lange y zwischen $\beta^{(1)}$ und $\beta^{(2)}$ enthalten seyn wird; ist man aber, durch die Verminderung von y, zu $\beta^{(2)}$ gelangt, so wird $x^{(r')}$ anfangen $x^{(r)}$ zu übersteigen, und der gröſste der Fehler zu werden.

Um die Grenzen zu bestimmen, in welchen dies geschieht, bilde man die Gröſsen

$$\frac{a^{(r'+1)} - a^{(r')}}{p^{(r'+1)} - p^{(r')}}; \quad \frac{a^{(r'+2)} - a^{(r')}}{p^{(r'+2)} - p^{(r')}}; \text{ etc.}$$

Es sey $\beta^{(3)}$ die gröſste dieser Gröſsen und man nehme an, daſs es $\frac{a^{(r'')} - a^{(r')}}{p^{(r'')} - p^{(r')}}$ sey; sind verschiedene dieser Gröſsen gleich $\beta^{(3)}$, so werden wir noch annehmen, daſs r'' die gröſste der Zahlen ist, welche zu ihnen gehören. Dann wird $x^{(r')}$ der gröſste aller Fehler von $y = \beta^{(2)}$ bis $y = \beta^{(3)}$ seyn. Ist $y = \beta^{(3)}$, so

wird $x^{(r'')}$ anfangen der gröſste Fehler zu seyn. Fährt man so fort, so wird man folgende zwey Reihen bilden:

$$x^{(1)};\quad x^{(r)};\quad x^{(r')};\quad x^{(r'')};\quad \ldots\quad x^{(n)}$$

$$\infty;\quad \beta^{(1)};\quad \beta^{(2)};\quad \beta^{(3)};\quad \ldots\quad \beta^{(q)};\ -\infty.\quad \text{(C)}$$

Die erste enthält die Fehler $x^{(1)}$, $x^{(r)}$, $x^{(r')}$ etc., welche nach und nach die gröſsten werden; die zweyte Reihe besteht aus abnehmenden Gröſsen und enthält die Grenzen von y, innerhalb welchen diese Werthe die gröſsten sind. So ist z. B. $x^{(1)}$ der gröſste Fehler von $y = \infty$ bis $y = \beta^{(1)}$; $x^{(r)}$ ist der gröſste Fehler von $y = \beta^{(1)}$ bis $y = \beta^{(2)}$; $x^{(r')}$ ist der gröſste Fehler von $y = \beta^{(2)}$ bis $y = \beta^{(3)}$; und so weiter.

Man nehme nun die Gleichungen (B) wieder vor, und setze y negativ und unendlich groſs. Die ersten Theile dieser Gleichungen werden dann positiv werden; $x^{(1)}$ wird dann der kleinste der Fehler $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ etc. seyn; vermehrt man y beständig, so werden einige dieser ersten Theile negativ werden, und alsdann wird $x^{(1)}$ aufhören, der kleinste Fehler zu seyn. Wendet man hier die Schlüsse an, welche wir für den Fall der gröſsten Fehler gemacht haben, nennt man $\lambda^{(1)}$ die kleinste der Gröſsen

$$\frac{a^{(2)} - a^{(1)}}{p^{(2)} - p^{(1)}};\quad \frac{a^{(3)} - a^{(1)}}{p^{(3)} - p^{(1)}};\quad \frac{a^{(4)} - a^{(1)}}{p^{(4)} - p^{(1)}};\ \text{etc.}$$

und nimmt man an, daſs es $\dfrac{a^{(s)} - a^{(1)}}{p^{(s)} - p^{(1)}}$ sey, wo s die gröſste der Zahlen ist, welchen $\lambda^{(1)}$ entspricht, wenn mehrere dieser Gröſsen gleich $\lambda^{(1)}$ sind: so wird man sehen, daſs $x^{(1)}$ der kleinste Fehler von $y = -\infty$ bis $y = \lambda^{(1)}$ seyn wird. Bezeichnet man eben so durch $\lambda^{(2)}$ die kleinste der Gröſsen

$$\frac{a^{(s+1)} - a^{(s)}}{p^{(s+1)} - p^{(s)}};\quad \frac{a^{(s+2)} - a^{(s)}}{p^{(s+2)} - p^{(s)}};\ \text{etc.},$$

und nimmt man an, daſs es $\dfrac{a^{(s')} - a^{(s)}}{p^{(s')} - p^{(s)}}$ ist, wo s' die gröſste der Zahlen ist, welchen $\lambda^{(2)}$ entspricht, wenn mehrere dieser Gröſsen gleich $\lambda^{(2)}$ sind, so wird $x^{(s)}$ der kleinste Fehler von $y = \lambda^{(1)}$ bis $y = \lambda^{(2)}$ seyn; und so für die übrigen. Man erhält auf diese Art folgende zwey Reihen:

$$x^{(1)};\quad x^{(s)};\quad x^{(s')};\quad x^{(s'')};\quad \ldots\quad x^{(n)};$$

$$-\infty;\quad \lambda^{(1)};\quad \lambda^{(2)};\quad \lambda^{(3)};\quad \ldots\quad \lambda^{(q')};\quad \infty;\quad \text{(D)}.$$

Die erste enthält die Fehler $x^{(1)}$, $x^{(s)}$, $x^{(s')}$ etc.; welche nach und nach, so wie

man y vermehrt, die kleinsten Fehler werden; die zweyte Reihe besteht aus wachsenden Gliedern und enthält die Grenzen der Werthe von y, zwischen welchen jeder dieser Fehler der kleinste ist; so ist $x^{(1)}$ der kleinste Fehler von $y = -\infty$ bis $y = \lambda^{(1)}$; $x^{(s)}$ ist der kleinste Fehler von $y = \lambda^{(1)}$ bis $y = \lambda^{(2)}$ und so für die übrigen.

Dieses festgesetzt, ist der Werth von y, welcher der gesuchten Ellipse zugehört, eine der Gröſsen $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, $\beta^{(3)}$. . .; $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$. . .; er wird in der ersten Reihe seyn, wenn die beiden gröſsten Werthe, welche dasselbe Zeichen haben, positiv sind. Denn da diese zwey Fehler dann die gröſsten sind, so sind sie in der Reihe $x^{(1)}$, $x^{(r)}$, $x^{(r')}$ etc.; und da ein und derselbe Werth von y sie gleich groſs macht, so müssen sie auf einander folgen, und der Werth von y, der für sie paſst, kann nur eine der Gröſsen $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, $\beta^{(3)}$ etc. seyn, weil zwey dieser Fehler nicht anders einander gleich und zugleich die gröſsten werden können, als durch eine dieser Gröſsen. Man wird dann durch folgende Methode diejenige der Gröſsen $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$. . ., welche für y genommen werden muſs, bestimmen.

Man gedenke sich z. B., daſs $\beta^{(3)}$ diese Gröſse sey; dann muſs es, vermöge des Vorhergehenden, zwischen $x^{(r')}$ und $x^{(r'')}$ einen Fehler geben, welcher der kleinste aller Fehler ist, weil $x^{(r')}$ und $x^{(r'')}$ die gröſsten dieser Fehler sind; es wird also irgend eine der Zahlen s, s' etc. in der Reihe $x^{(1)}$, $x^{(s)}$, $x^{(s')}$ etc. zwischen r' und r'' enthalten seyn. Man nehme an, daſs dies s sey. Soll nun $x^{(s)}$ der kleinste Fehler seyn, so muſs y zwischen $\lambda^{(1)}$ und $\lambda^{(2)}$ enthalten seyn; ist also $\beta^{(3)}$ innerhalb dieser Grenzen, so wird es der gesuchte Werth von y seyn, und es wird unnütz seyn, andere zu suchen. Nimmt man nämlich an, daſs man diejenige der Gleichungen (A), welche zu $x^{(s)}$ gehört, nach und nach von den zwey Gleichungen, welche zu $x^{(r')}$ und zu $x^{(r'')}$ gehören, abzieht, so erhält man

$$a^{(r')} - a^{(s)} - [p^{(r')} - p^{(s)}] \cdot y = x^{(r')} - x^{(s)};$$
$$a^{(r'')} - a^{(s)} - [p^{(r'')} - p^{(s)}] \cdot y = x^{(r'')} - x^{(s)}.$$

Da nun alle Theile dieser Gleichungen positiv sind, wenn man $y = \beta^{(3)}$ setzt, so ist klar, daſs die Gröſse $x^{(r')} - x^{(s)}$ zunehmen wird, wenn man y vermehrt; die positiv genommene Summe der gröſsten Fehler wird also dadurch vermehrt werden. Vermindert man y, so wird die Gröſse $x^{(r'')} - x^{(r)}$, und folglich auch die Summe der gröſsten Fehler, dadurch vermehrt werden; $\beta^{(3)}$ ist daher der

Werth von y, welcher diese Summe am kleinsten macht; woraus folgt, dafs er der einzige ist, welcher der Aufgabe Genüge thut.

Man wird auf diese Art die Werthe von $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, $\beta^{(3)}$. . . versuchen, welches sehr leicht durch die blofse Ansicht geschieht; und kömmt man auf einen Werth, welcher die vorhergehenden Bedingungen erfüllt, so wird man versichert seyn, den gesuchten Werth von y zu haben.

Erfüllt keiner der Werthe von β diese Bedingungen, so wird der Werth von y irgend ein Glied der Reihe $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$. . . seyn. Man nehme z. B. an, dafs es $\lambda^{(2)}$ ist; dann werden die zwey gröfsten Fehler $x^{(s)}$ und $x^{(s')}$ negativ seyn, und es wird, vermöge des Vorhergehenden, einen Fehler zwischen ihnen geben, der ein Gröfstes ist und der folglich in der Reihe $x^{(1)}$, $x^{(r)}$, $x^{(r')}$ etc. enthalten seyn wird. Man nehme an, dafs es $x^{(r)}$ sey, so wird r dann nothwendig zwischen s und s' und folglich λ^{2} zwischen $\beta^{(1)}$ und $\beta^{(2)}$ enthalten seyn. Ist dies der Fall, so ist dies ein Beweis, dafs $\lambda^{(2)}$ der gesuchte Werth von y ist. Man wird so alle Glieder der Reihe $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$, $\lambda^{(4)}$. . . versuchen, bis man auf ein Glied kömmt, welches die vorhergehenden Bedingungen erfüllt.

Hat man so den Werth von y bestimmt, so wird man leicht den von z erhalten. Man nehme hierzu an, dafs $\beta^{(2)}$ der Werth von y ist, und dafs die drey gröfsten Fehler $x^{(r)}$, $x^{(r')}$ und $x^{(s)}$ sind, so hat man $x^{(s)} = -x^{(r)}$ und folglich

$$a^{(r)} - z - p^{(r)} \,.\, y = x^{(r)};$$
$$a^{(s)} - z - p^{(s)} \,.\, y = - x^{(r)}.$$

Hieraus erhält man

$$z = \frac{a^{(r)} + a^{(s)}}{2} - \frac{(p^{(r)} + p^{(s)})}{2} \,.\, y.$$

Man erhält dann den gröfsten Fehler $x^{(r)}$ vermittelst der Gleichung

$$x^{(r)} = \frac{a^{(r)} - a^{(s)}}{2} + \frac{(p^{(r)} - p^{(s)})}{2} \,.\, y.$$

40. Die im vorhergehenden Satz bestimmte Ellipse giebt zu erkennen, ob die Annahme der elliptischen Gestalt innerhalb der Grenzen der Fehler der Beobachtungen ist; sie ist aber nicht diejenige, welche aus den gemessenen Graden mit der gröfsten Wahrscheinlichkeit folgt. Diese letztere Ellipse scheint mir folgende Bedingungen erfüllen zu müssen: erstens dafs die Summe der Fehler, welche in den Messungen der ganzen gemessenen Bogen begangen worden,

gleich Null ist; zweytens daſs die Summe dieser, sämmtlich positiv genommenen, Fehler ein Kleinstes ist. Betrachtet man so die ganzen Bogen, statt der Grade, welche man daraus hergeleitet hat, so giebt man jedem dieser Grade um desto mehr Einfluſs auf die Ellipticität, welche hieraus für die Erde folgt, je beträchtlicher dieser Bogen ist, so wie dies seyn muſs. Wir geben nun eine sehr einfache Methode, um die Ellipse zu bestimmen, welche diesen beiden Bedingungen Genüge thut.

Man nehme die Gleichungen (A) des 39sten Satzes und multiplicire sie respective durch die Zahlen, welche ausdrücken, wie viel Grade die gemessenen Bogen enthalten, und welche wir durch $i^{(1)}$, $i^{(2)}$, $i^{(3)}$ etc. bezeichnen werden. Es sey A die Summe der Gröſsen $i^{(1)} . a^{(1)}$, $i^{(2)} . a^{(2)}$ etc. durch die Summe der Zahlen $i^{(1)}$, $i^{(2)}$, $i^{(3)}$ etc. dividirt; eben so sey P die Summe der Gröſsen $i^{(1)} . p^{(1)}$, $i^{(2)} . p^{(2)}$ etc., durch die Summe der Zahlen $i^{(1)}$, $i^{(2)}$, $i^{(3)}$ etc. dividirt; die Bedingung, daſs die Summe der Fehler $i^{(1)} . x^{(1)}$, $i^{(2)} . x^{(2)}$ etc. gleich Null ist, giebt

$$0 = A - z - P . y.$$

Zieht man diese Gleichung von jeder der Gleichungen (A) des vorhergehenden Satzes ab, so erhält man neue Gleichungen von folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} b^{(1)} - q^{(1)} . y &= x^{(1)} \\ b^{(2)} - q^{(2)} . y &= x^{(2)} \\ b^{(3)} - q^{(3)} . y &= x^{(3)} \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\}. \qquad (O)$$

Man bilde nun die Reihe Quotienten $\frac{b^{(1)}}{q^{(1)}}$, $\frac{b^{(2)}}{q^{(2)}}$, $\frac{b^{(3)}}{q^{(3)}}$ etc., und man ordne sie nach ihrer Gröſse, so daſs man von dem Gröſsten anfängt; man multiplicire hernach die Gleichungen (O), zu welchen sie gehören, mit den zugehörenden Zahlen $i^{(1)}$, $i^{(2)}$ etc.; man ordne endlich die so multiplicirten Gleichungen eben so wie die Quotienten. Die ersten Theile dieser so geordneten Gleichungen werden eine Reihe Glieder von folgender Form bilden:

$$h^{(1)} . y - c^{(1)}; \quad h^{(2)} . y - c^{(2)}; \quad h^{(3)} . y - c^{(3)}; \quad (P)$$

in welchen wir $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ etc. positiv annehmen, weil man die Zeichen der Glieder, wo der Koeffizient von y negativ ist, ändern wird. Diese Glieder sind die Fehler der gemessenen Bogen, sämmtlich positiv oder negativ genommen.

Dieses festgesetzt, so ist klar, daſs jedes Glied dieser Reihe unendlich groſs wird, wenn man y unendlich groſs setzt; sie nehmen aber ab, so wie y

abnimmt, und werden endlich negativ; zuerst das erste, hernach das zweyte und so die übrigen. Vermindert man noch weiter y, so werden die Glieder, wenn sie einmal negativ geworden sind, negativ zu seyn fortfahren und immer abnehmen. Um nun den Werth von y zu erhalten, durch welchen die Summe dieser Glieder, sämmtlich positiv genommen, ein Kleinstes wird, addire man die Gröfsen $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ etc. bis dafs ihre Summe die halbe ganze Summe aller dieser Gröfsen zu übersteigen anfängt; nennt man diese Summe F, so bestimme man r so, dafs folgende zwey Gleichungen Statt finden:

$$h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} \ldots + h^{(r)} > \tfrac{1}{2} F;$$
$$h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)} \ldots + h^{(r-1)} < \tfrac{1}{2} F.$$

Man hat dann $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$, so dafs der Fehler für denjenigen Grad gleich Null seyn wird, welcher derjenigen der Gleichungen (O) zugehört, deren erster Theil, gleich Null gesetzt, diesen Werth von y giebt.

Wir nehmen, um dies zu zeigen, an, dafs man y um die Gröfse δy vermehrt, so dafs $\frac{c^{(r)}}{h^{(r)}} + \delta y$ zwischen $\frac{c^{(r-1)}}{h^{(r-1)}}$ und $\frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$ enthalten ist. Die $(r - 1)$ ersten Glieder der Reihe (P) werden negativ seyn, so wie in dem Fall, wenn $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$ ist. Nimmt man sie aber mit dem Zeichen $+$, so wird ihre Summe um die Gröfse

$$(h^{(1)} + h^{(2)} + \ldots + h^{(r-1)}) \,.\, \delta y$$

abnehmen. Das erste Glied dieser Reihe, welches für den Fall $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$ gleich Null ist, wird positiv und gleich $h^{(r)} . \delta y$ werden; die Summe dieses und der folgenden Glieder, welche alle positiv sind, wird um die Gröfse

$$(h^{r} + h^{(r+1)} + \text{etc.} \ldots) \,.\, \delta y$$

zunehmen; man hat aber, vermöge der Voraussetzung,

$$h^{(1)} + h^{(2)} \ldots + h^{(r-1)} < h^{(r)} + h^{(r+1)} + \text{etc.}$$

Die ganze Summe der Glieder der Reihe (P), sämmtlich positiv genommen, wird also zunehmen, und da sie der Summe der Fehler der gemessenen Bogen, nämlich $i^{(1)} . x^{(1)}$, $i^{(2)} . x^{(2)}$ etc., sämmtlich mit dem Zeichen $+$ genommen, gleich ist, so wird diese Summe durch die Annahme, dafs $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}} + \delta y$ ist, vermehrt werden. Man kann sich auf dieselbe Art leicht versichern, dafs die

Summe der mit dem Zeichen $+$ genommenen Fehler, wenn man y so vermehrt, daſs es zwischen $\frac{c^{(r-1)}}{h^{(r-1)}}$ und $\frac{c^{(r-2)}}{h^{(r-2)}}$, oder zwischen $\frac{c^{(r-2)}}{h^{(r-2)}}$ und $\frac{c^{(r-3)}}{h^{(r-3)}}$ etc. enthalten ist, gröſser seyn wird, als wenn man $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$ setzt.

Man vermindere nun y um die Gröſse δy, so daſs $\frac{c^{(r)}}{h^{(r)}} - \delta y$ zwischen $\frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$ und $\frac{c^{(r+1)}}{h^{(r+1)}}$ enthalten ist: die Summe der negativen Glieder der Reihe (P) wird dadurch, wenn man das Zeichen ändert, um die Gröſse

$$[h^{(1)} + h^{(2)} \ldots + h^{(r)}] \,.\, \delta y$$

zunehmen, und die Summe der positiven Glieder derselben Reihe wird um die Gröſse

$$[h^{(r+1)} + h^{(r+2)} + \text{etc.} \ldots] \,.\, \delta y$$

abnehmen, und da

$$h^{(1)} + h^{(2)} \ldots + h^{(r)} > h^{(r+1)} + h^{(r+2)} + \text{etc.}$$

ist, so ist klar, daſs die ganze Summe der mit dem Zeichen $+$ genommenen Fehler zugenommen haben wird. Man wird auf dieselbe Art sehen, daſs die Summe der mit dem Zeichen $+$ genommenen Fehler, wenn man y so vermindert, daſs es zwischen $\frac{c^{(r+1)}}{h^{(r+1)}}$ und $\frac{c^{(r+2)}}{h^{(r+2)}}$ oder zwischen $\frac{c^{(r+2)}}{h^{(r+2)}}$ und $\frac{c^{(r+3)}}{h^{(r+3)}}$ fällt, gröſser seyn wird, als wenn $y = \frac{c^{(r)}}{h^{(r)}}$ ist; dies ist also der Werth von y, welcher diese Summe zu einem Kleinsten macht.

Der Werth von y giebt den von z vermittelst der Gleichung

$$z = A - P \,.\, y.$$

Da die vorhergehende Analysis sich darauf gründet, daſs die Aenderung der Grade vom Aequator zu den Polen dem Quadrat des Sinus der Breite proportional ist, und da dieses Gesetz der Aenderung ebenfalls für die Schwere Statt hat, so ist klar, daſs man sie auf die Beobachtungen der Längen des Sekundenpendels anwenden kann.

41. Wir wollen sie zuerst auf die schon gemessenen Grade der Erdmeridiane anwenden. Ich werde von diesen Graden die sieben folgenden betrachten, welche ich in Theilen des Maasstabes ausdrücken werde, auf welchen man den

den von Dünkirchen bis Barcellona zur Bestimmung der Fundamentaleinheit der Maafse und Gewichte gemessenen Bogen bezogen hat. Ich werde diesen Maasstab, welcher das Doppelte der Toise ist, deren sich Bouguer in Peru bediente, durch *R* bezeichnen. Ich werde in der Folge die Art erklären, auf welche man das Verhältnifs dieses Maasstabes zum Mètre bestimmt hat.

Der erste dieser Grade ist der von Peru, unter 0^G der Breite. Seine Länge ist nach Bouguer $25538^R,85$; der ganze gemessene Bogen, woraus dieser Grad geschlossen worden, ist gleich $3^G,4633$.

Der zweyte ist der am Vorgebürge der guten Hoffnung von la Caille gemessene. Die Breite seines Mittels ist $37^G,0093$. Seine Länge ist $25666^R,65$ und der ganze gemessene Bogen, woraus dieser Grad geschlossen worden ist, ist $1^G,3572$.

Der dritte ist der von Mason und Dixon in Pensylvanien gemessene Grad. Sein Mittel entspricht der Breite von $43^G,5556$; seine Länge ist $25599^R,60$; der ganze gemessene Bogen ist $1^G,6435$.

Der vierte ist der in Italien von Boscovich und Le Maire gemessene; sein Mittel entspricht der Breite $47^G,7963$; seine Länge ist $25640^R,55$; der ganze gemessene Bogen ist $2^G,4034$.

Der fünfte Grad ist der in Frankreich von Delambre und Méchain von neuem gemessene Grad. Sein Mittel entspricht der Breite von $51^G,3327$; seine Länge ist $25658^R,29$; der ganze gemessene Bogen ist $10^G,7487$.

Der sechste ist der von Liesganig in Oestreich gemessene. Sein Mittel entspricht der Breite von $53^G,0926$; seine Länge ist $25683^R,30$; der ganze gemessene Bogen ist $3^G,2734$.

Der siebente ist der in Lappland von Clairaut, Maupertuis, le Monnier etc. gemessene. Sein Mittel entspricht der Breite $73^G,7037$. Ich finde seine Länge gleich $25832^R,25$, wenn ich ein Mittel zwischen den verschiedenen Reihen der Dreyecke nehme, und wenn ich auf die Strahlenbrechung bey der Bestimmung des Himmelsbogens Rücksicht nehme; der ganze gemessene Bogen ist $1^G,0644$.

Folgende Tafel enthält diese Grade nach den Breiten geordnet:

Breiten.		Längen der Grade.
$0^G,0000$	. . .	$25538^R,85$
37, 0093	. . .	25666, 65
43, 5556	. . .	25599, 60
47, 7963	. . .	25640, 55
51, 3327	. . .	25658, 28
53, 0926	. . .	25683, 30
73, 7037	. . .	25832, 25.

Die Gleichungen (A) des 39sten Satzes verwandeln sich also hier in folgende:

$$25538^R,85 - z - y \cdot 0,00000 = x^{(1)}$$
$$25666,65 - z - y \cdot 0,30156 = x^{(2)}$$
$$25599,50 - z - y \cdot 0,39946 = x^{(3)}$$
$$25640,55 - z - y \cdot 0,46541 = x^{(4)} \qquad (A')$$
$$25658,28 - z - y \cdot 0,52093 = x^{(5)}$$
$$25683,30 - z - y \cdot 0,54850 = x^{(6)}$$
$$25832,25 - z - y \cdot 0,83887 = x^{(7)}.$$

Die zwey Reihen (C) desselben Satzes verwandeln sich in

$$x^{(1)}; \quad x^{(2)}; \quad x^{(7)};$$
$$\infty; \quad 423,796; \quad 308,202; \quad -\infty,$$

und die beiden Reihen (D) in

$$x^{(1)}; \quad x^{(3)}; \quad x^{(5)}; \quad x^{(7)};$$
$$-\infty; \quad 152,080; \quad 483,087; \quad 547,176; \quad \infty.$$

Hieraus findet man leicht nach dem angeführten Satz $y = 308^R,202$; dies giebt für die Elliptizität der Erde $\frac{1}{277}$; man erhält dann

$$x^{(2)} = x^{(7)} = -x^{(3)} = 48^R,60.$$

Es ist also unmöglich in der Ellipse einen Fehler von $48^R,60$ bey einigen der vorhergehenden Gradmessungen zu vermeiden, auf welche Art man auch die vorhergehenden sieben Grade verbindet, und welches Verhältniſs man auch zum Verhältniſs der Axen wählet; und da dieser Fehler die Grenze derjenigen ist, welche zugelassen werden können, und deswegen selbst unendlich wenig wahrscheinlich ist, so müſste man, wenn man eine elliptische Figur annimmt, noch gröſsere Fehler als $48^R,60$ zulassen. Untersucht man nun mit Aufmerksamkeit die Messungen dieser Grade, so scheint es schwer anzunehmen, daſs in jedem

der drey in Pensylvanien, am Vorgebürge der guten Hoffnung und in Lappland gemessenen Grade, auf welche die drey gröfsten Fehler fallen, ein Irrthum von $48^R,60$ vorgefallen sey. Es scheint also aus den vorhergehenden Messungen zu folgen, dafs die Aenderung der Erdmeridiangrade sich merklich vom Gesetz des Quadrats der Sinus der Breiten, welches die Hypothese elliptischer Meridiane giebt, entfernt.

Wir wollen jedoch die wahrscheinlichste Ellipse bestimmen, welche aus diesen Messungen folgt. Multiplicirt man die Gleichungen (A′) respective mit den Zahlen der Grade, welche die, ihnen zugehörenden, gemessenen Bogen enthalten, nämlich $i^{(1)}$, $i^{(2)}$, $i^{(3)}$ etc. und dividirt man ihre Summe durch $i^{(1)} + i^{(2)} + i^{(3)} + \ldots$, so giebt die Bedingung, dafs die Summe der Fehler $i^{(1)} . x^{(1)} + i^{(2)} . x^{(2)} +$ etc. gleich Null ist,

$$o = 25646^R,80 - z - y . 0,43717.$$

Die Gleichungen (O) des vorhergehenden Satzes verwandeln sich so in folgende:

$$\left.\begin{aligned} -107^R,95 + y . 0,43717 &= x^{(1)} \\ 19,85 + y . 0,13561 &= x^{(2)} \\ -47,20 + y . 0,03771 &= x^{(3)} \\ -6,25 - y . 0,02824 &= x^{(4)} \\ 11,48 - y . 0,08376 &= x^{(5)} \\ 36,50 - y . 0,11133 &= x^{(6)} \\ 185,45 - y . 0,40170 &= x^{(7)}. \end{aligned}\right\} \quad (O')$$

Hieraus kann man leicht schliefsen, dafs die Reihe der Gröfsen $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, $h^{(3)}$ etc., nach der Gröfse der Quotienten $\frac{b^{(1)}}{q^{(1)}}$, $\frac{b^{(2)}}{q^{(2)}}$ etc. geordnet, folgende ist:

0,06198; 0,42757; 0,36443; 1,51405; 0,90031; 0,18405; 0,06787.

Die Gleichungen (O′) entsprechen ihnen in der Ordnung 3, 7, 6, 1, 5, 2, 4: die Summe der drey ersten Gröfsen ist kleiner als die halbe Summe aller dieser Gröfsen und die Summe der vier ersten übersteigt sie; man hat also $x^{(1)} = o$; dies giebt $y = 246,93$ und folglich $z = 25538^R,85$, so dafs der Ausdruck des Meridiangrades gleich

$$25538^R,85 + 246^R,93 . \sin \theta^2$$

ist, wo θ die Breite ist, woraus man für die Abplattung der Erde $\frac{1}{312}$ erhält. Dieser Ausdruck giebt $86^R,26$ für den Irrthum des Lappländischen Grades; ein

Irrthum, welcher viel zu groſs ist, um zugelassen werden zu können. Dies bestätigt, was wir schon oben bemerkt haben, daſs die Erde sich merklich von einer elliptischen Figur entfernt.

Die neuerlich von Delambre und Méchain zur Messung des zwischen Dünkirchen und Barcellona enthaltenen Bogens des Erdmeridians angestellten Operationen lassen wegen ihrer groſsen Genauigkeit keinen Zweifel in dieser Rücksicht übrig. Folgendes sind die Hauptresultate dieser Messungen [81]):

	Breiten.		Abstände des Parallelkreises von Montjoui von den Parallelkreisen von	
Montjoui - - -	$45^G, 958281$	. . .		
Carcassonne - -	48, 016790	. . .	Carcassonne	$52749^R, 48$
Evaux - - -	51, 309414	. . .	Evaux -	137174, 03
Pantheon zu Paris	54, 274614	. . .	Pantheon -	213319, 77
Dünkirchen - -	56, 706944	. . .	Dünkirchen	275792, 36.

Es seyen nun $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$, $a^{(5)}$ diese Abstände; $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$, $\theta^{(3)}$, $\theta^{(4)}$, $\theta^{(5)}$ die Breiten, und $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $x^{(5)}$ die Fehler, deren diese Breiten fähig sind, und welche man theils den Beobachtungen der Polhöhe selbst, theils den geodätischen Messungen beylegen kann, welche letztere auf die Breiten der Parallelkreise Einfluſs haben, wenn man deren Abstände vom Parallelkreis von Montjoui gleich $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ etc. setzt. Der Erdbogen, welcher zwischen dem Aequator und dem Parallelkreis von Montjoui enthalten ist, ist nach dem Vorhergehenden sehr nahe gleich

$$s \cdot [\theta^{(1)} + x^{(1)} - \tfrac{3}{4} \varrho \cdot \sin 2\,\theta^{(1)}],$$

wo s die Gröſse des mittlern Grades und ϱ die Abplattung der Erde, in Graden ausgedrückt, ist. Der zwischen dem Aequator und dem Parallelkreis von Carcassonne enthaltene Bogen wird

81) Zur unmittelbaren Vergleichung dieser Resultate mit den ehemals angestellten Messungen drücken wir sie hier in Sexagesimalgraden und in Toisen aus.

	Breiten.	*Abstände des Parallelkreises von Montjoui vom Parallelkreis von*		
Montjoui - - -	41°. 21′. 44″, 83			
Carcassonne - -	43°. 12′. 54″, 40	Carcassonne - - -	105498, 96	*Toisen.*
Evaux - - -	46°. 10′. 42″, 50	Evaux - - -	274348, 06	
Pantheon zu Paris	48°. 50′. 49″, 75	Pantheon - - -	426639, 54	
Dünkirchen - -	51°. 21′. 45″, 00	Dünkirchen - - -	551584, 72.	

$$s \,.\, [\theta^{(2)} + x^{(2)} - \tfrac{3}{4}\varrho \,.\, \sin 2\,\theta^{(2)}]$$

seyn; der zwischen den Parallelkreisen von Carcassonne und Montjoui enthaltene Bogen ist folglich gleich

$$s \,.\, [\theta^{(2)} - \theta^{(1)} + x^{(2)} - x^{(1)} - \tfrac{3}{4}\varrho \,.\, (\sin 2\,\theta^{(2)} - \sin 2\,\theta^{(1)})].$$

Setzt man ihn gleich $a^{(2)}$, so erhält man

$$\theta^{(2)} - \theta^{(1)} + x^{(2)} - x^{(1)} - \tfrac{3}{2}\varrho \,.\, \sin(\theta^{(2)} - \theta^{(1)}) \,.\, \cos(\theta^{(2)} + \theta^{(1)}) = \frac{a^{(2)}}{s}.$$

Vergleicht man die Parallelkreise der übrigen Orte mit dem von Montjoui, so erhält man drey ähnliche Gleichungen. Substituirt man alsdann die entsprechenden Zahlen, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
2^{\circ},058509 + x^{(2)} - x^{(1)} - \varrho \,.\, 0,0045829 &= \frac{52749^{R},48}{s};\\
5^{\circ},351133 + x^{(3)} - x^{(1)} - \varrho \,.\, 0,0054036 &= \frac{137174^{R},03}{s};\\
8^{\circ},316333 + x^{(4)} - x^{(1)} + \varrho \,.\, 0,0007148 &= \frac{213319^{R},77}{s};\\
10^{\circ},748663 + x^{(5)} - x^{(1)} + \varrho \,.\, 0,0105491 &= \frac{275792^{R},36}{s};
\end{aligned}\right\}. \quad (B)$$

Wendet man auf diese Gleichungen die erste Methode an, welche wir zu Anfang des 39sten Satzes gegeben haben, so findet man, daſs man in der elliptischen Hypothese, welche ein Kleinstes für den gröſsten Fehler giebt, $x^{(1)} = x^{(4)} = -x^{(3)} = -x^{(5)} = 4'',43$; $x^{(2)} = 3'',99$; die Abplattung $\varrho = \frac{1}{150,6}$ und den dem mittlern Parallelkreis entsprechenden Grad gleich $25649^{R},8$ hat. Die Beobachtungen sind mit so groſser Genauigkeit angestellt worden, daſs sie der vorhergehenden, ob schon sehr kleinen, Fehler nicht fähig sind; es scheint also, daſs man sie wenigstens zum Theil den Ursachen beylegen muſs, welche die Figur der Erde von der eines Ellipsoids entfernen. Hiervon giebt die Abplattung $\frac{1}{150,6}$, welche diese Fehler zusammengenommen der Erde geben, einen unwiderlegbaren Beweis, da diese Abplattung weder mit den Erscheinungen der Schwere, noch mit denen der Präcession und Nutation bestehen kann; denn diese Erscheinungen erlauben nicht der Erde eine gröſsere

Abplattung als im Fall der Gleichartigkeit, das heiſst, gröſser als $\frac{1}{230}$, beyzulegen.

Setzt man in den Gleichungen (B), $\varrho = \frac{1}{230}$, oder in Graden $\varrho = 0^G,27691$, und setzt man $s = \frac{100000}{1^G . y}$, so geben sie die folgenden:

$$0^G,000000 - z - y \,.\, 0^G,000000 = - x^{(1)}$$
$$2^G,057240 - z - y \,.\, 5^G,274948 = - x^{(2)}$$
$$5^G,349637 - z - y \,.\, 13^G,717403 = - x^{(3)}$$
$$8^G,316531 - z - y \,.\, 21^G,331977 = - x^{(4)}$$
$$10^G,751583 - z - y \,.\, 27^G,579236 = - x^{(5)}.$$

Diese Gleichungen sind den Gleichungen (A) des 39sten Satzes ähnlich, bloſs das Zeichen der Fehler $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ etc. ausgenommen. Wendet man auf dieselben die zweyte in demselben Satz erklärte Methode an, so verwandeln sich die zwey Reihen (C) desselben Satzes in folgende:

$$- x^{(1)}; \quad - x^{(2)}; \quad - x^{(3)}; \quad - x^{(5)};$$
$$\infty; \quad 0^G,390002; \quad 0^G,389981; \quad 0^G,389699; \quad - \infty;$$

und die zwey Reihen (D) in folgende:

$$- x^{(1)}; \quad - x^{(5)};$$
$$- \infty; \quad 0^G,389843; \quad \infty.$$

Hieraus erhält man

$$- x^{(1)} = - x^{(5)} = x^{(3)} = - 9'',98;$$
$$y = 0,389843;$$

und den Grad unter dem Parallelkreis von $50^G = 25651^R,33$.

Ein Fehler von $9'',98$ ist viel zu groſs, um zugelassen werden zu können; und es ist also nicht möglich, die Abplattung $\frac{1}{230}$, und noch weit weniger, geringere Abplattungen mit den vorhergehenden Messungen zu vereinigen; und es ist also ausgemacht, daſs die Erde sich sehr merklich von der elliptischen Gestalt entfernt. Es ist aber sehr merkwürdig, daſs die neuerlich in Frankreich und in England mit einer groſsen Genauigkeit, theils in der Richtung der Meridiane, theils in einer auf die Mittagskreise senkrechten Richtung, angestell-

ten Messungen darinn übereinstimmen, für das Krümmungsellipsoid eine Ellipse zu geben, deren Elliptizität $\frac{1}{150}$, und deren mittlerer Grad gleich $25649^{R}, 8$ ist.

Will man durch diese Resultate, die zwischen Dünkirchen und dem Pantheon, zwischen dem Pantheon und Evaux, Evaux und Carcassonne, und zwischen Carcassonne und Montjoui gemessenen Grade darstellen, so darf man nur die beobachteten Breiten um ohngefähr $4'',4$ ändern; der auf dem Mittagskreis senkrechte Grad unter der Breite von $56^{c},3144$ wird gleich $25837^{R},6$; man fand ihn durch sehr genaue in England angestellte Messungen gleich $25833^{R},4$. Es erhellet also aus dieser Uebereinstimmung, daſs die beträchtliche Abplattung des Krümmungsellipsoids in Frankreich nicht von den Anziehungen der Pyrenäen und der übrigen im mittäglichen Frankreich liegenden Gebürge abhängt; sie hängt von Anziehungen ab, welche sich viel weiter erstrecken, deren Wirkung im nördlichen Frankreich, und selbst in England, Oestreich und Italien bemerkbar ist; denn alle in diesem Theil der Erdoberfläche gemessenen Grade, lassen sich bis auf 8^{R} oder 9^{R} durch das oben angegebene Krümmungsellipsoid darstellen.

Es erhellet noch aus den verschiedenen Azimuthalbeobachtungen, welche auf dem Erdmeridian von Dünkirchen bis Barcellona angestellt worden sind, daſs das Krümmungsellipsoid nicht genau ein durch Umdrehung erzeugtes Ellipsoid ist. Man könnte das Krümmungsellipsoid, welches den Azimuthalbeobachtungen und zugleich den beobachteten Breiten Genüge thut, bestimmen, wenn man die Formeln des 38sten Satzes, und die vorhergehenden Methoden auf diese Beobachtungen anwendete. Wir schränken uns hier darauf ein, zu bemerken, daſs die Messung eines auf der Mittagslinie der National Sternwarte senkrechten Bogens, welche in der gröſsten Breite Frankreichs mit eben den Mitteln angestellt würde, welche man in der Messung des Mittagskreises gebraucht hat, und die Beobachtung der Azimuthe und der Breiten in verschiedenen Punkten dieses Bogens, über die Eccentrizität dieses Ellipsoids in der Richtung der Parallelkreise weit sichrere Data verschaffen würde, und daſs es also zu wünschen ist, daſs man diese neue Messung der vorhergehenden beyfüge. Die schon angestellten Azimuthalbeobachtungen zeigen, daſs die Meridiane nicht ähnlich sind; und vergleicht man den am Vorgebürge der guten Hoffnung gemessenen Grad mit den in der nördlichen Hälfte der Erde gemessenen Graden, so hat man Ursache zu glauben, daſs die nördliche und südliche Hälfte

von einander verschieden sind. Die Gestalt der Erde ist also sehr zusammengesetzt, wie man natürlicherweise vermuthen muſs, wenn man die groſsen Ungleichheiten ihrer Oberfläche, die verschiedene Dichte der Theile, welche sie bedecken, und die Ungleichheiten des Umfangs und der Tiefe des Meeres betrachtet.

Um die Gröſse des Viertels des Erdmeridians aus dem zwischen Dünkirchen und Montjoui enthaltenen Bogen herzuleiten, muſs man eine Hypothese über die Gestalt der Erde annehmen, und ein Umdrehungsellipsoid ist bey den Ungleichheiten, welche diese Gestalt darbietet, die natürlichste und einfachste Hypothese. In dieser Hypothese würde das Viertel des Meridians sehr nahe 100mal der zwischen Dünkirchen und Montjoui gemessene Bogen, durch die Anzahl seiner Grade dividirt, seyn, wenn seine Mitte dem 50^G der Breite entspräche: sie ist aber ein wenig nördlicher. Hieraus entspringt eine kleine Verbesserung der Länge des Viertels des Meridians, welche von der Abplattung der Erde abhängt. Man hat die Elliptizität gewählt, welche die Vergleichung des in Frankreich gemessenen Bogens mit dem unter dem Aequator gemessenen Bogen giebt, welcher erstere durch seine Lage und seine Entfernung, durch seinen Umfang und durch die Sorgfalt, welche mehrere vortreffliche Beobachter auf seine Messung verwandt haben, zu diesem Zweck vorgezogen werden muſs. Diese Vergleichung giebt für die Elliptizität $\frac{1}{334}$, und das Viertel des Meridians aus dem zwischen Dünkirchen und Montjoui gemessenen Bogen geschlossen, ist so gleich 2565370^n. Der Mètre ist der zehn millionste Theil dieser Länge und folglich gleich $0^n,256537$ oder $0^{toise},513074$; wo die Toise diejenige ist, welche zur Messung des Grads in Peru gedient hat, und welche auf die Temperatur von $16\frac{1}{4}$ Grad desjenigen Quecksilber-Thermometers gebracht worden ist, welches von der Temperatur des schmelzenden Eises bis zu der Temperatur des unter dem einer Quecksilbersäule von 76 Centimètres Höhe gleichen Druck kochenden Wassers in 100 Grad getheilt worden ist. Vermittelst dieses Werthes wird man leicht alle vorhergehenden Messungen und im Allgemeinen alle in Toisen ausgedrückte Messungen in Mètres verwandeln können.

Welches aber auch die Gestalt der Erde sey, so sieht man doch aus den Beobachtungen, daſs die Grade in beiden Hälften der Erde, von den Polen zu

dem

dem Aequator abnehmen; dies erfordert eine entsprechende Zunahme der Erdhalbmesser, und folglich eine Abplattung in der Richtung der Pole. Wir wollen uns, um dies zu zeigen, um mehrerer Einfachheit willen vorstellen, daſs die Erde ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid sey, so wird der Krümmungshalbmesser des Meridians am Pol die Richtung der Umdrehungsaxe haben; er wird hernach ohne Aufhören abnehmen, bis er senkrecht auf diese Axe ist, und dann wird er in der Ebene des Aequators seyn. Diese verschiedenen Halbmesser werden durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt die Evolute des Erdmittagskreises bilden, deren zwey äuſserste Tangenten sich in der Axe des Pols und in der Axe des Aequators befinden. Bezeichnet man diese zwey Tangenten durch a und a', welche man vom Durchschnittspunkt der Axe des Pols mit der Axe des Aequators nehmen muſs, welchen Durchschnittspunkt wir zum Mittelpunkt der Erde annehmen werden; nennt man ferner R und R' die Krümmungshalbmesser des Meridians am Nordpol und am Aequator, und r und r' die vom Mittelpunkt der Erde an diese zwey Punkte gezogenen Halbmesser, so hat man offenbar $r = R - a$; $r' = R' + a'$ und hieraus

$$r' - r = a + a' - (R - R').$$

Die Evolute ist gegen die Axe des Pols convex, weil die Krümmungshalbmesser und die Grade des Meridians von den Polen zum Aequator abnehmen; der ganze Bogen der Evolute ist überdies kleiner, als die Summe $a + a'$ ihrer beiden äuſsersten Tangenten; da nun $R - R'$ diesem Bogen gleich ist, so ist $r' - r$ eine positive Gröſse. Nennt man r'' den vom Mittelpunkt der Erde zum Südpol gezogenen Halbmesser, so wird man auf dieselbe Art sehen, daſs $r' - r''$ positiv ist; und daſs folglich $2\,r'$ gröſser als $r + r''$ ist; das heiſst, daſs der Diameter des Aequators gröſser ist, als die Axe der Pole, oder, was dasselbe ist, daſs die Erde in der Richtung der Pole abgeplattet ist.

Betrachtet man einen unendlich kleinen Bogen des Meridians wie einen Kreisbogen, und gedenkt man sich den Umkreis gezogen, wovon dieser Bogen einen Theil macht, so wird das Ende des Bogens, welches dem Pol am nächsten ist, näher als das andere Ende bey dem Punkt des Umfangs seyn, welcher dem Mittelpunkt der Erde am nächsten ist; woraus man leicht schlieſsen kann, daſs der am ersten Endpunkt gezogene Erdhalbmesser kleiner ist, als der am zweyten Endpunkt gezogene Halbmesser; das heiſst, daſs die Erdhalbmesser von den Polen zum Aequator zunehmen.

$a + a'$ ist kleiner als $2(R - R')$, folglich ist $r' - r$ kleiner als $R - R'$; der Unterschied der Erdhalbmesser des Pols und des Aequators ist daher kleiner, als der Unterschied der zugehörenden Krümmungskreise; so daſs das Verhältniſs, nach welchem die Meridiangrade vom Aequator zu den Polen wachsen, gröſser ist, als das Verhältniſs, nach welchem die Erdhalbmesser abnehmen. Man kann dieselben Schlüsse sehr leicht auf den Fall ausdehnen, wo die Erde kein durch Umdrehung entstandener Körper ist.

42. Wir wollen nun die beobachteten Längen des Sekundenpendels betrachten. Ich werde unter diesen Längen die 15 folgenden wählen: die zwey ersten hat Bouguer bestimmt, die erstere zu Peru unterm Aequator, die zweyte zu Portobello; die dritte hat Legentil zu Pondichery bestimmt; die vierte ist aus der Londner Pendellänge geschlossen worden, durch die Schwingungen eines unveränderlichen Pendels, welches Campell von London nach Jamaica brachte; die fünfte hat Bouguer auf der Insel klein Goave bestimmt; die sechste ist von Lacaille auf dem Vorgebürge der guten Hoffnung bestimmt worden; die siebente von Darquier zu Toulouse; die achte von Liesganig zu Wien; die neunte zu Paris von Bouguer; die zehnte zu Gotha von von Zach; die eilfte ist aus der Pariser geschlossen worden durch den Unterschied der Schwingungen eines unveränderlichen Pendels, welches von London nach Paris gebracht worden; die zwölfte und vierzehnte sind auf dieselbe Art aus der Pariser Pendellänge geschlossen worden vermittelst der Beobachtungen, die Mallet zu Petersburg und Ponoi angestellt hat; die dreyzehnte hat Grischow zu Arensberg auf dieselbe Art aus der Pariser hergeleitet; die funfzehnte ist endlich auf dieselbe Art von den französischen Akademikern bestimmt worden, welche den Meridiangrad in Lappland gemessen haben.

Die neun absoluten Messungen haben den Vortheil, daſs sie auf dieselbe Art angestellt worden sind, welche darinn besteht, daſs man die Schwingungen eines Gewichts beobachtet, welches am untern Ende eines sehr dünnen ungefähr einen Mètre langen Pitfadens aufgehangen ist, dessen oberes Ende von einer Zwickzange gehalten wird. Man kann annehmen, daſs alle diese Beobachtungen am Meereshorizont angestellt worden sind. Ich habe sie auf den leeren Raum und auf einerley Temperatur gebracht, so daſs selbst dann, wenn sie einige Ungewiſsheit über die absolute Länge des Sekundenpendels übrig lassen sollten, die Einförmigkeit der Methode das Gesetz der Aenderung dieser Länge

mit Genauigkeit geben mufs, welcher Gegenstand unter diejenigen gehört, deren Kenntnifs vorzüglich wünschenswerth ist. Die acht andern Längen sind durch Vergleichung eines unveränderlichen Pendels geschlossen worden, welcher zu Paris beobachtet und an die diesen Längen entsprechenden Oerter gebracht worden war.

Ich habe die Pendellänge, welche Bouguer zu Paris beobachtet hat, zur Einheit angenommen, und darauf alle andere bezogen, welche Zahlen nun auch die Verhältnisse des Gewichts desselben Körpers zu seinem Gewicht in Paris, als Einheit des Gewichts angenommen, ausdrücken, wenn dieser Körper nach und nach an die genannten Oerter gebracht würde.

Breiten.	Längen des Sekundenpendels.
$0^G, 00$	0,99669
10, 61	0,99689
13, 25	0,99710
20, 00	0,99745
20, 50	0,99728
37, 69	0,99877
48, 44	0,99950
53, 57	0,99987
54, 26	1,00000
56, 63	1,00006
57, 22	1,00018
64, 72	1,00074
66, 60	1,00101
74, 22	1,00137
74, 53	1,00148.

Die Gleichungen (A) des 39sten Satzes verwandeln sich also hier in folgende:

$$\left.\begin{array}{l}
0,99669 - z - y \,.\, 0,00000 = x^{(1)} \\
0,99689 - z - y \,.\, 0,02752 = x^{(2)} \\
0,99710 - z - y \,.\, 0,04270 = x^{(3)} \\
0,99745 - z - y \,.\, 0,09549 = x^{(4)} \\
0,99728 - z - y \,.\, 0,10016 = x^{(5)} \\
0,99877 - z - y \,.\, 0,31142 = x^{(6)} \\
0,99950 - z - y \,.\, 0,47551 = x^{(7)}
\end{array}\right\} \quad (A'')$$

$$
\begin{array}{ll}
0,99987 - z - y \,.\, 0,55596 = x^{(8)} & \\
1,00000 - z - y \,.\, 0,56672 = x^{(9)} & \\
1,00006 - z - y \,.\, 0,57624 = x^{(10)} & \\
1,00018 - z - y \,.\, 0,61244 = x^{(11)} & \quad (A'') \\
1,00074 - z - y \,.\, 0,72307 = x^{(12)} & \\
1,00101 - z - y \,.\, 0,74909 = x^{(13)} & \\
1,00137 - z - y \,.\, 0,84478 = x^{(14)} & \\
1,00148 - z - y \,.\, 0,84829 = x^{(15)}. &
\end{array}
$$

Die zwey Reihen (C) desselben Satzes verwandeln sich in folgende:

$$
\begin{array}{cccccc}
x^{(1)}; & x^{(3)}; & x^{(4)}; & x^{(6)}; & x^{(13)}; & x^{(15)}; \\
\infty; & +0,0096019; & +0,0066304; & +0,0061131; & +0,0051181; & +0,0047379 \ldots -\infty;
\end{array}
$$

und die zwey Reihen (D) in folgende:

$$
\begin{array}{ccc}
x^{(1)}; & x^{(14)}; & x^{(15)}; \\
-\infty; & +0,0055399; & +0,0313390; \ldots +\infty.
\end{array}
$$

Man kann hieraus leicht nach dem angeführten Satz schliefsen, dafs $y = 0,0055399$ ist. Man findet dann

$$x^{(6)} = -x^{(1)} = -x^{(14)} = 0,00018;$$
$$z = 0,99687.$$

Auf welche Art man also auch die 15 vorhergehenden Messungen verbindet, so kann man doch nicht einen Fehler von weniger als 0,00018 in der Hypothese vermeiden, wo die Aenderungen der Schwere vom Aequator zu den Polen im Verhältnifs des Quadrats des Sinus der Breite wachsen. Dieser Fehler ist innerhalb der Grenzen der Fehler, deren diese Messungen fähig sind, und man sieht, dafs er weit kleiner ist, als der entsprechende Fehler der Messungen der Meridiangrade. Dies bestätigt das, was uns die Theorie im 33sten Satz angezeigt hat, dafs nämlich die Glieder des Ausdrucks des Erdhalbmessers, welche die Figur der Erde von der elliptischen Hypothese entfernen, in der Länge des Sekundenpendels weit weniger bemerkbar sind, als in der Länge der Meridiangrade.

Man hat im 34sten Satz gesehen, dafs die Elliptizität der Erde in der elliptischen Hypothese dem $\frac{5}{2}$fachen Verhältnifs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere, weniger dem Werth von y, gleich ist; dies Verhältnifs ist $\frac{1}{289}$; die Elliptizität ist also gleich $0,00865 - y$. Substituirt man statt y seinen vorherge-

henden Werth, so erhält man $\frac{1}{321,48}$ für die Elliptizität der Erde, wo der größte Fehler der vorhergehenden Messungen ein Kleinstes ist.

Wir wollen nun nach der Methode des 40sten Satzes die wahrscheinlichste Ellipse bestimmen, welche aus diesen Messungen folgt. Addirt man die Gleichungen (A″) und dividirt man ihre Summe durch 15, so erhält man

$$0 = 0,99923 - z - y \cdot 0,43529.$$

Diese Bedingungsgleichung ist nothwendig, wenn die Summe der Fehler gleich Null seyn soll. Die Gleichungen (O) des 40sten Satzes verwandeln sich in folgende:

$$\left.\begin{aligned}
-0,00254 + y \cdot 0,43529 &= x^{(1)}\\
-0,00234 + y \cdot 0,40777 &= x^{(2)}\\
-0,00213 + y \cdot 0,39259 &= x^{(3)}\\
-0,00178 + y \cdot 0,33980 &= x^{(4)}\\
-0,00195 + y \cdot 0,33513 &= x^{(5)}\\
-0,00046 + y \cdot 0,12387 &= x^{(6)}\\
0,00027 - y \cdot 0,04022 &= x^{(7)}\\
0,00064 - y \cdot 0,12067 &= x^{(8)}\\
0,00077 - y \cdot 0,13143 &= x^{(9)}\\
0,00083 - y \cdot 0,14095 &= x^{(10)}\\
0,00095 - y \cdot 0,17715 &= x^{(11)}\\
0,00151 - y \cdot 0,28778 &= x^{(12)}\\
0,00178 - y \cdot 0,31380 &= x^{(13)}\\
0,00214 - y \cdot 0,40949 &= x^{(14)}\\
0,00225 - y \cdot 0,41300 &= x^{(15)}.
\end{aligned}\right\} \quad (O'')$$

Hieraus kann man leicht schließen, daß die Reihe der Größen $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, $h^{(3)}$ etc. des 40sten Satzes folgende ist:

0,0067131; 0,0058886; 0,0058586; 0,0058352; 0,0058186;
0,0057385; 0,0056724; 0,0054479; 0,0054255; 0,0053627;
0,0053037; 0,0052471; 0,0052384; 0,0052260; 0,0037136.

Die Gleichungen (O″) entsprechen ihnen in folgender Ordnung: 7, 10, 9, 1, 5, 2, 13, 15, 3, 11, 8, 12, 4, 14, 6; die Summe der sechs ersten ist kleiner als die halbe Summe aller dieser Größen, und die Summe der sieben ersten übersteigt diese halbe Summe; die siebente Größe gehört zur 13ten der Gleichun-

gen (A''); man hat also nach Satz 40, $x^{(11)} = 0$ und folglich

$$y = 0{,}0056724; \qquad z = 0{,}99676.$$

Dies giebt für die Elliptizität der Erde $\frac{1}{335{,}78}$. Dies stimmt auf eine merkwürdige Art mit der Elliptizität überein, welche aus den in Frankreich und unter dem Aequator gemessenen Graden geschlossen worden ist. Es erhellet also aus den Beobachtungen der Pendellänge, daſs die Erde weit weniger abgeplattet ist, als im Fall der Gleichartigkeit, und daſs das Verhältniſs ihrer Axen nicht gröſser als 320 : 321 angenommen werden kann, welches Verhältniſs die kleinsten Fehler in den vorhergehenden Pendellängen giebt. Die wahrscheinlichste Ellipse, welche aus diesen Beobachtungen folgt, ist diejenige, wo die Axen das Verhältniſs 335 : 336 haben; der Ausdruck der Pendellänge ist alsdann nach dem Vorhergehenden, wenn ψ die Breite ist, gleich

$$0{,}99676 + 0{,}0056724 \,.\, \sin \psi^2. \qquad (e).$$

Man muſs nur noch diesen Ausdruck mit der absoluten Pendellänge unter dem Aequator multipliciren, um ihre absolute Länge an jedem andern Ort, dessen Breite ψ ist, zu erhalten. B o u g u e r fand diese absolute Länge unter dem Aequator gleich $0^{me},739615$; man hat aber Ursache zu glauben, daſs seine Methode dem Pendel eine zu groſse Länge giebt, weil der Mittelpunkt der *Schwingungen* wegen der Dicke des Fadens und wegen des geringen *Widerstandes*, welchen er seiner Biegung entgegensetzt, ein wenig unterhalb des Aufhängepunktes seyn muſs. B o r d a hat durch ein sehr genaues Mittel die Sekundenpendellänge auf der Sternwarte zu Paris bestimmt, und sie gleich $0^{me},741887$ gefunden. Dividirt man sie durch $0{,}99676 + 0{,}0056724 \,.\, \sin \psi^2$, wo ψ die Breite der Sternwarte ist, so erhält man $0^{me},741905$; dies ist der Factor, mit welchem man die Formel (e) multipliciren muſs, welche so die absolute Pendellänge an irgend einem Ort gleich $0^{me},739502 + 0^{me},004208 \,.\, \sin \psi^2$ giebt [82]).

Wir bemerken hier, daſs dieselben Anomalien, welche man in den verschiedenen von Dünkirchen bis Barcellona gemessenen Graden findet, und de-

82) Man kann dieser Formel folgende Gestalt geben: $0^{me},741606 - 0^{me},002104 \,.\, \cos 2\psi$. Für gewöhnliche Sexagesimalsekunden ist die Länge des Pendels in Linien des Pariser Fuſses ausgedrückt,

$$439^{li},1426 + 2^{li},4988 \,.\, \sin \psi^2, \quad \text{oder} \quad 440^{li},392 - 1^{li},2494 \,.\, \cos 2\psi.$$

ren Ursache ohne Zweifel die Unregelmäſsigkeit der Theile der Erde ist, auch in den beobachteten Pendellängen gefunden werden; denn Grischow beobachtete zu Petersburg und zu Arensberg, unter sehr wenig von einander unterschiedenen Breiten, Aenderungen in diesen Längen, welche beträchtlich gröſser sind, als diejenigen, welche aus dem vorhergehenden Gesetz der Aenderung der Pendellängen vom Aequator zu den Polen folgen.

Diese Anomalien der Aenderung der Schwere verschwinden, sehr nahe, in groſsen Abständen, so daſs man dann nur das Gesetz der Aenderung, nämlich im Verhältniſs des Quadrats des Sinus der Breite, gewahr wird. Man hat im 33sten Satz gesehen, daſs der Ausdruck der Sekundenpendellänge gleich

$$L + \alpha L.[Y^{(2)} + 2.Y^{(3)} + 3.Y^{(4)} + \text{etc.}] + \tfrac{1}{2}\alpha\Phi . L\,(\mu^2 - \tfrac{1}{3})$$

ist, wenn der Ausdruck des Erdhalbmessers gleich $1 + \alpha.[Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \ldots]$ ist. Da nun die Beobachtungen diese Länge sehr nahe der Gröſse μ^2 proportional geben, so ist $Y^{(2)}$ sehr nahe gleich $-h\,(\mu^2 - \frac{1}{3})$. Da die Erde sich um eine ihrer Hauptaxen dreht, so muſs $Y^{(2)}$ nach dem 32sten Satz von der Form $-h.(\mu^2 - \frac{1}{3}) + h^{\text{IV}}.(1 - \mu^2).\cos 2\varpi$ seyn. Die Beobachtungen des Pendels zeigen uns, daſs h^{IV} in Vergleichung mit h sehr klein ist; sie lehren uns auch noch, daſs $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$ etc. in Vergleichung mit $Y^{(2)}$ sehr klein sind, und daſs man sie also im Ausdruck des Erdhalbmessers und selbst in den Ausdrücken der Schwere und der Parallaxe vernachlässigen kann; die Messungen verschiedener Meridiangrade zeigen uns hingegen, daſs diese Glieder im Ausdruck dieser Grade sehr bemerkbar werden, wegen der Gröſse der Koeffizienten, mit welchen sie in diesem Ausdruck multiplicirt sind.

43. Wir wollen nun Jupiter betrachten, dessen sehr beträchtliche Abplattung genau bestimmt worden ist. Nimmt man zuerst an, daſs dieser Planet gleichartig ist, so wird man seine Elliptizität durch die Gleichung (2) des 18ten Satzes bestimmen,

$$0 = \frac{9\lambda + 2q.\lambda^3}{9 + 3\lambda^2} - \text{Arc.tang}\,\lambda,$$

wo $\sqrt{1 + \lambda^2}$ das Verhältniſs der Axe des Aequators zur Axe des Pols ist. Man muſs q bestimmen, um aus dieser Gleichung λ zu finden. Nennt man aber D den Abstand des vierten Jupiterssatelliten von seinem Mittelpunkt, und T seine Umlaufs-Zeit, in Theilen des Tages ausgedrückt, so wird die Centrifugalkraft dieses Satelliten der Masse Jupiters M, durch D^3

dividirt, gleich seyn. Nennt man aber t die Dauer der Umwälzung Jupiters durch einen Bruch des Tages ausgedrückt, so wird diese Centrifugalkraft zur Centrifugalkraft, welche aus der Umwälzung Jupiters in der Entfernung 1 von der Umdrehungsaxe entsteht, im Verhältniſs $\frac{D}{T^2}$ zu $\frac{1}{t^2}$ seyn; man hat also

$$g = \frac{M \,.\, T^2}{t^2 \,.\, D^3}.$$

Man hat nach Satz 19, $M = \frac{4}{3}\pi \,.\, k^3 \,.\, (1 + \lambda^2)$; folglich

$$\frac{g}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{k^3 \,.\, (1 + \lambda^2) \,.\, T^2}{t^2 \,.\, D^3} = q.$$

Wir werden mit Newton nach Pound's Messungen annehmen, daſs der Abstand des vierten Satelliten gleich 26,63 Halbmessern des Aequators des Planeten ist; dies giebt $\frac{k \,.\, \sqrt{1 + \lambda^2}}{D} = \frac{1}{26,63}$; man hat ferner

$$t = 0^{\text{tag}},41377; \qquad T = 16^{\text{tage}},68902,$$

und folglich

$$q = 0,0861450 \,.\, (1 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}},$$

und die Gleichung für λ verwandelt sich in folgende:

$$0 = 9\lambda + \frac{0,172290}{\sqrt{1 + \lambda^2}} - (9 + 3\lambda^2) \,.\, \text{Arc} \,.\, \text{tang}\, \lambda.$$

Hieraus erhält man $\lambda = 0,481$, und folglich die Axe des Aequators gleich 1,10967, wenn man die Axe des Pols zur Einheit annimmt.

Nach den von Newton angeführten Beobachtungen Pounds ist die Aequatorsaxe Jupiters 1,0771; Short fand sie aus seinen Beobachtungen 1,0769. Man findet endlich durch die Bewegung der Knoten und der Jupitersnähen der Satelliten Jupiters dieselbe Axe gleich 1,0747, und sie wird hierdurch weit genauer bestimmt, als durch die directen Messungen, wie man in der Theorie der Jupiterssatelliten sehen wird. Diese verschiedenen Resultate zeigen einstimmig, daſs Jupiter weniger abgeplattet ist, als im Fall der Gleichartigkeit, und daſs also seine Dichte, so wie die der Erde, von der Oberfläche zum Mittelpunkt wächst.

Wa-

Waren die Planeten ursprünglich flüssig, welches eine sehr natürliche Voraussetzung ist, so sind die Grenzen ihrer Elliptizität, wie man im 30sten Satz gesehen hat, $\frac{5}{4}\alpha\phi$ und $\frac{1}{2}\alpha\phi$, so daſs die Aequatorsaxe innerhalb der Grenzen $1+\frac{5}{4}\alpha\phi$ und $1+\frac{1}{2}\alpha\phi$ enthalten ist, wenn die Axe des Pols gleich 1 ist. Die erstere dieser Grenzen entspricht dem Fall der Gleichartigkeit, und da diese Grenze dann nach dem Vorhergehenden gleich 1,10967 ist, so hat man $\frac{5}{4}\alpha\phi = 0,10967$; dies giebt 1,10967 und 1,04387 für die zwey Grenzen, zwischen welchen die Aequatorsaxe enthalten seyn muſs. Nun sind aber die vorhergehenden Bestimmungen der Axen, sowohl diejenige, welche durch die directen Messungen bestimmt worden, als auch diejenige, welche aus der Bewegung der Knoten der Jupiterssatellitenbahnen folgt, innerhalb dieser Grenzen enthalten; die Theorie der Schwere stimmt daher in diesem Punkt vollkommen mit den Beobachtungen überein.

Nimmt man an, daſs Jupiter und die Erde flüssig sind, und daſs ihre Dichten in solchen Entfernungen von ihren Mittelpunkten, welche sich wie ihre Durchmesser verhalten, ein beständiges Verhältniſs haben, so werden sie beide, vermöge des 30sten Satzes, dasselbe Gesetz der Elliptizitäten haben. Da nun die Elliptizität der Ueberschuſs der Aequatorsaxe über die als Einheit angenommene Axe des Pols ist, so werden die Elliptizitäten Jupiters und der Erde dasselbe Verhältniſs haben, was auch immer das Gesetz der Dichten sey. Nun verhalten sich aber die Elliptizitäten im Fall der Gleichartigkeit, vermöge des Vorhergehenden und nach Satz 19., wie 0,10967 zu 0,00433441; setzt man also die Elliptizität Jupiters gleich 0,0747, so wie sie die Bewegung der Knoten seiner Satelliten giebt, so erhält man $\frac{1}{338,72}$ für die Elliptizität der Erde, welche dem nämlichen Gesetz der Dichte entspricht. Diese Elliptizität würde $\frac{1}{328,17}$ seyn, wenn man die Abplattung Jupiters, welche aus Pounds Messungen folgt, annähme. Diese verschiedenen Resultate stimmen mit denjenigen überein, welche uns die Pendelbeobachtungen gegeben haben; und die Analogie Jupiters und der Erde vereinigt sich mit diesen Beobachtungen, um uns zu zeigen, daſs die Abplattung des Erdsphäroids kleiner als $\frac{1}{230}$ und selbst klei-

ner als $\frac{1}{300}$ ist. Man wird im 5ten Buch dies Resultat durch die Erscheinungen des Vorrückens der Nachtgleichen und des Schwankens der Erdaxe bestätigt sehen.

Wir werden von der Figur des Monds im fünften Buch handeln, wenn wir die Bewegungen des Mondssphäroids um seinen Schwerpunkt betrachten werden, welche die einzigen Erscheinungen sind, die uns einiges Licht über diese Gestalt geben können, die zu wenig von der Kugel verschieden ist, als daſs man sie durch directe Beobachtungen bestimmen könnte.

Sechstes Kapitel.

Von der Gestalt des Saturnsringes.

44. Der Saturnsring ist eine kreisförmige Scheibe, von sehr geringer Dicke, deren Mittelpunkt mit dem des Planeten zusammenfällt, und deren Breite ohngefähr $\frac{1}{3}$ des Saturnsdurchmessers zu seyn scheint, und dem Abstande des innern Randes von der Oberfläche dieses Planeten sehr nahe gleich ist. Die Fläche des Rings ist in zwey fast gleiche Theile durch einen dunkeln concentrischen Streif getheilt; dies beweist, daſs der Ring aus zwey concentrischen Ringen und selbst aus einer gröſsern Anzahl Ringe besteht, wenn man sich auf Shorts Beobachtungen verläſst, welcher versichert, mit einem stark vergröſsernden Teleskop die äuſsere Fläche des Rings durch dunkle concentrische Streifen getheilt gesehen zu haben. Wir werden, so wie in den vorhergehenden Untersuchungen, annehmen, daſs eine unendlich wenig dicke Lage eines Flüssigen, welche auf der Oberfläche dieser Ringe verbreitet wäre, daselbst im Gleichgewicht seyn würde, vermöge der Kräfte, welche auf sie wirken würden; denn es ist in der That gegen alle Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daſs diese Ringe sich nur durch den Zusammenhang ihrer Theilchen um Saturn erhalten; die Theilchen, welche dem Planeten am nächsten sind, und welche von der immer erneuerten Wirkung der Schwere angezogen werden, würden sich endlich von den Ringen abgesondert haben, welche endlich durch eine unmerkliche Abnahme zerstöhrt werden würden, so wie alle übrigen Werke der Natur, welche der Wirkung fremder Ursachen keine hinreichenden Kräfte entgegensetzen können. Wir werden durch die Bedingungen des Gleichgewichts dieses Flüssigen die Gestalt dieser Ringe bestimmen.

Man kann sich vorstellen, daſs jeder Ring durch die Umdrehung einer geschlossenen Figur, z. B. einer Ellipse, erzeugt worden ist, welche sich in einer Richtung, die senkrecht auf ihre Ebene ist, um den Mittelpunkt Saturns bewegt, welcher Mittelpunkt sich auf der Verlängerung der Axe dieser Figur befindet. Wir werden annehmen, daſs diese Axe in Vergleichung mit der Entfernung ihres Mittelpunkts von dem Mittelpunkt des Planeten sehr klein ist. Man hat im 11ten Satz des 2ten Buches gesehen, daſs man

$$0 = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)$$

hat, wenn x, y, z die drey rechtwinklichten Koordinaten eines von einem Sphäroid angezogenen Punktes sind, und wenn V die Summe der Theilchen des Sphäroids ist, jedes durch seinen Abstand von diesem Punkt dividirt. Ist nun das Sphäroid durch Umdrehung entstanden, so ist die Axe der z die Axe der Umdrehung selbst, und setzt man $r^2 = x^2 + y^2$, so ist V eine Funktion von z und von r, weil diese Funktion unverändert bleiben muſs, wenn r und z dieselben Werthe behalten; man hat also dann [83]):

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = \frac{y^2}{r^3} \cdot \left(\frac{dV}{dr}\right) + \frac{x^2}{r^2} \cdot \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right),$$

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) = \frac{x^2}{r^3} \cdot \left(\frac{dV}{dr}\right) + \frac{y^2}{r^2} \cdot \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right),$$

und die vorhergehende Gleichung verwandelt sich so in folgende:

$$0 = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{dV}{dr}\right) + \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right);$$

dies ist die Gleichung für ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid.

Setzt man $r = a + u$, wo a der Abstand des Mittelpunkts Saturns vom

83) Es ist nämlich $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\right) \cdot \left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right) \cdot \left(\frac{dr}{dx}\right)^2$; und $\left(\frac{dr}{dx}\right) = \frac{x}{r}$; differenziirt man dies partielle Differenzial von neuem in Beziehung auf x, so erhält man

$$\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) = \frac{1}{r} - \left(\frac{dr}{dx}\right) \cdot \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}.$$

Da ferner $\left(\frac{dr}{dy}\right) = \frac{y}{r}$, so ist $\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) = \frac{x^2}{r^3}$, welchen Ausdruck man unmittelbar aus $\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)$ erhält, wenn man y mit x verwechselt, weil man auf dieselbe Art $\left(\frac{dr}{dy}\right)$ aus $\left(\frac{dr}{dx}\right)$ findet.

Mittelpunkt der Figur, welche den Ring erzeugt, ist, so erhält man

$$0 = \frac{1}{a+u} \cdot \left(\frac{dV}{du}\right) + \left(\frac{d^2V}{du^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right); \quad (1)$$

und setzt man die Koordinaten u und z in Vergleichung mit dem Halbmesser a sehr klein, so hat man sehr nahe

$$0 = \left(\frac{d^2V}{du^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right);$$

dies ist die Gleichung für Cylinder von unendlicher Länge auf beiden Seiten des Anfangspunkts der u und der z; und man sieht, daſs dies sehr nahe der Fall des Ringes ist, wenn der angezogene Punkt nahe an seiner Oberfläche ist.

Diese Gleichung giebt, wenn man integrirt [84]),

$$V = \phi \,.\, (u + z \,.\, \sqrt{-1}) + \psi \,.\, (u - z \,.\, \sqrt{-1}),$$

wo $\phi(u)$ und $\psi(u)$ willkührliche Funktionen von u sind. Man kann diesem Ausdruck von V folgende Form geben:

$$V = f.(u + z.\sqrt{-1}) + \sqrt{-1} \,.\, F.(u + z.\sqrt{-1})$$
$$+ f.(u - z.\sqrt{-1}) - \sqrt{-1} \,.\, F.(u - z.\sqrt{-1});$$

84) Erinnert man sich, daſs das erste, zweyte, und überhaupt das nte Differenzial einer Funktion von $(u+z)$ in Beziehung auf u genommen, demselben nten Differenzial in Beziehung auf z genommen, gleich ist, weil jedes dieser partiellen Differenziale dem vollständigen in Beziehung auf u und auf z genommenen, und durch $du + dz$ dividirten nten Differenzial gleich ist, so sieht man, daſs jede Funktion von $(u+z)$, welche wir mit $\varphi\,(u+z)$ bezeichnen wollen, der Differenzialgleichung $\left(\frac{d^nV}{du^n}\right) = \left(\frac{d^nV}{dz^n}\right)$ Genüge thut. Die gegebene Gleichung ist $\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) = -\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)$; es ist daher natürlich zu versuchen, ob man ihr nicht durch $\varphi\,(qu + bz)$ Genüge thun kann. Diese Annahme giebt $\left(\frac{dV}{du}\right) = q\varphi'(qu + bz)$ und $\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) = q^2\varphi''\,(qu + bz)$; eben so $\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) = b^2 \,.\, \varphi''\,(qu + bz)$, folglich $q^2 \,.\, \varphi''(qu + bz) = -\,b^2 \,.\, \varphi''\,(qu + bz)$, oder $-\,q^2 = +\,b^2$, oder $b = \pm\, q \,.\, \sqrt{-1}$. Man sieht daher, daſs die Funktionen $\varphi\,(qu + qz.\sqrt{-1})$ und $\varphi\,(qu - qz.\sqrt{-1})$ der gegebenen Differenzialgleichung Genüge thun; und da das vollständige Integral einer partiellen Differenzialgleichung von der zweyten Ordnung zwey willkührliche Funktionen enthalten muſs, so ist $V = \varphi\,(qu + qz.\sqrt{-1}) + \psi(qu - qz.\sqrt{-1})$, wo man der Kürze wegen q weglassen kann, weil man $qu = u'$ und $qz = z'$ setzen kann, wodurch $V = \varphi\,(u' + z'.\sqrt{-1}) + \psi\,(u' - z'.\sqrt{-1})$ wird.

wo $f(u)$ und $F(u)$ reelle Funktionen von u sind. Besteht die erzeugende Figur des Cylinders aus zwey gleichen und ähnlichen Theilen, auf jeder Seite der Axe der u, so bleibt der Ausdruck von V unverändert, wenn man in ihm das Zeichen von z ändert; man hat also in diesem Fall

$$V = f.(u + z.\sqrt{-1}) + f.(u - z.\sqrt{-1}).$$

Es ist zur Bestimmung der Funktion $f(u)$ hinreichend, den Werth von V dann zu kennen, wenn $z = 0$ ist, oder wenn der angezogene Punkt auf der Verlängerung der Axe der u ist; und man wird bald sehen, daſs die Bestimmung dieser Funktion sich auf die Quadratur der krummen Linien bringen läſst.

Der Werth von V, der sich auf die Cylinder bezieht, muſs nur als eine Annäherung in Beziehung auf die Ringe angesehen werden; substituirt man ihn aber in die Gleichung (1), so kann man leicht hieraus immer mehr und mehr genäherte Werthe herleiten. Setzt man in dieser Gleichung

$$u + z.\sqrt{-1} = s; \qquad u - z.\sqrt{-1} = s',$$

so verwandelt sie sich in [85])

$$0 = 2.\left(\frac{d^2V}{ds.ds'}\right) + \frac{1}{2a + s + s'}.\left[\left(\frac{dV}{ds}\right) + \left(\frac{dV}{ds'}\right)\right].$$

Es sey

$$V = V' + \frac{1}{a}.V'' + \frac{1}{a^2}.V''' + \text{etc.};$$

vergleicht man dann die gleichen Potenzen von $\frac{1}{a}$, so erhält man folgende Gleichungen [86]):

85) Es ist $\left(\frac{dV}{du}\right) = \left(\frac{dV}{ds}\right).\left(\frac{ds}{du}\right) + \left(\frac{dV}{ds'}\right).\left(\frac{ds'}{du}\right) = \left(\frac{dV}{ds}\right) + \left(\frac{dV}{ds'}\right)$, weil $\left(\frac{ds}{du}\right) = 1 = \left(\frac{ds'}{du}\right)$ und hieraus $\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) = \left(\frac{d^2V}{ds^2}\right).\left(\frac{ds}{du}\right) + \left(\frac{d^2V}{ds'^2}\right).\left(\frac{ds'}{du}\right) + \left(\frac{d^2V}{ds.ds'}\right).\left[\left(\frac{ds}{du}\right) + \left(\frac{ds'}{du}\right)\right]$ $= \left(\frac{d^2V}{ds^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{ds'^2}\right) + 2.\left(\frac{d^2V}{ds.ds'}\right)$. Da ferner $\left(\frac{ds}{dz}\right) = \sqrt{-1}$ und $\left(\frac{ds'}{dz}\right) = -\sqrt{-1}$, so ist $\left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dV}{ds}\right).\sqrt{-1} - \left(\frac{dV}{ds'}\right).\sqrt{-1}$ und $\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) = -\left(\frac{d^2V}{ds^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{ds'^2}\right)$. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (1), so erhält man die im Text gegebene Gleichung.

86) Der Werth von V giebt $\left(\frac{dV}{ds}\right) = \left(\frac{dV'}{ds}\right) + \frac{1}{a}.\left(\frac{dV''}{ds}\right) + \frac{1}{a^2}.\left(\frac{dV'''}{ds}\right) \ldots;$

$$0 = 2 \cdot \left(\frac{d^2 V'}{ds \,.\, ds'}\right);$$

$$0 = 2 \cdot \left(\frac{d^2 V''}{ds \,.\, ds'}\right) + \tfrac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{dV'}{ds}\right) + \left(\frac{dV'}{ds'}\right)\right];$$

$$0 = 2 \cdot \left(\frac{d^2 V'''}{ds \,.\, ds'}\right) + \tfrac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{dV''}{ds}\right) + \left(\frac{dV''}{ds'}\right)\right] - \left(\frac{s + s'}{4}\right) \cdot \left[\left(\frac{dV'}{ds}\right) + \left(\frac{dV'}{ds'}\right)\right].$$

Diese Gleichungen werden, wenn man sie integrirt, die Werthe von V', V'' etc. geben; wir werden zur Bestimmung der willkührlichen Funktionen derselben um mehrerer Einfachheit willen annehmen, daſs die erzeugende Figur des Ringes sich auf beiden Seiten der Axe der u gleich und ähnlich ist, wodurch die willkührlichen Funktionen in jedem der Werthe V', V'' etc. auf eine einzige gebracht werden. Es ist, um sie zu finden, hinreichend, diese Werthe für den Fall zu kennen, wenn sich der angezogene Punkt auf der Verlängerung der Axe der u befindet. Man betrachte einen mit derjenigen Ebene parallelen Kreis, welche durch die Axe der u geht und auf die erzeugende Figur senkrecht ist; man nehme an, daſs sich der Mittelpunkt dieses Umkreises auf der geraden Linie befindet, welche durch den Mittelpunkt Saturns geht, und senkrecht auf diese Ebene ist. Man nenne y die Höhe dieses Mittelpunkts über diese Ebene, $a + x$ den Halbmesser dieses Umkreises und ϖ den Winkel, welchen dieser Halbmesser mit der Ebene der erzeugenden Figur, welche durch den angezogenen Punkt geht, macht, und es sey $a + u$ die Entfernung dieses Punkts vom Mittelpunkt Saturns: dann wird die Summe der Theilchen des Umkreises, jedes durch seinen Abstand vom angezogenen Punkt dividirt, gleich [87])

$\left(\frac{dV}{ds'}\right) = \left(\frac{dV'}{ds'}\right) + \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{dV''}{ds'}\right) + \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{dV'''}{ds'}\right) \ldots$; ferner $2 \cdot \left(\frac{d^2 V}{ds \,.\, ds'}\right)$ $= 2 \cdot \left(\frac{d^2 V'}{ds \,.\, ds'}\right) + \frac{2}{a} \cdot \left(\frac{d^2 V''}{ds \,.\, ds'}\right) + \frac{2}{a^2} \cdot \left(\frac{d^2 V'''}{ds \,.\, ds'}\right) \ldots$ und vermittelst des binomischen Lehrsatzes $\frac{1}{2a + s + s'} = \frac{1}{2a} - \frac{s + s'}{4a^2} + \frac{(s + s')^2}{8a^3} - \ldots$, woraus man ohne Schwierigkeit die Koeffizienten a^0, a^{-1}, a^{-2} . . . finden wird.

87) Sind in einem Dreyeck die beiden Seiten $a + u$ und $a + x$ nebst dem eingeschlossenen Winkel ϖ gegeben, so ist das Quadrat der dritten Seite gleich $(a + u)^2 - 2(a + u).(a + x).\cos\varpi + (a + x)^2$; addirt man hierzu y^2, so erhält man das Quadrat der Hypotenuse, welche die gesuchte Entfernung des Theilchens des Umkreises vom angezogenen Punkt ist.

$$\int \frac{(a + x) \,.\, d\varpi}{\sqrt{(a + u)^2 - 2.(a + u).(a + x).\cos\varpi + (a + x)^2 + y^2}}$$

seyn, wo das Integral von $\varpi = 0$ bis ϖ gleich dem Umkreis genommen werden muſs. Man muſs hernach dies Integral mit dy multipliciren und von $y = -\phi(x)$ bis $y = \phi(x)$ integriren, wo $y^2 = [\phi(x)]^2$ die Gleichung der erzeugenden Figur des Ringes ist: man muſs endlich, um den Werth von V zu erhalten, dies neue Integral mit dx multipliciren und von $x = -k$ bis $x = k'$ integriren, wo k und k' die Grenzen der Werthe von x sind. Diese verschiedene Integrationen sind unausführbar, wenn man sie streng genau haben will; man kann sie aber in Reihen nach den Potenzen von $\frac{1}{a}$ entwickelt erhalten, und dies ist in der gegenwärtigen Untersuchung hinreichend. Da aber V unendlich wird, wenn man a unendlich groſs setzt, so muſs man, anstatt V zu suchen, $\left(\frac{dV}{du}\right)$ bestimmen, dessen Werth nie unendlich wird. Es ist sichtbar, daſs der Ausdruck von $\left(\frac{dV}{du}\right)$ den von $\left(\frac{dV}{dz}\right)$ geben wird, und daſs man folglich die Anziehungen des Ringes parallel mit den Axen der u und der z haben wird.

Die Dimensionen der erzeugenden Figur der Saturnsringe *sind in* Vergleichung mit ihren Durchmessern klein genug, um ihre durch a dividirten Glieder vernachlässigen zu können. Substituirt man aber in das vorhergehende Integral statt $\cos\varpi$ seinen Reihenwerth $1 - \frac{1}{2}\varpi^2 +$ etc., und setzt man $a\varpi = t$, so verwandelt es sich, wenn man die durch a dividirten Glieder wegläſst, in

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(u - x)^2 + y^2 + t^2}}.$$

Sein Differenzial in Beziehung auf u genommen und durch du dividirt, ist gleich

$$-\int \frac{(u - x) \,.\, dt}{[(u - x)^2 + y^2 + t^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Da das Integral in Beziehung auf ϖ von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 2\pi$ genommen werden muſs, wo π der halbe Umkreis für den Halbmesser Eins ist, so erhält man augenscheinlich dasselbe, wenn man es von $\varpi = -\pi$ bis $\varpi = \pi$ nimmt, welches

ches in dem Fall, wenn a unendlich grofs ist, eben so viel ist, als das Integral in Beziehung auf t, von $t = -\infty$ bis $t = \infty$ nehmen, und alsdann verwandelt es sich in [88])

$$-\frac{2(u-x)}{(u-x)^2+y^2};$$

und man hat folglich, wenn der angezogene Punkt auf der Axe der u ist [89]),

$$-\left(\frac{dV}{du}\right) = 2.\iint\frac{(u-x).dy.dx}{(u-x)^2+y^2} = 4\int dx.\text{Arc.tang.}\left(\frac{\phi(x)}{u-x}\right).$$

Nimmt man an, dafs die erzeugende Figur des Ringes eine Ellipse ist, und stellt man ihre Gleichung, wie folgt, vor

$$\lambda^2.y^2 = k^2 - x^2,$$

so findet man

$$-\left(\frac{dV}{du}\right) = \frac{4\pi.\lambda}{\lambda^2-1}.\left[u - \sqrt{u^2 - k^2.\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)}\right].$$

Der Werth von $-\left(\frac{dV}{du}\right)$ ist für irgend einen angezogenen Punkt nach dem Vorhergehenden

88) Man findet in allen Lehrbüchern der Integralrechnung (z. B. in Lacroix Traité du Calcul différ. et intégr. T. II. la table pag. 40. Formule V.) dafs

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}} = \frac{qx^m(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}+1} - (mq+nq-np)\int x^{m-1}.dx(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}+1}}{an(p-q)}.$$

Vergleicht man hiermit das gegebene Integral $-(u-x).\int dt.[(u-x)^2+y^2+t^2]^{-\frac{3}{2}}$, so findet man es gleich $-\frac{(u-x)..t}{(u-x)^2+y^2}.[(u-x)^2+y^2+t^2]^{-\frac{1}{2}}$. Nimmt man dies Integral innerhalb der Grenzen $t = -t'$ und $t = t'$, so erhält man

$$-\frac{2(u-x).t'}{(u-x)^2+y^2}.[(u-x)^2+y^2+t'^2]^{-\frac{1}{2}} \text{ oder } -\frac{2(u-x)}{(u-x)^2+y^2}.\left[\frac{(u-x)^2+y^2}{t'^2}+1\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzt man $t' = \infty$, so wird $\frac{(u-x)^2+y^2}{t'} = 0$ und die Wurzelgröfse des vorhergehenden Ausdrucks gleich Eins.

89) Es ist $2\iint\frac{(u-x).dy.dx}{(u-x)^2+y^2} = 2\int dx.\int\frac{(u-x).dy}{(u-x)^2+y^2} = 2\int dx..\text{Arc.tang.}\left(\frac{y}{u-x}\right)$.

Setzt man hier $y = -\varphi(x)$ und dann $y = +\varphi(x)$, so ist der Unterschied dieser beiden Werthe gleich $4\int dx.\text{Arc.tang.}\left(\frac{\varphi x}{u-x}\right)$.

$$-f'.(u+z.\sqrt{-1})-f'.(u-z.\sqrt{-1}),$$

wo $f'(u)$ das Differenzial von $f(u)$, durch du dividirt, ist. Setzt man daher diese beiden Werthe von $-\left(\frac{dV}{du}\right)$ für den Fall, wenn $z=0$ ist, einander gleich, so erhält man den Werth von $f'(u)$. Der Werth von $-\left(\frac{dV}{dz}\right)$ ist

$$-\sqrt{-1}.f'.(u+z.\sqrt{-1})+\sqrt{-1}.f'.(u-z.\sqrt{-1}).$$

$-\left(\frac{dV}{du}\right)$ und $-\left(\frac{dV}{dz}\right)$ drücken die Anziehungen des Ringes aus, welche mit den Axen der u und der z parallel und gegen den Mittelpunkt der erzeugenden Figur gerichtet sind; woraus man leicht schlieſsen kann, daſs diese Anziehungen in dem Fall, wenn diese Figur eine Ellipse ist, folgende sind:

$$\frac{2\pi.\lambda}{\lambda^2-1}.\left\{\begin{array}{l} u+z.\sqrt{-1}-\sqrt{(u+z.\sqrt{-1})^2-k^2.\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)} \\ +u-z.\sqrt{-1}-\sqrt{(u-z.\sqrt{-1})^2-k^2.\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)} \end{array}\right\},$$

und

$$\frac{2\pi.\lambda.\sqrt{-1}}{\lambda^2-1}.\left\{\begin{array}{l} u+z.\sqrt{-1}-\sqrt{(u+z.\sqrt{-1})^2-k^2.\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)} \\ -(u-z.\sqrt{-1})+\sqrt{(u-z.\sqrt{-1})^2-k^2.\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)} \end{array}\right\}.$$

Ist der angezogene Punkt auf der Oberfläche des Sphäroids, wo man $u^2+\lambda^2.z^2=k^2$ hat, so verwandeln sie sich in [90])

$$\frac{4\pi.u}{\lambda+1} \text{ und } \frac{4\pi.\lambda z}{\lambda+1}.$$

90) Substituirt man diesen Werth von k^2 in die vorhergehenden Wurzelgröſsen, so findet man

$$\sqrt{(u+z.\sqrt{-1})^2-(u^2+\lambda^2.z^2).\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)}=\frac{u}{\lambda}+\lambda.z.\sqrt{-1}, \text{ und}$$

$$\sqrt{(u-z.\sqrt{-1})^2-(u^2+\lambda^2.z^2).\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\right)}=\frac{u}{\lambda}-\lambda.z.\sqrt{-1}.$$ Die Substitution dieser Werthe giebt dann sogleich die im Text gegebenen Ausdrücke.

45. Wir wollen nun annehmen, dafs der Ring eine flüssige gleichartige Masse und die erzeugende Figur desselben eine Ellipse ist; man nenne a den Abstand des Mittelpunkts dieser Ellipse vom Mittelpunkt Saturns, und nehme an, dafs a in Vergleichung mit den Dimensionen der Ellipse sehr grofs ist. Man gedenke sich ferner, dafs sich der Ring in seiner Ebene um Saturn drehe, und man nenne g die Mittelpunktsfliehkraft, welche aus dieser Umwälzungsbewegung in der Entfernung 1 von der Umdrehungsaxe entsteht. Diese Kraft wird in Beziehung auf das Theilchen des Ringes, dessen Koordinaten u und z sind, gleich $(a+u).g$ seyn, und multiplicirt man sie mit dem Element ihrer Richtung, so wird das Product gleich $(a+u).g.du$ seyn. Die Attraction Saturns auf dasselbe Theilchen ist $\frac{S}{(a+u)^2+z^2}$, wenn S die Masse Saturns ist; multiplicirt man sie in das Element ihrer Richtung, welches gleich $-d.\sqrt{(a+u)^2+z^2}$ ist, so erhält man, wenn man die Quadrate von u und von z vernachlässigt [91]),

$$-\frac{S.du}{a^2}+\frac{2.S.udu}{a^3}-\frac{S.zdz}{a^3}.$$

Multiplicirt man die Attractionen, welche dasselbe Theilchen von Seiten des Ringes erfährt, in die Elemente ihrer Richtungen $-du$ und $-dz$, so erhält man die Producte

$$-\frac{4\pi.udu}{\lambda+1} \text{ und } -\frac{4\pi.\lambda.zdz}{\lambda+1}.$$

Nun ist es eine allgemeine Bedingung des Gleichgewichts, dafs die Summe aller dieser Producte gleich Null seyn mufs; man hat also

$$0=\left(\frac{S}{a^2}-ag\right).du+\left(\frac{4\pi}{\lambda+1}-\frac{2S}{a^3}-g\right).udu+\left(\frac{4\pi.\lambda}{\lambda+1}+\frac{S}{a^3}\right).zdz.$$

Dies ist die Differenzialgleichung der erzeugenden Figur des Ringes. Wir haben aber angenommen, dafs diese Figur eine Ellipse ist, deren Gleichung $u^2+\lambda^2z^2=k^2$ ist, und deren Differenzialgleichung folglich $0=udu+\lambda^2.zdz$

91) Es ist $-\frac{d.\sqrt{(a+u)^2+z^2}}{(a+u)^2+z^2}=\frac{-(a+u).du-z.dz}{[(a+u)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}=[-(a+u)du-zdz]\left(a^{-3}-\frac{3}{2}\frac{2au+u^2+z^2}{a^5}+\ldots\right)$
$=[-(a+u).du-zdz].\left(a^{-3}-\frac{3u}{a^4}\right)=-\frac{du}{a^2}+\frac{2.udu}{a^3}-\frac{zdz}{a^3}.$

ist. Vergleicht man diese Differenzialgleichung mit der vorhergehenden, so erhält man die folgenden zwey [92]:

$$g = \frac{S}{a^3} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{4\pi\lambda}{\lambda+1} + \frac{S}{a^3}}{\frac{4\pi}{\lambda+1} - \frac{3S}{a^3}} = \lambda^2.$$

Die erstere dieser Gleichungen bestimmt die Umdrehungsbewegung des Ringes; die zweyte bestimmt die Elliptizität seiner erzeugenden Figur. Setzt man $e = \frac{S}{4\pi a^3}$, so giebt die zweyte dieser Gleichungen

$$e = \frac{\lambda . (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) . (3\lambda^2 + 1)}.$$

Da e positiv ist, so sieht man, daſs λ gröſser als die Einheit seyn muſs. Die gegen Saturn gekehrte Axe der Ellipse ist gleich $2k$, und sie miſst die Breite des Ringes; die auf ihr senkrechte Axe ist gleich $\frac{2k}{\lambda}$, und sie miſst die Dicke des Ringes; diese Dicke ist also geringer als die Breite.

Man sieht ferner, daſs $e = 0$ ist, wenn $\lambda = 1$ und wenn $\lambda = \infty$ ist; es folgt hieraus, daſs zu demselben Werth von e zwey verschiedene Werthe von λ gehören; man kann aber den gröſsten wählen, welcher einen mehr abgeplatteten Ring giebt. Der Werth von e ist eines Maximums fähig, welches sehr nahe für $\lambda = 2{,}594$ statt hat [93]. In diesem Fall ist $e = 0{,}0543026$, und dies ist also der gröſste Werth, dessen e fähig ist. Bezeichnet man den Halbmesser der Saturnskugel durch R, und seine mittlere Dichte durch ϱ, die des Ringes zur Einheit genommen, so erhält man

$$S = \tfrac{4}{3}\pi . \varrho . R^3,$$

und folglich

92) Der Koeffizient von du nämlich $\frac{S}{a^2} - ag$ ist gleich Null.

93) Der Zähler des Differenzials von $\frac{\lambda . (\lambda - 1)}{(\lambda + 1) . (3\lambda^2 + 1)}$ gleich Null gesetzt giebt $(2\lambda - 1) . (\lambda + 1) . (3\lambda^2 + 1) - (9\lambda^2 + 6\lambda + 1) . (\lambda^2 - \lambda) = 0$, oder $0 = \lambda^4 - 2\lambda^3 - \frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3}$, woraus man den Werth von λ durch die bekannten Methoden findet.

$$e = \frac{\varrho \cdot R^2}{3\, a^2}.$$

Der gröſste Werth, welchen man für ϱ annehmen kann, ist also

$$0,1629078 \cdot \frac{a^3}{R^3}.$$

Es ist sehr schwer, das wahre Verhältniſs von a zu R zu erhalten, wegen der Kleinheit dieser Gröſsen und wegen der Wirkung der Irradiation; man kann daher nicht genau die Grenze von ϱ angeben; setzt man für den innern Ring $\frac{a}{R} = 2$, welches sich wenig von der Wahrheit entfernt, so erhält man ungefähr $\frac{13}{10}$ für diese Grenze.

Die Irradiation muſs die scheinbare Breite der Ringe beträchtlich vermehren, deren wirkliche Breite folglich weit geringer ist: es ist sogar möglich, daſs diese Irradiation in den besten Teleskopen mehrere von einander verschiedene Ringe in einen einzigen vereinigt, so wie die weniger stark vergröſsernden Teleskope uns das Ganze der Saturnsringe wie einen einzigen Ring darstellen; man kann daher nichts sicheres über die Gestalt der Ringe, welche diesen Planeten umgeben, festsetzen. Wir begnügen uns zu bemerken, daſs ihre, in Vergleichung mit ihrer Entfernung von des Planeten Mittelpunkt, geringe Breite und Dicke die Anwendung der vorhergehenden Theorie auf ihre Gestalt genauer macht, so wie auch die Erklärung, welche wir aus den bloſsen Gesetzen des Gleichgewichts hergeleitet haben, auf welche Art sich diese Ringe um Saturn erhalten können.

Man kann leicht die Dauer der Umwälzung jedes Ringes durch die Gröſse a bestimmen, welche der Abstand des Mittelpunkts der erzeugenden Figur vom Mittelpunkt Saturns ist; denn da die aus der Umwälzungsbewegung entstehende Mittelpunktsfliehkraft g gleich $\frac{S}{a^2}$ ist, so ist klar, daſs diese Bewegung eben so groſs ist, als die Bewegung eines Satelliten, welcher in der Entfernung a vom Mittelpunkt Saturns ist. Es folgt hieraus, daſs die Periode dieser Bewegung für den innern Ring ungefähr $0^{tag},44$ ist, welches mit den Beobachtungen übereinstimmt.

46. Die vorhergehende Theorie würde noch dann Statt haben, wenn die erzeugende Ellipse ihre Gröſse und Lage im ganzen Umfang des erzeugenden

Umkreises des Ringes änderte, dessen verschiedene Theile so eine ungleiche Breite erhalten. Man kann ihm sogar eine doppelte Krümmung geben, wofern nur alle diese Aenderungen der Gröſse und der Lage nur dann merklich sind, wenn die Entfernung irgend eines auf der Oberfläche gegebenen Punktes weit gröſser ist, als der Diameter des erzeugenden Durchschnitts, welcher durch diesen Punkt geht. Das Erscheinen und Verschwinden des Saturnsringes giebt diese Ungleichheiten zu erkennen, da die beiden Arme des Ringes verschiedene Erscheinungen gezeigt haben. Ich füge noch hinzu, daſs diese Ungleichheiten nothwendig sind, um den Ring im Gleichgewicht um Saturn zu erhalten; denn wären alle seine Theile einander vollkommen ähnlich, so würde sein Gleichgewicht durch die geringsten Kräfte, z. B. die Anziehung eines Kometen oder eines Satelliten, gestöhrt werden, und der Ring würde sich endlich gegen die Oberfläche Saturns hinabstürzen. Man gedenke sich, um dies zu zeigen, daſs der Ring ein Kreis sey, dessen Halbmesser r und dessen Mittelpunkt vom Mittelpunkt Saturns, welchen man in der Ebene des Rings annimmt, um die Gröſse z entfernt sey, so ist klar, daſs die aus der Anziehung Saturns auf diesen Umkreis entstehende Kraft nach der geraden Linie z, welche die beiden Mittelpunkte vereinigt, gerichtet seyn wird. Nennt man ϖ den Winkel, welchen der Halbmesser r mit der Verlängerung von z macht, so ist

$$-\frac{d}{dz}\cdot\int\frac{S\,.\,d\varpi}{\sqrt{r^2+2rz\,.\,\cos\varpi+z^2}},$$

die mit z parallele Anziehung Saturns auf den Ring, wo das Integral von $\varpi = 0$ bis ϖ gleich dem Umkreis, und wo das Differenzial in Beziehung auf z zu nehmen ist. Man nenne diese Anziehung A; der Mittelpunkt des Ringes wird sich so bewegen, als ob seine ganze, in diesem Punkt vereinigte, Masse von der Kraft A gegen den Mittelpunkt Saturns angezogen würde.

Bezeichnet man durch c die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus die Einheit ist, so hat man

$$\frac{1}{(r^2+2rz.\cos\varpi+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{r\,.\left(1+\frac{z}{r}\cdot c^{\varpi\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(1+\frac{z}{r}\cdot c^{-\varpi\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Es sey

$$\frac{1}{\left(1+\frac{z}{r}\cdot c^{\varpi\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \alpha\cdot\frac{z}{r}\cdot c^{\varpi\sqrt{-1}} + \alpha'\cdot\frac{z^2}{r^2}\cdot c^{2\varpi\sqrt{-1}} + \text{etc.},$$

so hat man

$$\frac{1}{\left(1+\frac{z}{r}\cdot c^{-\varpi\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \alpha\cdot\frac{z}{r}\cdot c^{-\varpi\sqrt{-1}} + \alpha'\cdot\frac{z^2}{r^2}\cdot c^{-2\varpi\sqrt{-1}} + \text{etc.}$$

Multiplicirt man das Product dieser zwey Reihen mit $d\varpi$, und integrirt man dann von $\varpi = 0$ bis ϖ gleich dem Umkreis, welchen wir mit 2π bezeichnen, so erhält man [94])

$$\int\frac{d\varpi}{\sqrt{r^2+2rz.\cos\varpi+z^2}} = \frac{2\pi}{r}\cdot\left(1+\alpha^2.\frac{z^2}{r^2}+\alpha'^2.\frac{z^4}{r^4}+\text{etc.}\right),$$

und hieraus erhält man

94) Man betrachte bloſs das allgemeine nte Glied der beiden gegebenen Reihen; das Product

$\left(1+\alpha^{(n-1)}\frac{z^n}{r^n}c^{n\varpi\sqrt{-1}}\right)\left(1+\alpha^{(n-1)}\cdot\frac{z^n}{r^n}\cdot c^{-n\varpi\sqrt{-1}}\right)$ mit $d\varpi$ multiplicirt, giebt

$\left[1+(\alpha^{(n-1)})^2.\frac{z^{2n}}{r^{2n}}\right]d\varpi + \alpha^{(n-1)}\cdot\frac{z^n}{r^n}\cdot d\varpi\cdot(c^{n\varpi\sqrt{-1}}+c^{-n\varpi\sqrt{-1}})$. Nun ist

$\int d\varpi.c^{n\varpi\sqrt{-1}} = \frac{1}{n.\sqrt{-1}}\int n\sqrt{-1}\,.\,d\varpi\,.\,c^{n\varpi\sqrt{-1}} = \frac{1}{n.\sqrt{-1}}.c^{n\varpi\sqrt{-1}}$, folglich

$\int d\varpi.(c^{n\varpi\sqrt{-1}}+c^{-n\varpi\sqrt{-1}}) = \frac{1}{n.\sqrt{-1}}.(c^{n\varpi\sqrt{-1}}-c^{-n\varpi\sqrt{-1}}) = -\frac{1}{2n}.\sin n\varpi$. Das Integral des vorhergehenden Products ist hiernach

$\left[1+(\alpha^{(n-1)})^2.\frac{z^{2n}}{r^{2n}}\right].\varpi - \frac{\alpha^{(n-1)}}{2n}.\frac{z^n}{r^n}.\sin n\varpi$. Setzt man nun n nach und nach gleich 1, 2, 3, 4 . . . und dividirt man durch r, so erhält man

$$\int\frac{d\varpi}{\sqrt{r^2+2rz.\cos\varpi+z^2}} = \frac{\varpi}{r}\left(1+\alpha^2.\frac{z^2}{r^2}+\alpha'^2.\frac{z^4}{r^4}+\alpha''^2.\frac{z^6}{r^6}\ .\ .\ .\right)$$
$$-\frac{1}{r}.\left(\frac{\alpha}{2}.\frac{z}{r}.\sin\varpi+\frac{\alpha'}{4}.\frac{z^2}{r^2}.\sin 2\varpi+\ .\ .\ .\right).$$

Für $\varpi = 0$ ist dies Integral gleich Null; für $\varpi = 360°$ oder 2π sind $\sin\varpi$, $\sin 2\varpi$ etc. gleich Null; das Integral ist also innerhalb der Grenzen $\varpi = 0$ und $\varpi = 360°$; gleich

$$\frac{2\pi}{r}\cdot\left(1+\alpha^2.\frac{z^2}{r^2}+\alpha'^2.\frac{z^4}{r^4}+\alpha''^2.\frac{z^6}{r^6}\ .\ .\ .\right).$$

$$A = -\frac{4\pi \,.\, S \,.\, z}{r^3} \,.\, \left(\alpha^2 + 2\alpha'^2 \,.\, \frac{z^2}{r^2} + \text{etc.}\right).$$

Diese Gröſse ist für jeden Werth von z negativ; der Mittelpunkt Saturns stöſst also den Mittelpunkt des Ringes ab, und welches auch immer die relative Bewegung des zweyten Mittelpunkts um den erstern ist, so ist doch die durch diese Bewegung beschriebene krumme Linie gegen Saturn convex; der Mittelpunkt des Ringes muſs sich also immer mehr und mehr vom Mittelpunkt des Planeten entfernen, bis sein Umkreis dessen Oberfläche berührt.

Ein Ring, dessen Theile sich sämmtlich vollkommen ähnlich wären, würde aus einer unendlichen Menge Umkreise bestehen, welche dem von uns betrachteten Kreis ähnlich wären; der Mittelpunkt würde dann vom Mittelpunkt Saturns zurückgestoſsen werden, wenn diese beiden Mittelpunkte nur ein wenig aufhörten zusammenzufallen, und dann würde der Ring sich endlich mit Saturn vereinigen.

Die verschiedenen Ringe, welche die Kugel Saturns umgeben, sind folglich irreguläre feste Körper, deren Breite in den verschiedenen Punkten ihrer Umkreise ungleich sind, so daſs ihre Schwerpunkte nicht mit den Mittelpunkten ihrer Figuren zusammenfallen. Man kann diese Schwerpunkte als eben so viel Satelliten ansehen, welche sich um den Mittelpunkt Saturns in Entfernungen bewegen, welche von der Ungleichheit der Theile jedes Ringes abhängen, und welche Satelliten mit ihren respectiven Ringen einerley Umdrehungsgeschwindigkeit haben.

Wir haben bey der Untersuchung ihrer Figuren auf ihre gegenseitige Anziehung nicht Rücksicht genommen; dies setzt voraus, daſs der Zwischenraum, welcher sie trennt, so groſs ist, daſs diese Anziehung keinen merklichen Einfluſs auf ihre Figur haben kann. Man würde jedoch leicht darauf Rücksicht nehmen können, und man kann sich leicht versichern, daſs die erzeugende Figur jedes Ringes noch elliptisch seyn würde, wenn die Ringe sehr abgeplattet wären. Da aber die Sicherheit ihres Gleichgewichts erfordert, daſs ihre Gestalt irregulär ist, und da diese Ringe verschiedene Umdrehungsbewegungen haben und so ohne Aufhören ihre gegenseitige Lage gegen einander ändern, so muſs ihre gegenseitige Wirkung im höchsten Grad veränderlich seyn, und sie muſs daher bey der Untersuchung ihrer bleibenden Figur nicht in Betrachtung kommen.

Sie-

Siebentes Kapitel.

Von der Gestalt der Atmosphären der himmlischen Körper.

47. Ich nenne die Atmosphäre eines Körpers ein dünnes, durchsichtiges, elastisches und zusammendrückbares Flüssige, welches diesen Körper umgiebt, von ihm getragen wird, und auf ihn drückt. Wir gedenken uns um jeden himmlischen Körper eine ähnliche Atmosphäre, deren Daseyn bey allen wahrscheinlich ist, und bey der Sonne, bey der Erde und bey verschiedenen Planeten durch die Beobachtungen angezeigt wird. Das atmosphärische Flüssige wird dünner, so wie es sich über den Körper erhebt, wegen seiner Federkraft, welche es um destomehr ausdehnt, je weniger es zusammengedrückt ist. Wären aber die Theile seiner Oberfläche elastisch, so würde es sich ohne Aufhören ausdehnen und sich endlich im Raum zerstreuen; die Elastizität des atmosphärischen Flüssigen muſs also in einem gröſsern Verhältniſs abnehmen, als das Gewicht, welches es zusammendrückt, und es muſs einen Zustand der Verdünnung geben, wo dies Flüssige ohne Federkraft ist. In diesem Zustand muſs es an der Oberfläche der Atmosphäre seyn.

Alle Lagen der Atmosphäre müssen endlich die Umdrehungsbewegung annehmen, welche der Körper hat, den sie umgeben; denn das Reiben dieser Lagen unter einander und gegen die Oberfläche des Körpers muſs die zu langsamen Bewegungen beschleunigen, und die zu schnellen Bewegungen verzögern, bis eine vollkommene Gleichheit zwischen ihnen Statt findet.

An der Oberfläche der Atmosphäre wird das Flüssige nur durch seine Schwerkraft zurückgehalten, und die Gestalt dieser Oberfläche muſs so beschaffen seyn, daſs die aus der Mittelpunktsfliehkraft und aus der anziehenden Kraft des Körpers zusammengesetzte Kraft auf ihr senkrecht ist; denn es ist wegen der geringen Dichte der Atmosphäre verstattet, die Anziehung ihrer Theilchen zu vernachlässigen. Wir wollen nun diese Figur bestimmen; wir nennen hierzu V die Summe aller Theilchen des von der Atmosphäre bedeckten Sphäroids, jedes durch seinen Abstand von irgend einem Theilchen dM dieser Atmosphäre dividirt. Es sey r die Entfernung dieses Theilchens vom Schwerpunkt des Sphäroids; θ der Winkel, welchen r mit der Umdrehungsaxe des Sphäroids macht; und ϖ der Winkel, welchen die durch diese Axe und durch den Halbmesser r gehende Ebene mit einem auf der Oberfläche des Sphäroids unveränderlichen Mittagskreis macht. Es sey endlich n die Winkelumdrehungsgeschwindigkeit des Sphäroids, so ist die Mittelpunktsfliehkraft des Theilchens dM gleich $n^2 r \,.\, \sin\theta$. Das Element ihrer Richtung ist $d\,.\,(r\,.\,\sin\theta)$ und folglich ist das Integral dieser in das Element ihrer Richtung multiplicirten Kraft gleich $\frac{1}{2}\, n^2 r^2 \,.\, \sin\theta^2$; nennt man daher ϱ die Dichte des Theilchens dM und Π den Druck, welchen es erfährt, so hat man nach Satz 22,

$$\int \frac{d\Pi}{\varrho} = \text{Beständige Gröſse} + V + \tfrac{1}{2}\, n^2 \,.\, r^2 \,.\, \sin\,\theta^2; \qquad (1)$$

wo Π eine Funktion von ϱ ist.

Ist das Sphäroid wenig von einer Kugel verschieden, so ist der Ausdruck von V nach Satz 11 und 31 von folgender Form

$$\frac{m}{r} + \frac{U^{(2)}}{r^3} + \frac{U^{(3)}}{r^4} + \text{etc.},$$

wo m die Masse des Sphäroids und $U^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ, $\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\sin\varpi$ und $\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\cos\varpi$ ist, welche der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thut:

$$0 = \left\{\frac{d\,.\left[(1-\mu^2)\,.\left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 U^{(i)}}{d\mu^2}\right)}{1-\mu^2} + i\,.\,(i+1)\,.\,U^{(i)};$$

wo μ gleich $\cos\theta$ ist. Substituirt man statt V diesen Werth in die Gleichung (1), so erhält man die Gleichung aller Lagen der Atmosphäre von einerley Dichte.

An der äufsern Oberfläche ist $\Pi = 0$; vernachlässigt man die Eccentricität des Sphäroids, und bezeichnet man durch α das Verhältnifs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator und auf der Oberfläche des Sphäroids, dessen Halbmesser wir zur Einheit annehmen, so verwandelt sich die Gleichung (1) in folgende:

$$c = \frac{2}{r} + \alpha r^2 \,.\, \sin\theta^2.$$

Nennt man R den Halbmesser des Pols der Atmosphäre, so hat man $c = \frac{2}{R}$ und folglich

$$\frac{2}{R} = \frac{2}{r} + \alpha r^2 \,.\, \sin\theta^2.$$

Man nenne, um das Verhältnifs der beiden Axen der Atmosphäre zu erhalten, den Halbmesser ihres Aequators R', so giebt die vorhergehende Gleichung

$$\alpha R'^3 = 2 \,.\, \left(\frac{R' - R}{R}\right).$$

Der gröfste Werth, dessen R' fähig ist, ist derjenige, welcher sich bis zu dem Punkt erstreckt, wo die Mittelpunktsfliehkraft der Schwere gleich ist; man hat dann $\frac{1}{R'^2} = \alpha R'$, oder $\alpha R'^3 = 1$ und folglich $\frac{R'}{R} = \frac{3}{2}$. Dies Verhältnifs von R' zu R ist das gröfste mögliche; denn setzt man $\alpha R'^3 = 1 - z$, wo z nothwendig positiv oder gleich Null ist, so erhält man $\frac{R'}{R} = \frac{3 - z}{2}$.

Der gröfste Halbmesser der Atmosphäre ist der des Aequators; denn die Gleichung ihrer Oberfläche giebt, wenn man sie differenziirt,

$$dr = \frac{\alpha r^4 \,.\, d\theta \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta}{1 - \alpha r^3 \,.\, \sin\theta^2}.$$

Der Nenner dieses Bruchs ist beständig positiv; denn die nach dem Halbmesser r zerlegte Mittelpunktsfliehkraft ist gleich $\alpha m r \,.\, \sin\theta^2$, und sie mufs kleiner als die Schwere seyn, welche gleich $\frac{m}{r^2}$ ist; r wächst also mit θ vom Pol bis zum Aequator.

Man gebe der Gleichung für die Oberfläche der Atmosphäre folgende Form:

$$r^3 - \frac{2r}{\alpha R \,.\, \sin\theta^2} + \frac{2}{\alpha \,.\, \sin\theta^2} = 0.$$

Die Werthe von r, welche der Aufgabe angemessen sind, müssen positiv und so beschaffen seyn, daſs $1 - \alpha r^3 . \sin \theta^2$ gröſser als Null ist. Nun giebt es aber nur eine Wurzel dieser Art. Man nenne nämlich p, p', p'' die drey durch die vorhergehende Gleichung gegebenen Werthe von r, und man nehme an, daſs p und p' positiv und kleiner als $\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha . \sin \theta^2}}$ sind. Da nun in der Gleichung für r das zweyte Glied fehlt, so ist $p'' = -p - p'$; p'' würde negativ und kleiner als $\frac{2}{\sqrt[3]{\alpha . \sin \theta^2}}$, und das Product $-p . p' . p''$ folglich kleiner als $\frac{2}{\alpha . \sin \theta^2}$ seyn. Dieses Product muſs aber vermöge der Natur der Gleichungen dieser Gröſse gleich seyn; die vorhergehende Annahme ist also unmöglich, und die Gleichung für r hat nur eine Wurzel, welche der Aufgabe Genüge thut; das heiſst, die Atmosphäre hat nur eine mögliche Gestalt des Gleichgewichts.

Wendet man diese Resultate auf die Sonnenatmosphäre an, so sieht man erstlich, daſs sie sich nur bis zur Bahn eines Planeten erstrecken kann, dessen Umdrehung in eben der Zeit, wie die Umwälzung der Sonne, d. h. in 25 Tagen geschähe; sie kann also bey weitem nicht die Bahnen Merkurs und der Venus erreichen, und man weiſs, daſs das Thierkreislicht sich noch weiter erstreckt. Man sieht zweytens, daſs das Verhältniſs der kleinen Axe der Atmosphäre zur groſsen Axe nicht kleiner als $\frac{2}{3}$ seyn kann; das Thierkreislicht erscheint uns aber unter der Gestalt einer sehr abgeplatteten Linse, deren Schneide in der Ebene des Sonnenäquators ist. Das Flüssige, welches uns das Thierkreislicht zurückwirft, ist daher nicht die Sonnenatmosphäre, und da es dieses Gestirn umgiebt, so muſs es sich nach denselben Gesetzen um dasselbe bewegen, welche die Planeten befolgen; dies ist vielleicht die Ursache, warum es nur einen unmerklichen Widerstand in ihren Bewegungen verursacht.

Viertes Buch.

Von den Schwankungen des Meeres und der Atmosphäre.

Die Wirkung der Sonne und des Monds auf das Meer und die Atmosphäre erregt in diesen beiden flüssigen Massen Schwankungen, deren Gesetz zu bestimmen interessant ist. Die Schwankungen des Meeres sind unter dem Namen der Ebbe und Fluth bekannt; sie sind in unsern Häfen sehr merklich. Die Schwankungen der Atmosphäre sind an sich selbst wenig beträchtlich, und ihre Beobachtung wird noch dadurch sehr schwer, daſs sie sich mit den unregelmäſsigen Winden vermischen, welche die Atmosphäre beständig bewegen. Wir werden in diesem Buch diese verschiedenen Bewegungen betrachten.

Erstes Kapitel.

Theorie der Ebbe und Fluth des Meeres.

1. Wir wollen die allgemeinen Gleichungen der Bewegung des Meeres wieder vornehmen, welche wir im letzten Kapitel des ersten Buchs gegeben haben. Man nehme die halbe kleine Axe der Erde zur Einheit an, und bezeichne die Tiefe des Meeres durch γ, von welcher man annimmt, daſs sie in Vergleichung mit dieser halben Axe sehr klein ist; γ ist eine Funktion von θ

und ϖ; θ ist die Ergänzung der Breite eines Theilchens dm der Oberfläche des Meeres im Zustande des Gleichgewichts, welchen sie ohne die Wirkung der Sonne und des Monds annehmen würde, und ϖ die Länge des Theilchens in diesem Zustand, welche Länge von einem auf der Erde unveränderlichen Meridian gezählt wird. Es sey αy die Erhöhung, welche das Theilchen dm im Zustand der Bewegung über diese Fläche des Gleichgewichts erhält, und man nehme an, daſs θ sich in diesem Zustand in $\theta + \alpha u$ und ϖ in $\varpi + \alpha v$ verwandelt; es sey endlich nt die mittlere Umdrehungsbewegung der Erde, und g die Schwere, so hat man nach dem 36sten Satz des ersten Buchs die folgenden zwey Gleichungen:

$$y = -\left(\frac{d\ \gamma u}{d\theta}\right) - \left(\frac{d\,.\gamma v}{d\varpi}\right) - \frac{\gamma u\,.\cos\theta}{\sin\theta}; \quad (1)$$

$$d\theta\,.\left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n.\left(\frac{dv}{dt}\right).\sin\theta.\cos\theta\right] + d\varpi.\left[\sin\theta^2\,.\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n.\left(\frac{du}{dt}\right).\sin\theta.\cos\theta\right]$$
$$= -g\,.\,dy + dV'; \quad (2)$$

wo die Differenziale dy und dV' bloſs in Rücksicht auf die zwey veränderlichen Gröſsen θ und ϖ genommen werden müssen. Wir haben im 35sten Satz des ersten Buches gesehen, daſs $\alpha dV'$, wenn man nur die Differenziale $d\theta$ und $d\varpi$ behält, die Summe der Producte ausdrückt, welche man erhält, wenn man jede Kraft, welche den Zustand des Gleichgewichts des Theilchens dm stöhret, in das Element ihrer Richtung multiplicirt. Diese Kräfte sind erstlich die Wirkung der Sonne und des Monds; man erhält den Theil von $\alpha dV'$, welcher aus dieser Wirkung entspringt, wenn man die Summe der Maſsen der Sonne und des Monds, respective durch ihre Abstände vom Theilchen dm dividirt, und diese Quotienten in Beziehung auf die veränderlichen Gröſsen θ und ϖ differenziirt. Nennt man nun r den Abstand eines Gestirns L vom Mittelpunkt der Erde, v seine Declination, und ψ seine gerade Aufsteigung, so ist seine Entfernung vom Theilchen dm, nach dem 23sten Satz des dritten Buches, sehr nahe gleich

$$\sqrt{r^2 - 2r.[\cos\theta\,.\sin v + \sin\theta\,.\cos v\,.\cos(nt + \varpi - \psi)] + 1},$$

wo der Winkel $nt + \varpi$, so wie der Winkel ψ, vom Frühlingsnachtgleichepunkt gezählt wird. Man muſs also die Funktion

$$\frac{L}{\sqrt{r^2 - 2r.[\cos\theta\,.\sin v + \sin\theta\,.\cos v\,.\cos(nt + \varpi - \psi)] + 1}}$$

in Beziehung auf θ und ϖ differenziiren, um den Theil von $\alpha \mathrm{d} V'$ zu erhalten, welcher aus der Wirkung des Gestirns L entsteht. Da man aber annimmt, daſs der Schwerpunkt der Erde unbeweglich ist, so muſs man dem Theilchen dm die Kraft, welche L auf diesen Schwerpunkt ausübt, in entgegengesetzter Richtung beylegen, und man hat im 23sten Satz des dritten Buches gesehen, daſs man dies dadurch erhält, daſs man von der vorhergehenden Funktion die folgende abzieht:

$$\frac{L}{r} + \frac{L}{r^2} \,.\, [\cos\theta \,.\, \sin v + \sin\theta \,.\, \cos v \,.\, \cos(nt + \varpi - \psi)].$$

Man erhält also den Theil von $\alpha \mathrm{d} V'$, welcher von der Wirkung von L abhängt, wenn man den Unterschied dieser beiden Funktionen in Beziehung auf θ und auf ϖ differenziirt. Man kann aber nach dem angeführten Satz des dritten Buches diesen Unterschied, in eine nach den Potenzen von r fallende Reihe entwickeln, welche so beschaffen ist, daſs, wenn man sie durch

$$\frac{\alpha Z^{(0)}}{r^3} + \frac{\alpha Z^{(2)}}{r^3} + \frac{\alpha Z^{(3)}}{r^4} + \frac{\alpha Z^{(4)}}{r^5} + \text{etc.}$$

bezeichnet, $Z^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ, $\sqrt{1-\mu^2} \,.\, \sin\varpi$, und $\sqrt{1-\mu^2} \,.\, \cos\varpi$ vom Grade i ist, und der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thut:

$$o = \left\{ \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dZ^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 Z^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).Z^{(i)},$$

wo μ gleich $\cos\theta$ ist.

Die Gröſse $\alpha \mathrm{d} V'$ besteht ferner aus der Anziehung, welche die Wasserlage, deren innerer Halbmesser gleich Eins, und deren äuſserer Halbmesser gleich $1 + \alpha y$ ist, auf das Theilchen dm ausübt, und man sieht leicht, daſs man, um sie zu bestimmen, jedes Theilchen der Lage durch seinen Abstand vom Theilchen dm dividiren, und die Summe dieser Quotienten in Beziehung auf θ und ϖ differenziiren muſs. Man muſs überdies die Wirkung dieser Lage auf den Schwerpunkt der Erde in entgegengesetzter Richtung an das Theilchen dm anbringen; es ist aber sichtbar, daſs diese Wirkung vernachlässigt werden muſs, weil sich der Schwerpunkt durch die Anziehung und durch den Druck der verschiedenen Theile der Erde nicht ändert.

2. Wir wollen zuerst den Fall betrachten, wenn die Erde keine Umdrehungsbewegung hätte, und wo man folglich $n = 0$ hat; man nehme ferner an, daſs die Erde eine Kugel, und daſs die Tiefe des Meeres γ eine beständige Gröſse l ist; und wir wollen die Schwankungen betrachten, welche die Wirkung der Sonne und des Mondes im Meer erregen muſs. Die Gleichung (1) des vorhergehenden Satzes verwandelt sich, wenn man in ihr $\cos\theta = \mu$ und $\gamma = l$ setzt, in folgende [95]):

$$\frac{y}{l} = \left(\frac{d.(u.\sqrt{1-\mu^2})}{d\mu}\right) - \left(\frac{dv}{d\varpi}\right).$$

Die Gleichung (2) verwandelt sich in folgende:

$$d\theta.\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) + d\varpi.(1-\mu^2).\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) = -g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right).\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right).d\theta - g.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right).d\varpi$$
$$+\left(\frac{dV'}{d\mu}\right).\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right).d\theta + \left(\frac{dV'}{d\varpi}\right).d\varpi.$$

Man hat aber $\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right) = -\sqrt{1-\mu^2}$; man erhält also, wenn man die Koeffizienten von $d\theta$ und $d\varpi$ unter einander vergleicht,

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2} - \left(\frac{dV'}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2};$$

$$\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) = -\frac{g.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2} + \frac{\left(\frac{dV'}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2};$$

folglich

$$\left\{\frac{d.\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right).\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right\} = g.\left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dy}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} - \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dV'}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\};$$

d.

95) Es ist $\frac{y}{l} = -\left(\frac{du}{d\theta}\right) - \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) - \frac{u.\cos\theta}{\sin\theta}$; nun ist aber $\left(\frac{du}{d\theta}\right) = \sin\theta.\left(\frac{du}{d\theta.\sin\theta}\right)$ $= -\sin\theta.\left(\frac{du}{d\mu}\right)$ und $\frac{u.\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{u.d\theta.\cos\theta}{d\theta.\sin\theta} = -\frac{u.d.\sin\theta}{d\mu}$; folglich $-\left(\frac{du}{d\theta}\right) - \frac{u.\cos\theta}{\sin\theta} = +\sin\theta.\left(\frac{du}{d\mu}\right) + \frac{u.d.\sin\theta}{d\mu} = \left(\frac{d.u.\sin\theta}{d\mu}\right) = \left(\frac{d.u.\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right).$

$$\left\{\frac{d.\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right)}{d\varpi}\right\} = -g.\frac{\left(\frac{d^2 y}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + \frac{\left(\frac{d^2 V'}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2}.$$

Der vorhergehende Ausdruck von $\frac{y}{l}$ giebt

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = l.\left\{\frac{d.\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right).\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right\} - l.\left\{\frac{d.\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right)}{d\varpi}\right\};$$

man hat also

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = lg.\left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dy}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{lg.\left(\frac{d^2 y}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2}$$
$$- l.\left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dV'}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} - \frac{l.\left(\frac{d^2 V'}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2}. \quad (3)$$

Wir setzen, um diese Gleichung zu integriren,

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \text{etc.};$$

wo $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ etc. rationale und ganze Funktionen von μ, $\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi$ und $\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi$, und so beschaffen sind, daſs man im Allgemeinen

$$0 = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2 Y^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).Y^{(i)}$$

hat. Nimmt man die Dichte des Meeres zur Einheit der Dichten an, so ist der Theil von V', welcher sich auf die sphärische Lage des Flüssigen bezieht, deren innerer Halbmesser die Einheit, und deren äuſserer Halbmesser $1 + \alpha y$ ist, nach dem 14ten Satz des dritten Buches gleich

$$4\pi.\left[Y^{(0)} + \tfrac{1}{3}Y^{(1)} + \tfrac{1}{5}Y^{(2)} + \tfrac{1}{7}Y^{(3)} + \text{etc.}\right],$$

wo π das Verhältniſs des halben Umkreises zum Halbmesser ist. Man nenne ϱ die mittlere Dichte der ganzen Erde, so hat man $g = \frac{4}{3}\pi\varrho$, und folglich $4\pi = \frac{3g}{\varrho}$.

Es folgt aus dem vorhergehenden Satze, daſs der Theil von $\alpha V'$, welcher aus der Wirkung der Sonne und des Mondes, und im Allgemeinen aus

der Wirkung irgend einer Anzahl anziehender Gestirne entspringt, in eine Reihe von folgender Form entwickelt werden kann:

$$\alpha . U^{(0)} + \alpha . U^{(2)} + \alpha . U^{(3)} + \alpha . U^{(4)} + \text{etc.};$$

wo $U^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ, $\sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi$ und $\sqrt{1-\mu^2} . \cos\varpi$, und zwar von der Ordnung i ist, und welche der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thut:

$$0 = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2U^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).U^{(i)}.$$

Dieses vorausgesetzt, substituire man in die Gleichung (3) statt y und V' diese Werthe, so giebt die Vergleichung der ähnlichen Funktionen von $U^{(i)}$ und $Y^{(i)}$

$$\left(\frac{d^2Y^{(i)}}{dt^2}\right) + \frac{i.(i+1).lg}{(2i+1).\varrho} . [(2i+1).\varrho - 3] . Y^{(i)} = i.(i+1).l.U^{(i)}.$$

Man setze der Kürze wegen

$$\frac{i.(i+1).lg}{(2i+1).\varrho} . [(2i+1).\varrho - 3] = \lambda_i^2,$$

so giebt die vorhergehende Differenzialgleichung, wenn man sie integrirt,

$$\begin{aligned} Y^{(i)} = {} & l.M^{(i)} . \sin\lambda_i t + l.N^{(i)} . \cos\lambda_i t \\ & + \frac{i.(i+1)}{\lambda_i} . l.\sin\lambda_i t . \int U^{(i)} . dt . \cos\lambda_i t \\ & - \frac{i.(i+1)}{\lambda_i} . l.\cos\lambda_i t . \int U^{(i)} . dt . \sin\lambda_i t; \end{aligned}$$

wo $M^{(i)}$ und $N^{(i)}$ rationale und ganze Funktionen von μ, $\sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi$ und $\sqrt{1-\mu^2} . \cos\varpi$ sind, welche den folgenden partiellen Differenzialgleichungen Genüge thun müssen:

$$0 = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dM^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2M^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).M^{(i)};$$

$$0 = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dN^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2N^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).N^{(i)}.$$

Setzt man $i = 0$, so giebt die Differenzialgleichung für $Y^{(i)}$, $\left(\frac{d^2Y^{(0)}}{dt^2}\right) = 0$,

und folglich

$$Y^{(0)} = l \,.\, M^{(0)} \,.\, t + l \,.\, N^{(0)};$$

die Gleichung

$$y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \text{etc.}$$

wird also folgende geben:

$$\begin{aligned} y = l \,.\, M^{(0)} \,.\, t + l \,.\, N^{(0)} & + l \,.\, M^{(1)} \,.\, \sin \lambda_1 t + l \,.\, N^{(1)} \,.\, \cos \lambda_1 t \\ & + l \,.\, M^{(2)} \,.\, \sin \lambda_2 t + l \,.\, N^{(2)} \,.\, \cos \lambda_2 t \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + l \,.\, M^{(i)} \,.\, \sin \lambda_i t + l \,.\, N^{(i)} \,.\, \cos \lambda_i t \\ & + \text{etc.} \\ & + \frac{6\,l}{\lambda_2} \,.\, \sin \lambda_2 t \,.\, \int U^{(2)} \,.\, dt \,.\, \cos \lambda_2 t \\ & - \frac{6\,l}{\lambda_2} \,.\, \cos \lambda_2 t \,.\, \int U^{(2)} \,.\, dt \,.\, \sin \lambda_2 t \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \frac{i.(i+1).l}{\lambda_i} \,.\, \sin \lambda_i t \,.\, \int U^{(i)} \,.\, dt \,.\, \cos \lambda_i t \\ & - \frac{i.(i+1).l}{\lambda_i} \,.\, \cos \lambda_i t \,.\, \int U^{(i)} \,.\, dt \,.\, \sin \lambda_i t \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Man wird die Funktionen $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ etc. durch die ursprüngliche Gestalt des Flüssigen bestimmen, und die Funktionen $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ etc. vermittelst seiner ursprünglichen Anfangs - Geschwindigkeit. Der vorhergehende Ausdruck von y umfaſst daher alle Figuren und alle Geschwindigkeiten, deren das Flüssige fähig ist; sie hat also alle Allgemeinheit, welche man wünschen kann.

Wäre die Gröſse $M^{(0)}$ nicht beständig, so würde der Werth von y ohne Aufhören zunehmen, und das Gleichgewicht würde dann nicht sicher seyn, welches auch immer das Verhältniſs der Dichte des Flüssigen zur Dichte der Kugel, welche es bedeckt, seyn mag. Man kann sich aber leicht versichern, daſs die Gröſsen $M^{(0)}$ und $N^{(0)}$ schon dadurch gleich Null sind, daſs die flüssige Masse beständig ist. Diese Bedingung giebt $\int y \,.\, d\mu \,.\, d\varpi = 0$, wo das Integral von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$ und von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 2\pi$ genommen werden muſs; man hat aber im Allgemeinen durch den 12ten Satz des dritten Buches

$$\int Y^{(i)} \,.\, U^{(i')} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi = 0,$$

wenn i und i' verschiedene Zahlen sind; man erhält also

$$\int y\, d\mu \,.\, d\varpi = 4\pi\, Y^{(0)} = 4\pi\, [M^{(0)}.t + N^{(0)}],$$

und ſolglich, wenn man diese Gröſse gleich Null setzt, $M^{(0)} = 0$ und $N^{(0)} = 0$.

Es folgt hieraus, daſs die Sicherheit des Gleichgewichts des Flüssigen vom Zeichen der Gröſsen λ_1^2, λ_2^2 etc. abhängt; denn wenn eine dieser Gröſsen z. B. λ_i^2 negativ ist, so verwandeln sich der Sinus und Kosinus des Winkels $\lambda_i t$ in Exponentialgröſsen und in Kreisbogen, wenn $\lambda_i^2 = 0$ ist. In diesen zwey Fällen ist der Werth von y nicht mehr periodisch, welche Bedingung zur Sicherheit des Gleichgewichts nöthig ist. Da λ_i^2 gleich $\frac{i.(i+1)}{(2i+1).\varrho} \,.\, [(2i+1).\varrho - 3]$ ist, so kann diese Gröſse nur dann positiv seyn, wenn $\varrho > \frac{3}{2i+1}$ ist, wo i eine ganze positive Zahl und gröſser als die Einheit ist. Die Sicherheit des Gleichgewichts erfordert also, daſs diese Bedingung für alle Werthe von i erfüllt wird, und dies kann nur dann Statt finden, wenn man ϱ gröſser als 1 hat, das heiſst, die Dichte des Kerns muſs die Dichte des Flüssigen übertreffen. Dies ist also die allgemeine Bedingung der Sicherheit des Gleichgewichts; ist sie erfüllt, so ist das Gleichgewicht sicher, was auch immer die ursprüngliche Erschütterung seyn mag; ist sie es aber nicht, so hängt die Sicherheit des Gleichgewichts von der Natur dieser Erschütterung ab.

Ist z. B. die ursprüngliche Erschütterung so beschaffen, daſs der Schwerpunkt des Flüssigen mit dem Schwerpunkt des von ihm bedeckten Kerns im ersten Augenblick zusammenfällt, und daſs er keine Bewegung in Rücksicht auf den letztern hat, so werden $Y^{(1)}$ und $\left(\frac{dY^{(1)}}{dt}\right)$ im ersten Augenblick gleich Null seyn, weil dies Zusammenfallen nur vom Werth von $Y^{(1)}$ abhängt, wie man im 31sten Satz des dritten Buches gesehen hat; dieser Werth wird daher in allen Augenblicken gleich Null seyn, und der Schwerpunkt des Flüssigen wird immer mit dem Schwerpunkt des Kerns zusammenfallen. Die Sicherheit des Gleichgewichts hängt in diesem Fall vom Zeichen der Gröſse λ_2^2 ab, und diese Gröſse wird positiv seyn, wenn $\varrho > \frac{3}{5}$ ist.

Der Werth von y giebt unmittelbar die Werthe von u und von v; denn die Gleichung

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = g . \left(\frac{dy}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2} - \left(\frac{dV}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2},$$

giebt

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = \Sigma . \sqrt{1-\mu^2} . \left[g . \left(1 - \frac{3}{(2i+1).\varrho}\right) . \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right) - \left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu}\right)\right],$$

wo das Zeichen der endlichen Integrale Σ sich auf alle ganze positive Werthe von i erstreckt, den Werth $i = 0$, mit eingeschlossen; man hat aber nach dem Vorhergehenden

$$g . \left(1 - \frac{3}{(2i+1).\varrho}\right) . Y^{(i)} - U^{(i)} = - \frac{1}{i.(i+1).l} . \left(\frac{d^2Y^{(i)}}{dt^2}\right),$$

folglich

$$\frac{d^2u}{dt^2} = - \Sigma . \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{i.(i+1).l} . \left\{\frac{d . \left(\frac{d^2Y^{(i)}}{dt^2}\right)}{d\mu}\right\}.$$

Hieraus erhält man

$$u = G + H . t - \Sigma . \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{i.(i+1).l} . \left(\frac{dY^{(i)}}{d\mu}\right);$$

wo G und H willkührliche Funktionen von μ und von ϖ sind. Man findet auf dieselbe Art

$$v = K + L . t + \Sigma . \frac{1}{i.(i+1).l.(1-\mu^2)} . \left(\frac{dY^{(i)}}{d\varpi}\right),$$

wo K und L Funktionen von μ und ϖ sind, welche von den Funktionen G und H abhängen. Setzt man nämlich in der Gleichung

$$y = l . \left(\frac{d . u\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - l . \left(\frac{dv}{d\varpi}\right),$$

statt y, u und v ihre vorhergehenden Werthe, so erhält man, wenn man die Glieder, welche in t multiplicirt sind, und diejenigen, welche davon unabhängig sind, einzeln unter einander vergleicht:

$$0 = \left(\frac{d . G\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{dK}{d\varpi}\right);$$

$$0 = \left(\frac{d . H\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{dL}{d\varpi}\right),$$

so daſs die Oberfläche des Flüssigen vermöge der Werthe $u = G + H . t$,

$v = K + L \,.\, t$ beständig sphärisch bleiben wird. Man gedenke sich, um sich die Bewegungen des Flüssigen in dieser Hypothese vorzustellen, daſs es eine sehr kleine Umdrehungsbewegung von der Ordnung α um die Axe des Sphäroids hat, so wird die sphärische Gestalt des Flüssigen dadurch nur um eine sehr kleine Gröſse von der zweyten Ordnung geändert werden, weil die Mittelpunktsfliehkraft nur von der Ordnung α^2 seyn wird. Man wird in diesem Fall $u = 0$ und $v = q \,.\, t \,.\, \sqrt{1 - \mu^2}$ haben, wo q ein von μ und von ϖ unabhängiger Koeffizient ist; man kann sich aber vorstellen, daſs das Flüssige sich um irgend eine andere Axe dreht, und da noch überdies diese Bewegungen, der Annahme gemäſs, sehr klein sind, so wird das Flüssige, welches irgend eine Anzahl ähnlicher Bewegungen hat, beständig die sphärische Gestalt bis auf die Gröſsen der zweyten Ordnung behalten. Diese Gröſsen sind sämmtlich in den Formeln

$$u = G + H \,.\, t; \qquad v = K + L \,.\, t$$

begriffen, wo G, H, K, L Funktionen von μ und von ϖ sind, welche unter einander die vorher gegebenen Verhältnisse haben. Diese Bewegungen schaden der Sicherheit des Gleichgewichts nicht; sie müssen sich übrigens bald durch die Reibungen und Widerstände aller Art, welche das Flüssige erfährt, vernichten.

3. Wir wollen nun den Fall der Natur betrachten, wo das vom Meer bedeckte Sphäroid eine Umdrehungsbewegung hat. Die Gleichung (1) des ersten Satzes verwandelt sich in folgende:

$$y = \left(\frac{d \,.\, \gamma u \sqrt{1 - \mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{d \,.\, \gamma v}{d\varpi}\right). \quad \text{(A)}$$

Die Gleichung (2) desselben Satzes giebt die zwey folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n \,.\, \left(\frac{dv}{dt}\right) \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1-\mu^2} = g \,.\, \left(\frac{dy}{d\mu}\right) \,.\, \sqrt{1-\mu^2} - \left(\frac{dV'}{d\mu}\right) \,.\, \sqrt{1-\mu^2}, \\
&\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n \,.\, \left(\frac{du}{dt}\right) \,.\, \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = -\frac{g \,.\, \left(\frac{dy}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2} + \frac{\left(\frac{dV'}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}$$

Die allgemeine Integration dieser Gleichungen bietet groſse Schwierigkeiten dar: wir schränken uns hier auf einen Fall ein, welcher sich sehr weit erstreckt, nämlich auf denjenigen, wenn γ eine Funktion von μ ohne ϖ ist, und wir setzen

$$y = a \cdot \cos(it + s\varpi + \varepsilon);$$
$$u = b \cdot \cos(it + s\varpi + \varepsilon);$$
$$v = c \cdot \sin(it + s\varpi + \varepsilon);$$
$$y - \frac{V'}{g} = a' \cdot \cos(it + s\varpi + \varepsilon);$$

wo a, b, c, a' rationale Funktionen von μ und $\sqrt{1-\mu^2}$ sind, und wo s eine ganze Zahl ist. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (A) und (B), so erhält man

$$a = \left(\frac{d.(\gamma b . \sqrt{1-\mu^2})}{d\mu}\right) - s\gamma c;$$

$$i^2 b + 2nic\mu . \sqrt{1-\mu^2} = -g . \left(\frac{da'}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2};$$

$$i^2 c + \frac{2nib\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = -\frac{gsa'}{1-\mu^2}.$$

Die beiden letztern Gleichungen geben

$$b = -\frac{g . \left(\frac{da'}{d\mu}\right) . (1-\mu^2) + \frac{2ngs}{i} . \mu a'}{(i^2 - 4n^2\mu^2) . \sqrt{1-\mu^2}};$$

$$c = \frac{\frac{2ng}{i} . \left(\frac{da'}{d\mu}\right) . \mu . (1-\mu^2) - gsa'}{(i^2 - 4n^2\mu^2) . (1-\mu^2)}.$$

Substituirt man diese Werthe von b und von c in die erste Gleichung, und setzt man der Kürze wegen

$$z = \frac{\gamma}{i^2 - 4n^2\mu^2},$$

so erhält man

$$a = g . \left\{\frac{d . \left[z . \left[\frac{2ns}{i} . \mu a' - \left(\frac{da'}{d\mu}\right) . (1-\mu^2)\right]\right]}{d\mu}\right\}$$
$$+ \frac{2ngs . \mu z}{i . (1-\mu^2)} . \left[\frac{2ns}{i} . \mu a' - \left(\frac{da'}{d\mu}\right) . (1-\mu^2)\right] + \frac{s^2 gza' . (i^2 - 4n^2\mu^2)}{i^2 . (1-\mu^2)}. \quad (4)$$

Wir bemerken hier, daſs der zweyte Theil dieser Gleichung die Funktion

$i^2 - 4n^2\mu^2$ in seinem Nenner nicht enthalten wird, wenn die Gröſse $\frac{2ns}{i}.\mu a' - \left(\frac{da'}{d\mu}\right).(1-\mu^2)$ durch $i^2 - 4n^2\mu^2$ theilbar ist.

Die Gleichung (4) enthält das, was wir im vorhergehenden Satz für den Fall, wenn $n = 0$ und γ einer beständigen Gröſse l gleich ist, bewiesen haben; denn z ist dann gleich $\frac{l}{i^2}$, und dadurch verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$i^2 a = lg.\left\{-\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{da'}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} + \frac{s^2 a'}{1-\mu^2}\right\}. \quad (5)$$

Man nehme an, daſs $a.\cos(it + s\varpi)$, statt $Y^{(f)}$ gesetzt, der partiellen Differenzialgleichung

$$0 = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(f)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2Y^{(f)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + f.(f+1).Y^{(f)}$$

Genüge thut, so wird der Theil von $a'.\cos(it + s\varpi)$, welcher aus der Anziehung einer Wasserlage entspringt, deren innerer Halbmesser 1 und deren äuſserer Halbmesser $1 + \alpha y$ ist, nach dem vorhergehenden Satz gleich $-\frac{4\pi}{(2f+1).g}.a.\cos(it + s\varpi)$, oder gleich $-\frac{3a}{(2f+1).\varrho}.\cos(it + s\varpi)$ seyn, weil $g = \frac{4}{3}\pi.\varrho$ ist. Setzt man daher den Theil von a', welcher aus der Wirkung der Gestirne entspringt, gleich Null, so findet man

$$a' = \left(1 - \frac{3}{(2f+1).\varrho}\right).a.$$

Nun giebt aber die partielle Differenzialgleichung für $Y^{(f)}$ folgende:

$$0 = \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{da'}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} - \frac{s^2 a'}{1-\mu^2} + f.(f+1).a';$$

die Gleichung (5) giebt folglich

$$i^2 = f.(f+1).lg.\left(1 - \frac{3}{(2f+1).\varrho}\right).$$

Da die Zahlen s und f willkührlich sind, so ist klar, daſs man den Theil von y, welcher von der Wirkung der Gestirne unabhängig ist, erhält, wenn man alle

Wer-

Werthe von $a \cdot \cos(it + s\varpi)$ vereinigt, welche den verschiedenen Werthen, die man diesen Zahlen geben kann, entsprechen.

Man bezeichne nun, um den Theil von y zu erhalten, welcher von der Wirkung der Gestirne abhängt, ein Glied des Theils des Ausdrucks von V', welches sich auf diese Wirkung bezieht, durch $e \cdot \cos(it + s\varpi)$; dies Glied sey so beschaffen, daſs es statt $Y^{(f)}$ gesetzt der vorhergehenden partiellen Differenzialgleichung für $Y^{(f)}$ Genüge thut; so hat man

$$a' = a \cdot \left(1 - \frac{3}{(2f+1) \cdot \varrho}\right) - \frac{e}{g}.$$

Die Gleichung (5) giebt dann

$$i^2 \cdot a = lg \cdot f \cdot (f+1) \cdot \left(1 - \frac{3}{(2f+1) \cdot \varrho}\right) \cdot a - f \cdot (f+1) \cdot le,$$

und folglich

$$a = \frac{f \cdot (f+1) \cdot le}{f \cdot (f+1) \cdot \left(1 - \frac{3}{(2f+1) \cdot \varrho}\right) - i^2};$$

man erhält so den Theil von y, welcher von der Wirkung der Gestirne abhängt, und man sieht leicht, daſs diese Resultate mit denen des vorhergehenden Satzes übereinstimmen.

4. Die Integration der Gleichung (4) übersteigt im allgemeinen Fall, wo n nicht gleich Null ist, und wo das Meer eine veränderliche Tiefe hat, die Kräfte der Analysis; ihre allgemeine Integration ist aber zur Bestimmung der Schwankungen des Meeres nicht nöthig; es ist hinreichend, wenn man ihr bloſs Genüge thut. Denn es ist klar, daſs der Theil der Schwankungen, welcher vom ursprünglichen Zustand des Meeres abhängt, sehr bald durch Widerstände aller Art, welche das Wasser des Meeres in seinen Bewegungen erfährt, hat verschwinden müssen, so daſs das Meer ohne die Wirkung der Sonne und des Mondes schon längst zu einem bleibenden Zustand des Gleichgewichts gelangt seyn würde: die Wirkung dieser beiden Gestirne entfernt es ohne Aufhören von diesem Zustand, und uns genügt es die daraus entstehenden Schwankungen zu kennen.

Ist r die Entfernung eines Gestirns L vom Mittelpunkt der Erde, so ist nach Satz 1 der Theil von $\alpha V'$, welcher sich auf ein flüssiges Theilchen be-

zieht, wenn man ihn nach den Potenzen von $\frac{1}{r}$ entwickelt und die vierten Potenzen vernachlässigt, gleich

$$\frac{3L}{2r^3}\cdot\left[[\cos\theta\,.\,\sin\nu + \sin\theta\,.\,\cos\nu\,.\,\cos(nt+\varpi-\psi)]^2 - \tfrac{1}{3}\right],$$

oder [96])

$$\frac{L}{4r^3}\,.\,[\sin\nu^2 - \tfrac{1}{2}\cos\nu^2]\,.\,[1+3\cos 2\theta]$$

$$+\frac{3L}{r^3}\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\theta\,.\,\sin\nu\,.\,\cos\nu\,.\,\cos(nt+\varpi-\psi)$$

$$+\frac{3L}{4r^3}\,.\,\sin\theta^2\,.\,\cos\nu^2\,.\,\cos 2(nt+\varpi-\psi).$$

Da die Gröſsen r, ν und ψ sich in Vergleichung mit der Umdrehungsbewegung der Erde sehr langsam ändern, so geben die drey vorhergehenden Glieder drey verschiedene Arten von Schwankungen. Die Perioden der Schwankungen der ersten Art sind sehr lang; sie sind von der Umdrehungsbewegung der Erde unabhängig, und hängen nur von der Bewegung des Gestirns L in seiner Bahn ab. Die Perioden der Schwankungen der zweyten Art hängen vorzüglich von der Umdrehungsbewegung der Erde nt ab; ihre Dauer ist ungefähr ein Tag; die Perioden der Schwankungen der dritten Art hängen endlich vorzüglich vom Winkel $2nt$ ab; ihre Dauer ist ungefähr ein halber Tag. Da die Gleichung (4) des vorhergehenden Satzes eine linearische Differenzialgleichung ist, so erhellet, daſs diese drey Arten von Schwankungen sich vermengen ohne sich zu vermischen; wir können sie daher einzeln betrachten.

Von den Schwankungen der ersten Art.

5. Wir werden in diesen Untersuchungen annehmen, daſs das vom Meer bedeckte Sphäroid ein Umdrehungsellipsoid ist, welches die natürlichste und einfachste Hypothese ist, welche man annehmen kann. Dann ist γ, der Aus-

96) Es ist $\frac{3}{2}\left[[\cos\theta\,.\,\sin\nu + \sin\theta.\cos\nu.\cos(nt+\varpi-\psi)]^2 - \frac{1}{3}\right] = \frac{3}{2}\cos\theta^2.\sin\nu^2 + \frac{3}{2}\sin\theta^2.\cos\nu^2.\cos(nt+\varpi-\psi)^2 + 3.\cos\theta.\sin\theta.\sin\nu.\cos\nu.\cos(nt+\varpi-\psi) - \frac{1}{2}$. Nun ist $\cos\theta^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta$ und $\sin\theta^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta$ und $\cos(nt+\varpi-\psi)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(nt+\varpi-\psi)$; endlich $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sin\nu^2 - \frac{1}{2}\cos\nu^2$; substituirt man diese Werthe, so findet man $\frac{3}{2}\cos\theta^2\,.\,\sin\nu^2 + \frac{3}{2}\sin\theta^2\,.\,\cos\nu^2\,.\,\cos(nt+\varpi-\psi)^2 - \frac{1}{2} = +(\frac{1}{4}\sin\nu^2 - \frac{1}{8}\cos\nu^2)\,.\,(1+3\cos 2\theta) + \frac{3}{4}\sin\theta^2\,.\,\cos\nu^2\,.\,\cos 2(nt+\varpi-\psi)$.

druck der Tiefe des Meeres, von der Form $l.(1 - q\mu^2)$, und man hat

$$z = \frac{l.(1 - q\mu^2)}{i^2 - 4n^2\mu^2}.$$

Wir nehmen die Gleichung (4) des 3ten Satzes wieder vor. Da die Schwankungen der ersten Art nicht vom Winkel ϖ abhängen, so muſs man s in dieser Gleichung gleich Null setzen. Man nehme an, daſs man

$$a = P^{(0)} + P^{(2)} + P^{(4)} + P^{(6)} \ldots + P^{(2f)}$$

hat, wo $P^{(2)}$, $P^{(4)} \ldots$ Funktionen von μ^2 sind, welche für jeden Werth von f der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thun:

$$0 = \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dP^{(2f)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} + 2f.(2f+1).P^{(2f)}.$$

Der Theil von a', welcher sich auf y und auf die Wirkung der Wasserlage bezieht, deren innerer Halbmesser 1 und deren äuſserer Halbmesser $1 + \alpha y$ ist, ist nach dem Vorhergehenden gleich

$$\left(1 - \frac{3}{\varrho}\right).P^{(0)} + \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right).P^{(2)} + \left(1 - \frac{3}{7\varrho}\right).P^{(4)} \ldots + \left(1 - \frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).P^{(2f)}.$$

Der Theil von a', welcher aus der Wirkung der Gestirne entsteht, bringt nur Gröſsen von der Form $P^{(2)}$ hervor; denn die Funktion $1 + 3\cos 2\theta$, welche nach dem vorhergehenden Satz ein Factor dieses Theils ist, ist gleich $6(\mu^2 - \frac{1}{3})$, und man sieht leicht, daſs diese letztere Funktion von der Form $P^{(2)}$ ist. Dieses vorausgesetzt substituire man in die Gleichung (4) des 3ten Satzes statt a und a' ihre Werthe, und bestimme die willkührlichen Gröſsen $P^{(0)}$, $P^{(2)}$ etc. so, daſs die Funktion $\left(\frac{da'}{d\mu}\right).(1 - \mu^2)$ durch $i^2 - 4n^2\mu^2$ theilbar ist, wodurch man eine Bedingungsgleichung zwischen diesen willkührlichen Gröſsen erhält; dann wird die höchste Potenz von μ^2 in jedem Theil dieser Gleichung μ^{2f} seyn; die Vergleichung der Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von μ^2 wird $f + 1$ Gleichungen geben, welche, mit der vorhergehenden vereinigt, $f + 2$ Bedingungsgleichungen bilden werden. Die Anzahl der willkührlichen Gröſsen der Funktion $P^{(0)} + P^{(2)} + P^{(4)} +$ etc. ist $f + 1$; fügt man diesen die unbestimmte Gröſse q bey, so erhält man $f + 2$ unbestimmte Gröſsen, welche den Bedingungsgleichungen Genüge thun können. Man wird also auf diese Art der Gleichung (4) für ein bestimmtes Gesetz der Tiefe

des Meeres Genüge thun können, und man erhält dieses Gesetz auf folgende Art. Man bezeichne durch $Q\mu^{2f}$ das Glied von a, welches die höchste Potenz von μ enthält, so wird der Koeffizient von μ^{2f-1} in der Funktion $-\left(\frac{da'}{d\mu}\right).(1-\mu^2)$, wenn man sie durch $i^2 - 4n^2\mu^2$ dividirt, gleich

$$-f.\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).\frac{Q}{2n^2}$$

seyn. Es folgt hieraus, daſs der Koeffizient von μ^{2f} im zweyten Theil der Gleichung (4) gleich

$$f.(2f+1).\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).\frac{lg.q.Q}{2n^2}$$

seyn wird. Setzt man ihn dem Koeffizienten von μ^{2f} im ersten Theil dieser Gleichung, nämlich Q, gleich, so erhält man

$$q=\frac{2n^2}{f.(2f+1).\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).lg}.$$

Setzt man also die Tiefe des Meeres gleich l, weniger das Product dieses Werthes von q in $l\mu^2$, so erhält man durch die vorhergehende Analysis die Schwankungen der ersten Art.

Die Gröſse $\frac{n^2}{g}$ ist das Verhältniſs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator, welches Verhältniſs $\frac{1}{289}$ ist. Nimmt man für r eine ziemlich groſse Zahl, z. B. 12 oder 14 an, so wird der Koeffizient von μ^2 so klein seyn, daſs man ihn vernachlässigen kann, und die Tiefe des Meeres wird dann sehr nahe beständig seyn; man erhält folglich so einen sehr genäherten Ausdruck der Schwankungen des Meeres für den Fall, wenn seine Tiefe überall gleich groſs ist.

6. Der Werth von c des 3ten Satzes ist wegen des Divisors i, der sich in verschiedenen Gliedern desselben befindet, bey den Schwankungen der ersten Art sehr groſs. Entwickelt man den Theil der Wirkung des Mondes, welcher die Schwankungen der ersten Art hervorbringt, nämlich:

$$\frac{L}{4r^3}.(\sin v^2-\tfrac{1}{2}\cos v^2).(1+3\cos 2\theta),$$

in Sinus und Kosinus von Winkeln, welche im Verhältniſs der Zeit wachsen, und bezeichnet man irgend ein Glied dieser Entwickelung durch $ak(1+3\cos 2\theta)$ $\cos(it+A)$, so wird k in dem Glied, wo it die mittlere Bewegung der Knoten der Mondsbahn ist, in die Tangente der Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik multiplicirt seyn; da aber i sehr klein ist, so wird dies Glied sehr beträchtlich und das gröſste von allen denen seyn, welche sich im Ausdruck von c befinden.

Wir müssen jedoch hier eine wichtige Bemerkung beybringen. Der Widerstand, welchen die Wasser des Meeres erfahren, muſs die Schwankungen dieser Art beträchtlich vermindern und ihnen eine sehr geringe Ausdehnung lassen. Wir setzen, um dies zu zeigen, den Widerstand der Geschwindigkeit proportional, und wir bezeichnen den Koeffizienten dieses Widerstandes durch β. Die zwey Gleichungen, in welche sich die Gleichung (2) des ersten Satzes theilt, sind alsdann

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)-2n.\left(\frac{dv}{dt}\right).\mu.\sqrt{1-\mu^2}+\beta.\left(\frac{du}{dt}\right)=g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}-\left(\frac{dV'}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2};$$

$$\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)+\frac{2n.\mu.\left(\frac{du}{dt}\right)}{\sqrt{1-\mu^2}}+\beta.\left(\frac{dv}{dt}\right)=-\frac{g.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2}+\frac{\left(\frac{dV'}{d\varpi}\right)}{1-\mu^2};$$

denn es ist klar, daſs der Widerstand den beiden ersten Theilen dieser Gleichungen die Glieder $\beta.\left(\frac{du}{dt}\right)$ und $\beta.\left(\frac{dv}{dt}\right)$ hinzusetzen muſs. Die Gleichung (1) des ersten Satzes wird aber beständig Statt haben.

Wir werden hier nur die Glieder betrachten, welche vom Winkel it abhängen, wo it sehr klein und viel kleiner als β ist. Man kann in diesem Fall $\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)$ in Vergleichung mit $\beta\left(\frac{du}{dt}\right)$ und $\beta\left(\frac{dv}{dt}\right)$ vernachlässigen, und da diese Glieder vom Winkel ϖ unabhängig sind, so giebt die letzte der vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{2n\mu.\left(\frac{du}{dt}\right)}{\sqrt{1-\mu^2}}+\beta.\left(\frac{dv}{dt}\right)=0;$$

und die vorletzte Gleichung verwandelt sich in

$$\left(\frac{\beta^2 + 4n^2\mu^2}{\beta}\right) \cdot \left(\frac{du}{dt}\right) = g \cdot \left(\frac{d\gamma}{dt}\right) \cdot \sqrt{1-\mu^2} - \left(\frac{dV'}{d\mu}\right) \cdot \sqrt{1-\mu^2}. \quad (f)$$

Man muſs diese Gleichung mit der folgenden verbinden:

$$\gamma = \left(\frac{d \cdot \gamma u \cdot \sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right).$$

Vernachlässigt man die Gröſsen von der Ordnung i, so giebt die Gleichung (f)

$$0 = g \cdot \left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right) - \left(\frac{dV'}{d\mu}\right),$$

oder

$$g\gamma - V' = 0,$$

und folglich

$$u = \int \frac{V' \cdot d\mu}{g \cdot \gamma \cdot \sqrt{1-\mu^2}}.$$

Substituirt man diesen Werth von u in die Gleichung (f), so wird man einen noch mehr genäherten Werth von $g\gamma - V'$ erhalten; man kann sich aber mit der ersten Annäherung begnügen.

Der Theil von V', welcher aus der Wirkung des Gestirns L entspringt, ist von der Form $k.(1 + 3\cos 2\theta).\cos(it + A)$, oder $6k.(\mu^2 - \frac{1}{3}).\cos(it + A)$. Es sey $Q.(\mu^2 - \frac{1}{3}).\cos(it + A)$ der entsprechende Theil von γ, so wird der entsprechende Theil von V', welcher aus der Wirkung der Wasserlage entsteht, deren innerer Halbmesser gleich Eins, und deren äuſserer Halbmesser gleich $1 + \alpha\gamma$ ist, gleich $\frac{3}{5\varrho} Q.(\mu^2 - \frac{1}{3}) \cos(it + A)$ seyn; die Gleichung $g\gamma - V' = 0$ giebt also

$$0 = \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) \cdot Q \cdot (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) - \frac{6k}{g}(\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Hieraus erhält man

$$Q = \frac{6k}{g \cdot \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)};$$

und folglich

$$\alpha\gamma = \frac{6 \cdot \alpha k \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3}) \cdot \cos(it + A)}{g \cdot \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)}.$$

Da die Summe aller Glieder $ak \,.\, \cos(it + A)$ gleich $\frac{L}{4r^3} \,.\, (\sin v^2 - \frac{1}{2} \cos v^2)$ ist, so ist der ganze Werth von ay in Beziehung auf die Schwankungen der ersten Art, welche aus der Wirkung des Gestirns L entstehen, gleich

$$ay = \frac{L \,.\, (\sin v^2 - \frac{1}{2}\cos v^2) \,.\, (1 + 3 \cos 2\,\theta)}{4\,r^3 \,.\, g \,.\, \left(1 - \frac{3}{5\,\varrho}\right)}.$$

Dieser Werth würde Statt haben, wenn v und r genau beständig wären, und wenn das Flüssige in jedem Augenblick die Gestalt annähme, welche der Zustand des Gleichgewichts erfordert; denn da $\left(\frac{du}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ im Zustand des Gleichgewichts gleich Null sind, so verwandeln sich die Differenzialgleichungen für u und v in folgende: $0 = gy - V'$; man kann daher die Schwankungen der ersten Art, wenn die Gröſsen r und v sehr langsam sich ändern, so bestimmen, als ob das Flüssige in jedem Augenblick unter der Wirkung des anziehenden Gestirns ins Gleichgewicht käme; der Fehler ist desto geringer, je langsamer sich das Gestirn bewegt; er ist folglich für die Sonne unmerklich. Er kann aber für den Mond wegen der Schnelligkeit seiner Bewegung in seiner Bahn beträchtlich werden. Da aber die Schwankungen der ersten Art vermöge der Beobachtungen sehr klein sind, so kann man selbst für den Mond den vorhergehenden Werth von ay brauchen.

Ob wir nun schon auf diese Resultate in der Voraussetzung gekommen sind, daſs der Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist, so ist doch klar, daſs sie bey jedem Gesetz des Widerstandes Statt finden. Man kann im Allgemeinen sie immer ohne merklichen Irrthum gebrauchen, wenn das in seinem Zustand des Gleichgewichts gestöhrte Flüssige vermöge des Widerstandes, welchen es erfährt, zu diesem Zustand in einer kürzern Zeit zurückkehrt, als die Umlaufszeit des Gestirns beträgt.

Von den Schwankungen der zweyten Art.

7. Der Theil der Wirkung des Gestirns L, welcher diese Schwankungen hervorbringt, ist nach dem 4ten Satz gleich

$$\frac{3\,L}{r^3} \,.\, \sin v \,.\, \cos v \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, \cos(nt + \varpi - \psi).$$

Entwickelt man diese Funktion in Sinus und Kosinus von Winkeln, welche der

Zeit proportional sind, so erhält man eine Reihe Glieder von der Form $\alpha k . \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . \cos (it + \varpi - A)$, wo i sehr wenig von n verschieden ist, weil die Bewegung des Gestirns in Vergleichung mit der Umwälzung der Erde sehr langsam ist. Man nehme nun die Gleichung (4) des 3ten Satzes wieder vor, man setze in ihr $s = 1$ und $z = \frac{l . (1 - q\mu^2)}{i^2 - 4n^2 . \mu^2}$; man nehme ferner an, daſs a durch die Reihe

$$\mu . \sqrt{1 - \mu^2} . [P^{(0)} + P^{(2)} + P^{(4)} \ldots + P^{(2f-2)}]$$

vorgestellt wird, wo $P^{(0)}$, $P^{(2)}$ etc. solche Funktionen von μ^2 sind, daſs man für jeden Werth von f

$$o = \left\{ \frac{d . \left[(1 - \mu^2) . \left(\frac{dY^{(2f)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} - \frac{Y^{(2f)}}{1 - \mu^2} + 2f . (2f + 1) . Y^{(2f)}$$

hat, wenn man die Funktion $\mu . \sqrt{1 - \mu^2} . P^{(2f-2)}$ durch $Y^{(2f)}$ bezeichnet. Der Theil von a', welcher aus der Wirkung der Wasserlage entsteht, deren innerer Halbmesser gleich Eins und deren äuſserer Halbmesser gleich $1 + \alpha y$ ist, ist nach dem Vorhergehenden gleich

$$- 3\mu . \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\varrho} . \left[\tfrac{1}{5} P^{(0)} + \tfrac{1}{9} P^{(2)} + \tfrac{1}{13} P^{(4)} \ldots + \frac{1}{4f + 1} . P^{(2f-2)} \right];$$

der Theil von a', welcher aus der Wirkung des Gestirns L entsteht, ist $- \frac{k}{g} . \mu . \sqrt{1 - \mu^2}$; man erhält also

$$a' = \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . \left\{ \begin{matrix} \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) P^{(0)} + \left(1 - \frac{3}{9\varrho}\right) . P^{(2)} \ldots + \left(1 - \frac{3}{(4f+1) . \varrho}\right) . P^{(2f-2)} \\ - \frac{k}{g} \end{matrix} \right\}.$$

Man nehme an, daſs die beständigen unbestimmten Gröſsen, welche sich als Factoren in jeder der Funktionen $P^{(0)}$, $P^{(2)}$ etc. befinden, so beschaffen sind, daſs die Funktion $\frac{2n}{i} . \mu a' - \left(\frac{da'}{d\mu}\right) . (1 - \mu^2)$ durch $i^2 - 4n^2\mu^2$ theilbar ist, welches nur eine einzige Bedingungsgleichung zwischen diesen unbestimmten Gröſsen erfordert, so wird der zweyte Theil der Gleichung (4) keinen Nenner mehr haben; denn wenn man nur die Glieder des zweyten Theils betrachtet,

wel-

welche $\sqrt{1-\mu^2}$ zum Theiler haben, und wenn man $a' = F.\mu.\sqrt{1-\mu^2}$ setzt, wo F eine rationale und ganze Funktion von μ^2 ist, so verwandeln sich die drey Stücke dieses zweyten Theils in folgende:

$$-\left(\frac{2n}{i}+1\right).\frac{gz.\mu^3 F}{\sqrt{1-\mu^2}}+\frac{2n}{i}.\left(\frac{2n}{i}+1\right).\frac{gz.\mu^3 F}{\sqrt{1-\mu^2}}+\frac{(i^2-4n^2\mu^2).gz.\mu F}{i^2.\sqrt{1-\mu^2}},$$

oder $gz.\mu F.\sqrt{1-\mu^2}$, woraus folgt, daſs dieser zweyte Theil die Wurzelgröſse $\sqrt{1-\mu^2}$ nicht mehr im Nenner hat. Substituirt man daher in diese Gleichung statt a und a' ihre Werthe, und dividirt man sie durch $\mu.\sqrt{1-\mu^2}$, so giebt die Vergleichung der ähnlichen Potenzen von μ, f Bedingungsgleichungen, welche mit der vorhergehenden vereinigt die $f+1$ Bedingungsgleichungen bilden, welchen Genüge geschehen muſs; die Anzahl der unbestimmten Gröſsen, q mit inbegriffen, ist aber $f+1$; man hat folglich eben so viel unbestimmte Gröſsen als man Gleichungen hat.

Man bezeichne, um den Werth von q zu erhalten, das Glied des Ausdrucks von a, welches die höchste Potenz von μ enthält, durch $Q.\mu^{2f-1}.\sqrt{1-\mu^2}$, so wird das ähnliche Glied des Ausdrucks von a' gleich

$Q.\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).\mu^{2f-1}.\sqrt{1-\mu^2}$ seyn; dies giebt

$$\frac{lgq}{2n^2}.\left(2f^2+f+\frac{n}{i}\right).Q.\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).\mu^{2f-1}.\sqrt{1-\mu^2},$$

als das ähnliche Glied des zweyten Theils der Gleichung (4). Setzt man es dem entsprechenden Glied von a gleich, so erhält man

$$q=\frac{2n^2}{lg.\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).\left(2f^2+f+\frac{n}{i}\right)}.$$

Setzt man also die Tiefe des Meeres gleich

$$l-\frac{2n^2.\mu^2}{g.\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).\left(2f^2+f+\frac{n}{i}\right)},$$

so wird man durch die vorhergehende Analysis die Schwankungen der zweyten Art bestimmen können.

Dieses Gesetz der Tiefe hängt vom Werth von i ab, und ist folglich nicht für alle Glieder, in welche man die Wirkung des Gestirns entwickeln kann, gleich groſs; diese Gleichheit ist jedoch unerläſslich, um ein Gesetz der Tiefe annehmen zu können. Man muſs aber bemerken, daſs man hier $\frac{n}{i} = 1$ setzen kann, weil i wenig von n verschieden ist, und alsdann wird das vorhergehende Gesetz der Tiefe des Meeres von i unabhängig; es ist sogar sehr nahe demjenigen Gesetz gleich, welches wir im vorhergehenden Satz für die Schwankungen der ersten Art gefunden haben, wenn f so groſs ist, daſs man $\frac{n}{i}$ in Vergleichung mit $2f^2 + f$ vernachlässigen kann.

8. Die Betrachtung, daſs i sehr nahe gleich n ist, führt uns auf einen sehr einfachen Ausdruck von a, welcher dadurch sehr merkwürdig ist, daſs er die Erklärung einer der vorzüglichsten Erscheinungen in der Ebbe und Fluth verschafft. Setzt man $i = n$, so hat man

$$z = \frac{l.(1 - q\mu^2)}{n^2.(1 - 4\mu^2)}.$$

Man setze nun in der Gleichung (4) des 3ten Satzes $s = 1$, $i = n$ und $a = Q\mu . \sqrt{1-\mu^2}$, wo Q ein von μ unabhängiger Koeffizient ist, so erhält man nach dem Vorhergehenden

$$a' = \left[\left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right).Q - \frac{k}{g}\right].\mu.\sqrt{1-\mu^2};$$

dies giebt

$$\frac{2n}{i}.\mu a' - \left(\frac{da'}{d\mu}\right).(1-\mu^2) = -\left(\frac{1 - 4\mu^2}{\mu}\right).a'.$$

Der zweyte Theil der Gleichung (4) reducirt sich so auf das Glied $\frac{2lg.q.a'}{n^2}$. Setzt man diese Gröſse dem ersten Theil, oder dem angenommenen Werth von a gleich, so erhält man

$$Q = \frac{2lgq}{n^2}.\left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right).Q - \frac{2lq}{n^2}.k.$$

Hieraus erhält man

$$Q = \frac{2lq.k}{2lgq.\left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) - n^2}.$$

Der Theil von αy, welcher dem Gliede $\alpha k \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos(it + \varpi - A)$ entspricht, ist daher gleich

$$\frac{2lq \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{2lgq \cdot \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) - n^2} \cdot \alpha k \cdot \cos(it + \varpi - A).$$

Die Summe der Glieder $\alpha k \cdot \cos(it + \varpi - A)$ ist aber nach dem Vorhergehenden die Entwickelung der Funktion $\frac{3L}{r^3} \cdot \sin v \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \varpi - \psi)$; man erhält daher für den ganzen Theil von αy; insofern er sich auf die Schwankungen der zweyten Art bezieht,

$$\frac{\frac{6L}{r^3} \cdot lq \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin v \cdot \cos v \cdot \cos(nt + \varpi - \psi)}{2lgq \cdot \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) - n^2},$$

und dies Gesetz hat im Allgemeinen für jeden Werth von q, das heiſst, für jedes Gesetz der Tiefe des Meeres Statt, wofern nur das vom Meer bedeckte Sphäroid ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid ist.

Der Unterschied der beiden Ebben oder Fluthen desselben Tages hängt von den Schwankungen der zweyten Art ab. Wenn nämlich das Gestirn L durch den obern Mittagskreis des Theilchens geht, so hat man $nt + \varpi - \psi = 0$, und wenn es durch den untern Mittagskreis geht, so hat man $nt + \varpi - \psi = 200^c$; der Ueberschuſs der Ebbe oder Fluth im ersten Fall über die Ebbe oder Fluth im zweyten Fall, ist also

$$\frac{\frac{12L}{r^3} \cdot lq \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin v \cdot \cos v}{2lgq \cdot \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) - n^2}.$$

Die in unsern Häfen angestellten Beobachtungen zeigen uns, daſs dieser Unterschied sehr klein ist; man muſs also lq sehr klein in Vergleichung mit $\frac{n^2}{g}$ annehmen; diese Annahme giebt so eine sehr einfache Erklärung dieser Erscheinung. In diesem Fall ist der Nenner des vorhergehenden Bruchs negativ; lq ist eine negative Gröſse, und das Meer ist an den Polen ein wenig tiefer als am Aequator, wenn die obere Ebbe oder Fluth die untere übertrifft, so wie die

Beobachtungen es anzuzeigen scheinen. Diese Folge ist aber der Hypothese untergeordnet, daſs das Flüssige regelmäſsig über die Oberfläche eines durch Umdrehung entstandenen Ellipsoids verbreitet ist, welches nicht der Fall der Natur ist.

Setzt man in dem Ausdruck von a' statt Q seinen Werth, so erhält man

$$a' = \frac{\frac{n^2 k}{g} \cdot \mu \cdot \sqrt{1 - \mu^2}}{2 l g q \cdot \left(1 - \frac{3}{5 \varrho}\right) - n^2}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Ausdrücke von b und von c des 3ten Satzes, und setzt man $s = 1$ und $i = n$, so findet man

$$b = \frac{-k}{2 l g q \cdot \left(1 - \frac{3}{5 \varrho}\right) - n^2};$$

$$c = \frac{k \mu}{\left[2 l g q \cdot \left(1 - \frac{3}{5 \varrho}\right) - n^2\right] \cdot \sqrt{1 - \mu^2}}.$$

Es folgt hieraus, daſs der Theil von au, welcher sich auf die Schwankungen der zweyten Art bezieht, gleich

$$- \frac{\frac{3 L}{r^3} \cdot \sin v \cdot \cos v \cdot \cos (nt + \varpi - \psi)}{2 l g q \cdot \left(1 - \frac{3}{5 \varrho}\right) - n^2}$$

ist, und daſs der Theil von av, welcher sich auf dieselben Schwankungen bezieht, folgender ist:

$$\frac{\frac{3 L}{r^3} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \sin v \cdot \cos v \cdot \sin (nt + \varpi - \psi)}{2 l g q \cdot \left(1 - \frac{3}{5 \varrho}\right) - . n^2}.$$

Von den Schwankungen der dritten Art.

9. Der Theil der Wirkung des Gestirns L, welcher diese Schwankungen hervorbringt, ist nach dem 4ten Satz gleich

$$\frac{3 L}{4 r^3} \cdot \sin \theta^2 \cdot \cos v^2 \cdot \cos 2 (nt + \varpi - \psi).$$

Die Entwickelung dieser Funktion in Kosinus von Winkeln, welche im Verhältniſs der Zeit wachsen, giebt eine Reihe Glieder von der Form $ak.\sin\theta^2.\cos(it + 2\varpi - A)$, wo i wenig von $2n$ verschieden ist.

Man nehme nun die Gleichung (4) des 3ten Satzes wieder vor, und setze in ihr $s = 2$ und

$$z = \frac{l.(1 - q\mu^2)}{i^2 - 4n^2\mu^2}.$$

Man nehme ferner an, daſs a durch die Reihe

$$(1 - \mu^2).[P^{(0)} + P^{(2)} + P^{(4)} \ldots + P^{(2f-2)}]$$

ausgedrückt wird, wo $P^{(0)}$, $P^{(2)}$ etc. rationale und ganze Funktionen von μ^2 und so beschaffen sind, daſs man

$$0 = \left\{\frac{d.\left[(1 - \mu^2).\left(\frac{dY^{(2f)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} - \frac{4Y^{(2f)}}{1 - \mu^2} + 2f.(2f + 1).Y^{(2f)}$$

hat, wo $Y^{(2f)}$ die Funktion $(1 - \mu^2).P^{(2f-2)}$ bezeichnet. Der Theil von a', welcher aus der Wirkung der Wasserlage entsteht, deren innerer Halbmesser gleich Eins und deren äuſserer Halbmesser gleich $1 + ay$ ist, ist nach dem Vorhergehenden gleich:

$$-\frac{3(1 - \mu^2)}{\varrho}.\left[\tfrac{1}{5}P^{(0)} + \tfrac{1}{9}P^{(2)} + \tfrac{1}{13}P^{(4)} \ldots + \frac{1}{4f + 1}.P^{(2f-2)}\right].$$

Der Theil von a', welcher aus der Wirkung des Gestirns L entsteht, ist $-\frac{k}{g}(1 - \mu^2)$; man hat also

$$a' = (1 - \mu^2).\left\{\begin{array}{l}\left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)P^{(0)} + \left(1 - \frac{3}{9\varrho}\right).P^{(2)} \ldots + \left(1 - \frac{3}{(4f + 1).\varrho}\right).P^{(2f-2)} \\ - \frac{k}{g}\end{array}\right\}.$$

Man nehme an, daſs die unbestimmten beständigen Gröſsen, womit jede der Funktionen $P^{(0)}$, $P^{(2)}$ etc. multiplicirt ist, so beschaffen sind, daſs die Funktion $\frac{4n}{i}.\mu a' - \left(\frac{da'}{d\mu}\right).(1 - \mu^2)$ durch $i^2 - 4n^2\mu^2$ theilbar ist, welches nur eine einzige Bedingungsgleichung zwischen diesen unbestimmten Gröſsen erfordert, so wird der zweyte Theil der Gleichung (4) keinen Nenner mehr haben; er wird überdies, so wie der erste Theil, durch $1 - \mu^2$ theilbar seyn; denn wenn man $a' = (1 - \mu^2).F$ setzt, und nur die Glieder betrachtet, welche nicht

durch $1 - \mu^2$ theilbar sind, so verwandeln sich die drey Stücke des zweyten Theils in folgende:

$$-\left(\frac{2n+i}{i}\right)\mu^2.4gzF + \left(\frac{2n+i}{i}\right)\mu^2.\frac{8n}{i}.gzF + \left(\frac{i^2 - 4n^2\mu^2}{i^2}\right)4gz.F,$$

oder in $4(1-\mu^2).gzF$, und ihre Summe ist folglich durch $1-\mu^2$ theilbar. Setzt man in die Gleichung (4) statt a und a' ihre vorhergehenden Werthe und dividirt man sie durch $1-\mu^2$, so giebt die Vergleichung der Koeffizienten von μ, f Gleichungen, welche mit der vorhergehenden vereinigt die $f+1$ Bedingungsgleichungen bilden werden, denen Genüge geschehen muſs. Die Anzahl der unbestimmten Gröſsen, q mit eingeschlossen, ist aber ebenfalls $q+1$; man hat also eben so viel unbestimmte Gröſsen, als man Gleichungen hat.

Man bezeichne nun, um den Werth von q zu erhalten, das höchste Glied von $P^{(2f-2)}$ in Rücksicht auf die Potenzen von μ, durch $Q.\mu^{2f-2}$, so ist das entsprechende Glied von a' gleich

$$(1-\mu^2).\mu^{2f-2}.Q.\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).$$

Das entsprechende Glied des zweyten Theils der Gleichung (4) ist gleich

$$\frac{lg.q}{2n^2}.\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right).\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).Q.(1-\mu^2).\mu^{2f-2}.$$

Setzt man es dem entsprechenden Gliede des ersten Theils nämlich $Q.(1-\mu^2).\mu^{2f-2}$ gleich, so erhält man

$$q = \frac{2n^2}{lg.\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)}.$$

Man wird folglich durch die vorhergehende Analysis die Schwankungen der dritten Art bestimmen können, wenn man die Tiefe des Meeres gleich

$$l - \frac{2n^2\mu^2}{g.\left(1-\frac{3}{(4f+1).\varrho}\right).\left(2f^2+f+\frac{2n}{i}\right)}$$

setzt. Dieser Ausdruck ist für die verschiedenen Werthe, welche i haben kann, verschieden; man muſs aber bemerken, daſs man $\frac{2n}{i}=1$ setzen kann, weil i sehr nahe gleich $2n$ ist; man erhält dann für die Tiefe des Meeres denselben Ausdruck, welchen wir im 7ten Satz für die Schwankungen der zweyten

Art gefunden haben; dies ist eine nothwendige Bedingung, um dies Gesetz annehmen zu können. Man kann sogar diese Tiefe mit der in Uebereinstimmung bringen, welche wir im 5 ten Satz für die Schwankungen der ersten Art gefunden haben, wenn man annimmt, daſs f so groſs ist, daſs man die Einheit in Vergleichung mit $2f^2 + f$ vernachlässigen kann. Wir haben aber im 6 ten Satz bemerkt, daſs der Widerstand, welchen das Meer in seinen Bewegungen erfährt, die Schwankungen der ersten Art vom Gesetz der Tiefe des Meeres unabhängig macht; so daſs es hinreichend ist, die Gesetze der Tiefe zu betrachten, in welchen man die Schwankungen der zweyten und dritten Art zusammen bestimmen kann.

10. Wir haben im 8 ten Satz bemerkt, daſs man die Tiefe des Meeres, um den Beobachtungen Genüge zu thun, fast beständig annehmen muſs: wir wollen daher die Schwankungen der dritten Art in dieser Voraussetzung bestimmen. Wir werden noch überdies annehmen, daſs r, ψ und ν in Vergleichung mit den Aenderungen des Winkels $2nt$ so langsam sich ändern, daſs man sie wie beständige Gröſsen behandeln kann. Wir werden endlich den Bruch $\frac{1}{\varrho}$, welcher das Verhältniſs der Dichte des Meeres zur mittlern Dichte der Erde ausdrückt, vernachlässigen, da dies Verhältniſs nach den, über die Anziehung der Berge angestellten, Beobachtungen ziemlich klein zu seyn scheint. Dieses festgesetzt, erhält man, wenn man annimmt, daſs

$$y = a \,.\, \cos\,(2nt + 2\varpi - 2\psi)$$

ist,

$$aa' = aa - \frac{3L}{4r^3 \,.\, g} \,.\, (1 - \mu^2) \,.\, \cos \nu^2.$$

Die Gleichung (4) des dritten Satzes verwandelt sich also in folgende, wenn man bemerkt, daſs $z = \frac{l}{4n^2 \,.\, (1 - \mu^2)}$ ist:

$$\frac{4n^2}{lg} \,.\, aa \,.\, (1 - \mu^2) = -a \,.\, \left(\frac{d^2a}{d\mu^2}\right) \,.\, (1 - \mu^2)^2 + (6 + 2\mu^2)\,aa - \frac{6L}{r^3 g} \,.\, (1 - \mu^2)\cos \nu^2.$$

Man kann dieser Gleichung eine einfachere Gestalt geben, wenn man in ihr $1 - \mu^2 = x^2$ und dx beständig setzt; man erhält so

$$0 = x^2(1 - x^2)\,a \,.\, \left(\frac{d^2a}{dx^2}\right) - x \,.\, a \,.\, \left(\frac{da}{dx}\right) - 2aa \,.\, \left(4 - x^2 - \frac{2n^2}{lg} \,.\, x^4\right) + \frac{6L}{r^3 g} \,.\, x^2 \,.\, \cos \nu^2.$$

Wir setzen, um dieser Gleichung Genüge zu thun,

$$aa = A^{(1)} . x^2 + A^{(2)} . x^4 + A^{(3)} . x^6 + \text{etc.}$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Differenzialgleichung, so findet man erstlich aus der Vergleichung der Koeffizienten von x^2

$$A^{(1)} = \frac{3L}{4r^3 g} . \cos \nu^2.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten von $x^{(4)}$ giebt die identische Gleichung $0 = 0$; die Vergleichung der Koeffizienten von x^{2f+4}, wo f gleich oder größer als Eins ist, giebt endlich

$$0 = A^{(f+2)} . (2f^2 + 6f) - A^{(f+1)} . (2f^2 + 3f) + \frac{2n^2}{lg} . A^{(f)}.$$

Man wird vermittelst dieser Gleichung die Werthe von $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ etc. erhalten, wenn $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ bekannt seyn werden. Giebt man ihr die folgende Gestalt

$$\frac{A^{(f+1)}}{A^{(f)}} = \frac{\frac{2n^2}{lg}}{2f^2 + 3f - (2f^2 + 6f) . \frac{A^{(f+2)}}{A^{(f+1)}}},$$

so erhält man

$$\frac{A^{(f+1)}}{A^{(f)}} = \cfrac{\frac{2n^2}{lg}}{2f^2 + 3f - \cfrac{\frac{4n^2}{lg} . (f^2 + 3f)}{2(f+1)^2 + 3(f+1) - \cfrac{\frac{4n^2}{lg} . [(f+1)^2 + 3(f+1)]}{2(f+2)^2 + 3(f+2) - \text{etc.}}}};$$

dies giebt, wenn man $f = 1$ setzt,

$$A^{(2)} = \cfrac{\frac{2n^2}{lg} . A^{(1)}}{2.1^2 + 3.1 - \cfrac{\frac{4n^2}{lg} . (1^2 + 3.1)}{2.2^2 + 3.2 - \cfrac{\frac{4n^2}{lg} . (2^2 + 3.2)}{2.3^2 + 3.3 - \cfrac{\frac{4n^2}{lg} . (3^2 + 3.3)}{2.4^2 + 3.4 - \text{etc.}}}}}.$$

Man

Man erhält so $A^{(2)}$ durch $A^{(1)}$; $\frac{n^2}{g}$ ist das Verhältniſs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator; dies Verhältniſs ist $\frac{1}{289}$; setzt man daher nach und nach $\frac{2n^2}{lg} = 20$; $\frac{2n^2}{lg} = 5$; $\frac{2n^2}{lg} = \frac{5}{2}$, so sind die zugehörenden Tiefen des Meeres $\frac{1}{2890}$, $\frac{1}{722,5}$, $\frac{1}{361,25}$, wenn der Halbmesser der Erde zur Einheit angenommen wird. Man findet dann durch die vorhergehende Analysis die folgenden Werthe von aa:

$$aa = \frac{3L}{4r^3.g} \cdot x^2 \cdot \cos v^2 \cdot \left\{\begin{array}{l} 1,0000 \quad + 20,1862.x^2 + 10,1164.x^4 \\ - 13,1047.x^6 - 15,4488.x^8 - 7,4581.x^{10} \\ - 2,1975.x^{12} - 0,4501.x^{14} - 0,0687.x^{16} \\ - 0,0082.x^{18} - 0,0008.x^{20} - 0,0001.x^{22} \end{array}\right\};$$

$$aa = \frac{3L}{4r^3.g} \cdot x^2 \cdot \cos v^2 \cdot \left\{\begin{array}{l} 1,0000 \quad + 6,1960.x^2 + 3,2474.x^4 \\ + 0,7238.x^6 + 0,0919.x^8 + 0,0076.x^{10} \\ + 0,0004.x^{12} \end{array}\right\};$$

$$aa = \frac{3L}{4r^3.g} \cdot x^2 \cdot \cos v^2 \cdot \left[\begin{array}{l} 1,0000 \quad + 0,7504.x^2 + 0,1566.x^4 \\ + 0,01574.x^6 + 0,0009.x^8 \end{array}\right].$$

11. Man sammle nun die verschiedenen Schwankungen des Meeres. Die der ersten Art sind nach Satz 6, wenn man die Dichte des Meeres in Vergleichung mit der Dichte der Erde vernachlässigt,

$$\frac{L}{4r^3 \cdot g} \cdot (\sin v^2 - \tfrac{1}{2}\cos v^2) \cdot (1 + 3 \cdot \cos 2\theta).$$

Man hat gesehen, daſs die Schwankungen der zweyten Art Null sind, wenn die Tiefe des Meeres überall gleich groſs ist; die Schwankungen der dritten Art werden durch $aa \cdot \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi)$ ausgedrückt. Die Summe dieser Sckwankungen ist der ganze Werth von ay; man erhält folglich

$$ay = \frac{L}{4r^3 \cdot g} \cdot (\sin v^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \cos v^2) \cdot (1 + 3 \cdot \cos 2\theta) + aa \cdot \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi).$$

Nimmt man für L die Sonne an, so daſs r ihre mittlere Entfernung von der Erde und mt ihre mittlere Syderalbewegung ausdrückt, so erhält man durch die Theorie der Centralkräfte

$$\frac{3L}{4r^3 g} = \frac{3n^2}{4g} \cdot \frac{m^2}{n^2} = \frac{3}{4 \cdot 289 \cdot (366,26)^2}.$$

Diese Gröſse ist ein Bruch des Erdhalbmessers, den wir zur Einheit angenommen haben; multiplizirt man sie daher mit der Anzahl von Mètres, welche dieser Halbmesser enthält, so findet man

$$\frac{3L}{4r^3 g} = 0^{me},12316 \quad (= 4,5497 \text{ Zoll} = 0,37914 \text{ Fuſs}).$$

Man muſs diese Gröſse im Verhältniſs des Würfels der mittlern Entfernung der Sonne von der Erde zum Würfel ihrer wirklichen Entfernung sich ändern lassen.

Nennt man e das Verhältniſs der Masse des Mondes, durch den Würfel seiner mittlern Entfernung von der Erde dividirt, zur Masse der Sonne, ebenfalls durch den Würfel ihrer mittlern Entfernung dividirt, so erhält man für den Mond

$$\frac{3L}{4r^3 g} = e \,.\, 0^{me},12316,$$

und diese Gröſse muſs sich wie der Würfel des Verhältnisses der mittlern Entfernung des Mondes zu seiner wirklichen Entfernung ändern.

Es folgt hieraus, daſs man vermöge der vereinigten Wirkung der Sonne und des Mondes folgende Gleichung erhalten wird, wenn man die Abweichung und gerade Aufsteigung des Mondes durch ν' und ψ' bezeichnet, und wenn man die Tiefe des Meeres l gleich $\frac{1}{10}.\frac{n^2}{g}$ oder gleich $\frac{1}{2890}$ des Erdhalbmessers setzt,

$$\alpha\gamma = 0^{me},12316 \,.\, \left(\frac{1 + 3\cos 2\theta}{3}\right) . (\sin \nu^2 - \tfrac{1}{2}\cos \nu^2 + e.\sin {\nu'}^2 - \tfrac{1}{2} e.\cos {\nu'}^2]$$

$$+ \, 0^{me},12316 \,.\, \left\{\begin{matrix} 1,0000 + 20,1862.x^2 \\ +10,1164.x^4 - 13,1047.x^6 \\ -15,4488.x^8 - 7,4581.x^{10} \\ -2,1975.x^{12} - 0,4501.x^{14} \\ -0,0687.x^{16} - 0,0082.x^{18} \\ -0,0008.x^{20} - 0,0001.x^{22} \end{matrix}\right\} . x^2 . \begin{matrix}[\cos \nu^2 . \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi) \\ + e.\cos {\nu'}^2 . \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi')].\end{matrix}$$

Wir werden in der Folge sehen, daſs in den mittlern Entfernungen der Sonne

und des Mondes $e = 3$ ist; nimmt man also an, daſs diese beiden Gestirne in diesen Entfernungen, und noch überdies in Opposition oder Conjunction in der Ebene des Aequators sind, so werden die Ebbe und Fluth dem Fall entsprechen, wo der Winkel $2nt + \varpi - \psi$ gleich Null oder gleich 200^G ist; man findet so $7^{me},34$ ($= 22^{Fuſs}\ 7^{Zoll},1$) für den Unterschied der Ebbe und Fluth unterm Aequator, wo $x = 1$ ist. Die Ebbe ereignet sich aber durch eine merkwürdige Sonderbarkeit dann, wenn beide Gestirne im Meridian sind; die Fluth hingegen dann, wenn sie am Horizont sind, so daſs das Meer am Aequator unter dem Gestirn, von dem es angezogen wird, fällt. Geht man vom Aequator nach den Polen, so findet man, daſs der Unterschied der Ebbe und Fluth in der Gegend von 18^G ($16°,2$) sowohl nördlicher als südlicher Breite gleich Null ist. Es folgt hieraus, daſs sich in der ganzen zwischen den beiden Parallelkreisen des 18ten Grades enthaltenen Zone die Ebbe beym Durchgang der Gestirne durch den Meridian, hingegen auſserhalb dieser Parallelkreise die Fluth in demselben Augenblick ereignet.

Ist l gleich $\frac{4}{10} \cdot \frac{n^2}{g}$, oder die Tiefe des Meeres gleich $\frac{1}{722,5}$, so findet man

$$\alpha y = 0^{me},12316 \cdot \left(\frac{1 + 3 \cdot \cos 2\theta}{3}\right) \cdot (\sin v^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \cos v^2 + e \cdot \sin v'^2 - \tfrac{1}{2} e \cdot \cos v'^2)$$

$$+ 0^{me},12316 \cdot \left\{\begin{matrix} 1,0000 + 6,1960 \cdot x^2 \\ + 3,2474 \cdot x^4 + 0,7238 \cdot x^6 \\ + 0,0919 \cdot x^8 + 0,0076 \cdot x^{10} \\ + 0,0004 \cdot x^{12} \end{matrix}\right\} \cdot x^2 \cdot [\cos v^2 \cdot \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi) + e \cdot \cos v'^2 \cdot \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi')].$$

Man erhält dann durch dieselben Voraussetzungen, welche oben gebraucht worden sind, für den Unterschied der Ebbe und der Fluth unterm Aequator $11^{me},05$ ($= 34^{Fuſs} \cdot 2^{Zoll},7$); hier ist aber die Zeit der Fluth überall die Zeit des Durchgangs der Gestirne durch den Mittagskreis.

Man findet endlich im Fall, wenn $l = \frac{8}{10} \cdot \frac{n^2}{g}$, oder wenn die Tiefe des Meeres doppelt so groſs als im Vorhergehenden ist:

$$\alpha y = 0^{me},12316.\left(\frac{1+3.\cos 2\theta}{3}\right).(\sin v^2 - \tfrac{1}{2}.\cos v^2 + e.\sin v'^2 - \tfrac{1}{2}e.\cos v'^2)$$

$$+ 0^{me},12316.\left\{\begin{array}{l} 1,0000 + 0,7504.x^2 \\ + 0,1566.x^4 + 0,01574.x^6 \\ + 0,0009.x^8 \end{array}\right\}.x^2.[\cos v^2.\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi) + e.\cos v'^2.\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi')],$$

und man erhält in den obigen Voraussetzungen für den Unterschied der Ebbe und der Fluth unterm Aequator $1^{me},90$ ($5^F.10^Z,2$).

Wenn die Tiefe des Meeres zunimmt, so nimmt der Werth von αy ab; diese Verminderung hat aber eine Grenze, und der Werth von αa wird sehr bald gleich $\frac{3L}{4r^3 g}.x^2.\cos v^2$; man findet dann für den Unterschied der Ebbe und der Fluth unterm Aequator $0^{me},98528$ ($36^{Zoll},3975$), wenn die beiden Gestirne in Conjunction in der Ebene des Aequators sind; diese Gröſse ist also die Grenze dieses Unterschiedes.

12. Die gefundene Grenze entspricht dem Fall, wenn das Meer in jedem Augenblick die Gestalt des Gleichgewichts annähme, welche die Kräfte erfordern, die auf dasselbe wirken. Man kann aber in dieser Hypothese den Werth von αy auf eine sehr einfache Art bestimmen, was auch immer das Gesetz der Tiefe und der Dichte des Meeres sey. Sie besteht nämlich darinn, in der Gleichung (2) des ersten Satzes anzunehmen, daſs die Bewegung des Gestirns und die Umdrehungsbewegung der Erde so langsam sind, daſs man die Gröſsen $\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)$, $n.\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)$, $n.\left(\frac{dv}{dt}\right)$ vernachlässigen kann; dann giebt diese Gleichung, wenn man sie integrirt,

$$\alpha y = \frac{\alpha V'}{g}.$$

Der Theil von $\alpha V'$, welcher von der Wirkung des Gestirns L abhängt, ist nach Satz 4, gleich

$$\frac{L}{4r^3}.[\sin v^2 - \tfrac{1}{2}\cos v^2].[1 + 3\cos 2\theta]$$

$$+ \frac{3L}{r^3}.\sin v.\cos v.\sin\theta.\cos\theta.\cos(nt + \varpi - \psi)$$

$$+ \frac{3L}{4r^3}.\cos v^2.\sin\theta^2.\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi).$$

Man nehme an, dafs der entsprechende Theil von αy dieser Gröfse, in eine unbestimmte Gröfse Q multiplicirt, gleich sey; da dies Product von der Form $Y^{(2)}$ ist, oder statt $Y^{(2)}$ der partiellen Differenzialgleichung

$$0 = \left\{ \frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dY^{(2)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 Y^{(2)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + 6.Y^{(2)}$$

Genüge thut: so ist der Theil von $\alpha V'$, welcher aus der Wirkung der Lage des Flüssigen entsteht, deren innerer Halbmesser der Einheit, und deren äufserer Halbmesser gleich $1 + \alpha y$ ist, nach dem 2ten Satz gleich $\frac{4}{5}\pi . Y^{(2)}$, oder $\frac{3}{5\varrho} . g . Y^{(2)}$; die Gleichung $\alpha g y = \alpha V'$ giebt folglich:

$$\alpha y = \frac{L}{4r^3.g.\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}.(\sin v^2 - \tfrac{1}{2}\cos v^2).(1+3\cos 2\theta)$$

$$+ \frac{3L}{r^3.g.\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}.\sin v.\cos v.\sin\theta.\cos\theta.\cos(nt+\varpi-\psi)$$

$$+ \frac{3L}{4r^3.g.\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}.\cos v^2.\sin\theta^2.\cos(2nt+2\varpi-2\psi).$$

Sind Sonne und Mond in Conjunction und haben sie dieselbe Abweichung, so ist der Ueberschufs der Fluth zu Mittag über die darauf folgende Ebbe in der von uns betrachteten Hypothese gleich

$$\frac{3L}{2r^3.g.\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}.(1+e).\sin\theta^2.\cos v^2.(1+2\tang v\cot\theta),$$

und der Ueberschufs der Fluth zu Mitternacht über dieselbe Ebbe ist sehr nahe gleich

$$\frac{3L}{2r^3.g.\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}.(1+e).\sin\theta^2.\cos v^2.(1-2\tang v.\cot\theta).$$

Diese beiden Ueberschüsse haben daher zu einander das Verhältniſs von $1 + 2 \tan \nu \cdot \cot \theta$ zu $1 - 2 \tan \nu \cdot \cot \theta$; da nun θ für Brest gleich $46^\circ 26'$ ($41^\circ 37'$) ist, so werden diese beiden Ueberschüsse, wenn beide Gestirne 23° ($20^\circ 42'$) nördliche Abweichung haben, das Verhältniſs von 1,7953 zu 0,2047 haben, so daſs der erste ungefähr achtmal gröſser ist als der zweyte. Nach den Beobachtungen sind aber beide Ueberschüsse wenig von einander verschieden; die Hypothese, wovon hier die Rede ist, ist folglich sehr entfernt, die Beobachtungen in dieser Rücksicht darzustellen, und man sieht, daſs es unvermeidlich nothwendig ist, auf die Umwälzung der Erde und auf die Bewegung der anziehenden Gestirne in der Theorie der Ebbe und Fluth des Meeres Rücksicht zu nehmen.

Zweytes Kapitel.

Von der Sicherheit des Gleichgewichts des Meeres.

13. Wir haben im 2ten Satz bemerkt, daſs das Gleichgewicht sicher ist, so oft die mittlere Dichte der Erde die Dichte des Meeres übertrifft, wenn die Erde ohne Umdrehungsbewegung und die Tiefe des Meeres überall gleich groſs ist. Wir wollen jetzt diesen Lehrsatz allgemeiner machen und zeigen, daſs er bey jedem Gesetz der Tiefe des Meeres und bey jeder Umdrehungsbewegung der Erde Statt findet.

Wir nehmen hierzu die allgemeinen Gleichungen der Bewegung des Meeres wieder vor, welche wir im 36sten Satz des ersten Buches gegeben haben:

$$0 = \left(\frac{d.r^2 s}{dr}\right) + r^2 . \left[\left(\frac{dv}{d\varpi}\right) - \left(\frac{d\,.\,u\,.\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right)\right]; \quad (5)$$

$$\left(\frac{d^2 u}{dt^2}\right) - 2n\mu . \sqrt{1-\mu^2} . \left(\frac{dv}{dt}\right) = g . \left(\frac{dy'}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2}; \quad (6)$$

$$(1-\mu^2) . \left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right) + 2n\mu . \sqrt{1-\mu^2} . \left(\frac{du}{dt}\right) = -g . \left(\frac{dy'}{d\varpi}\right). \quad (7)$$

Diese Gleichungen beziehen sich auf irgend ein Wassertheilchen im Innern oder an der Oberfläche des Meeres, welches Theilchen durch die Koordinaten $\theta + \alpha u$, $\varpi + \alpha v$ und $r + \alpha s$ bestimmt wird, wo $r + \alpha s$ der Halbmesser ist, welcher vom Schwerpunkt der Erde zum Theilchen gezogen worden, und wo gy' gleich $gy - V'$ ist.

Integrirt man die Gleichung (5) von der Oberfläche des vom Meer bedeckten Sphäroids an bis zur Oberfläche des Meeres, so erhält man

$$r'^2 . s' - r_,^2 . s_, = \int r^2 . dr . \left[\left(\frac{d . u . \sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{dv}{d\varpi}\right)\right],$$

wo r' und s' sich auf die Oberfläche des Meeres, $r_,$ und $s_,$ hingegen auf die Oberfläche des Sphäroids beziehen. Bezeichnet man die sehr kleine Tiefe des Meeres durch γ, so hat man $r' = r_, + \gamma$; dies giebt

$$r'^2 . s' - r_,^2 . s_, = r_,^2 . (s' - s_,) + 2 r_, \gamma s' + \gamma^2 s',$$

und man erhält folglich sehr nahe

$$r'^2 s' - r_,^2 s_, = s' - s_,,$$

wenn man den mittlern Halbmesser der Erde zur Einheit annimmt. Nun ist aber

$$\alpha s' = \alpha y + \alpha u' . \left(\frac{dr'}{d\theta}\right) + \alpha v' . \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right),$$

wo u' und v' sich auf die Oberfläche des Meeres beziehen. Man findet eben so

$$\alpha s_, = \alpha u_, . \left(\frac{dr_,}{d\theta}\right) + \alpha v_, . \left(\frac{dr_,}{d\varpi}\right),$$

wo $u_,$ und $v_,$ sich auf die Oberfläche des Sphäroids beziehen; man hat also

$$s' - s_, = y - u' . \left(\frac{dr'}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2} + u_, . \left(\frac{dr_,}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2} + v' . \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right) - v_, . \left(\frac{dr_,}{d\varpi}\right);$$

man erhält folglich sehr nahe

$$\gamma = u' . \left(\frac{dr'}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2} - u_, . \left(\frac{dr_,}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2} - v' . \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right) + v_, . \left(\frac{dr_,}{d\varpi}\right)$$

$$+ \int dr . \left[\left(\frac{d . u . \sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{dv}{d\varpi}\right)\right]. \quad (8)$$

Diese Gleichung ist nicht so wie die Gleichung (1) des ersten Satzes auf die Bedingung eingeschränkt, daſs sowohl u als auch v, für alle auf demselben Halbmesser liegende Theilchen gleich groſs sind, und man sieht leicht, daſs beide Gleichungen übereinstimmen, wenn man diese Bedingung erfüllt.

Multiplicirt man nun die Gleichung (6) mit $dr . d\mu . d\varpi . \left(\frac{du}{dt}\right)$, und die Gleichung (7) mit $dr . d\mu . d\varpi . \left(\frac{dv}{dt}\right)$, und addirt sie, so ist das Integral gleich der Summe

$\iiint dr$

$$\int\int\int dr\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\left[\left(\frac{du}{dt}\right).\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right).\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right).(1-\mu^2)\right]$$

$$=\int\int\int dr\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\left[g.\left(\frac{dy'}{d\mu}\right).\left(\frac{du}{dt}\right).\sqrt{1-\mu^2}-g.\left(\frac{dy'}{d\varpi}\right).\left(\frac{dv}{dt}\right)\right].\quad (9)$$

Man muſs diese Integrale, um sie auf die ganze Masse des Flüssigen zu erstrecken, von $r = r_{,}$ bis $r = r'$, von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$, und von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 2\pi$ nehmen. Integrirt man in Beziehung auf μ und bemerkt man, daſs y' von r unabhängig ist, so erhält man

$$\int\int dr\,.\,d\mu\,.\left(\frac{du}{dt}\right).\left(\frac{dy'}{dt}\right).\sqrt{1-\mu^2}$$

$$=\int y'.\left(\frac{du}{dt}\right).dr.\sqrt{1-\mu^2}-\int y'.\left\{\frac{d\int\left(\frac{du}{dt}\right).dr.\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right\}.d\mu+\text{Best. Gr.}$$

Man hat an den beiden Grenzen des Integrals, wo $\mu = -1$ und $\mu = 1$ ist, $y'.\left(\frac{du}{dt}\right).\sqrt{1-\mu^2} = 0$; folglich

$$0=\int y'.\left(\frac{du}{dt}\right).dr.\sqrt{1+\mu^2}+\text{Best. Gröſse},$$

und

$$\int\int dr\,.\,d\mu\,.\left(\frac{du}{dt}\right).\left(\frac{dy'}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}=-\int y'.\left\{\frac{d\,.\int\left(\frac{du}{dt}\right).dr\,.\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right\}.d\mu.$$

Man hat aber

$$\left\{\frac{d\,.\int\left(\frac{du}{dt}\right).dr.\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right\}=\int dr\,.\left\{\frac{d.\left[\left(\frac{du}{dt}\right).\sqrt{1-\mu^2}\right]}{d\mu}\right\}$$

$$+\left(\frac{du'}{dt}\right).\left(\frac{dr'}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}-\left(\frac{du_{,}}{dt}\right).\left(\frac{dr_{,}}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2};$$

folglich

$$\iiint dr \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \left(\frac{du}{dt}\right) . \left(\frac{dy'}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2}$$

$$= \iint y' . d\mu . d\varpi . \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{du_{,}}{dt}\right) . \left(\frac{dr_{,}}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2} - \left(\frac{du'}{dt}\right) . \left(\frac{dr'}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2} \\ - \int dr . \left\{ \frac{\left[d . \left(\frac{du}{dt}\right) . \sqrt{1-\mu^2} \right]}{d\mu} \right\} \end{array} \right\} .$$

Integrirt man eben so in Beziehung auf ϖ, so findet man

$$\iint dr . d\varpi . \left(\frac{dv}{dt}\right) . \left(\frac{dy'}{d\varpi}\right) = \int y' . \left(\frac{dv}{dt}\right) . dr - \int y' . \left\{ \frac{d . \int \left(\frac{dv}{dt}\right) . dr}{d\varpi} \right\} . d\varpi + \text{Best. Größe.}$$

Der Werth von $y' . \left(\frac{du}{dt}\right)$ ist an den beiden Grenzen des Integrals, wo $\varpi = 0$ und $\varpi = 2\pi$ ist, derselbe, weil er sich auf dasselbe Theilchen bezieht. Man hat also

$$\int y' . \left(\frac{dv}{dt}\right) . dr + \text{Beständige Größe} = 0,$$

und folglich

$$\iint dr \,.\, d\varpi \,.\, \left(\frac{dv}{dt}\right) . \left(\frac{dy'}{d\varpi}\right) = -\int y' . \left\{ \frac{d . \int \left(\frac{dv}{dt}\right) . dr}{d\varpi} \right\} . d\varpi .$$

Nun ist aber

$$\left\{ \frac{d . \int \left(\frac{dv}{dt}\right) . dr}{d\varpi} \right\} = \int dr . \left(\frac{d^2 v}{d\varpi . dt}\right) + \left(\frac{dv'}{dt}\right) . \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right) - \left(\frac{dv_{,}}{dt}\right) . \left(\frac{dr_{,}}{d\varpi}\right);$$

folglich

$$\iint dr \,.\, d\varpi \,.\, \left(\frac{dv}{dt}\right) . \left(\frac{dy'}{d\varpi}\right)$$

$$= -\int y' . d\varpi . \left[\left(\frac{dv'}{dt}\right) . \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right) - \left(\frac{dv_{,}}{dt}\right) . \left(\frac{dr_{,}}{d\varpi}\right) + \int dr . \left(\frac{d^2 v}{d\varpi . dt}\right) \right],$$

und

$$\iiint dr\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\left[g\,.\left(\frac{du}{dt}\right).\left(\frac{dy'}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}-g\,.\left(\frac{dv}{dt}\right).\left(\frac{dy'}{d\varpi}\right)\right]$$

$$=\iint gy'.d\mu.d\varpi.\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{du_{,}}{dt}\right).\left(\frac{dr_{,}}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}-\left(\frac{du'}{dt}\right).\left(\frac{dr'}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}+\left(\frac{dv'}{dt}\right).\left(\frac{dr'}{d\varpi}\right)\\ -\left(\frac{dv_{,}}{dt}\right).\left(\frac{dr_{,}}{d\varpi}\right)-\int dr.\left\{\frac{d.\left[\left(\frac{du}{dt}\right).\sqrt{1-\mu^2}\right]}{d\mu}\right\}-\left(\frac{d^2v}{d\varpi.dt}\right)\end{array}\right\}.$$

Der zweyte Theil dieser Gleichung, wird durch die Gleichung (8) auf das Glied $-\iint gy'\,.\left(\frac{dy}{dt}\right).\,d\mu\,.\,d\varpi$ reducirt, und die Gleichung (9) verwandelt sich daher in folgende:

$$\iiint dr\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\left[\left(\frac{du}{dt}\right).\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right).\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right).(1-\mu^2)\right]$$

$$=-\iint d\mu\,.\,d\varpi\,.\,gy'\,.\left(\frac{dy}{dt}\right). \quad (10)$$

Wir werden hier die Anziehung der Gestirne aufser Acht lassen, und nur die gegenseitige Anziehung der Theilchen des Meeres und des Erdsphäroids betrachten. Der Werth von V' entspringt dann aus der Anziehung einer Wasserlage, deren innerer Halbmesser r' und deren äufserer Halbmesser $r'+\alpha y$ ist, wo r' sehr nahe der Einheit gleich ist. Man hat im 2 ten Satz gesehen, dafs man

$$V'=\frac{3g}{\varrho}\,.\,[Y^{(0)}+\tfrac{1}{3}\,Y^{(1)}+\tfrac{1}{5}\,Y^{(2)}+\tfrac{1}{7}\,Y^{(3)}+\ldots]$$

hat, wenn man $y=Y^{(0)}+Y^{(1)}+Y^{(2)}+Y^{(3)}+Y^{(4)}+$ etc. setzt. Man hat aber im Allgemeinen, wenn i und i' verschiedene Zahlen sind

$$\iint Y^{(i)}\,.\,Y^{(i')}\,.\,d\mu\,.\,d\varpi=0,$$

und folglich

$$\iint y'\,.\left(\frac{dy}{dt}\right).\,d\mu\,.\,d\varpi$$

$$=\iint d\mu.d\varpi.\left\{\begin{array}{l}\left(1-\frac{3}{\varrho}\right).Y^{(0)}.\left(\frac{dY^{(0)}}{dt}\right)+\left(1-\frac{1}{\varrho}\right).Y^{(1)}.\left(\frac{dY^{(1)}}{dt}\right)\\ +\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right).Y^{(2)}.\left(\frac{dY^{(2)}}{dt}\right)+\left(1-\frac{3}{7\varrho}\right).Y^{(3)}.\left(\frac{dY^{(3)}}{dt}\right)+\text{etc.}\end{array}\right\}.$$

Man hat nach dem 2 ten Satz $Y^{(0)}=0$; die Gleichung (10) verwandelt sich also, wenn man sie in Beziehung auf die *Zeit* t integrirt, in folgende:

$$\iiint dr \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 . (1-\mu^2)\right]$$

$$= M - g.\iint d\mu . d\varpi . \left[\left(1-\frac{1}{\varrho}\right).Y^{(1)2} + \left(1-\frac{3}{5\varrho}\right).Y^{(2)2} + \left(1-\frac{3}{7\varrho}\right).Y^{(3)2} + \text{etc.}\right]; \quad (11)$$

wo M eine willkührliche beständige Gröfse ist. Man sieht leicht, dafs der erste Theil dieser Gleichung sehr nahe die lebendige Kraft der flüssigen Masse auf das Erdsphäroid ausdrückt, wenn man nur die relative Geschwindigkeit ihrer Theilchen betrachtet.

M ist eine beständige, von der Zeit t unabhängige Gröfse, und welche vom ursprünglichen Zustand der Bewegung des Meeres abhängt; sie ist sehr klein, wenn man annimmt, dafs die ursprüngliche Erschütterung wenig beträchtlich war.

Ist ϱ gröfser als die Einheit, so wird die Funktion

$$-g\iint d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \left[\left(1-\frac{1}{\varrho}\right). Y^{(1)2} + \left(1-\frac{3}{5\varrho}\right). Y^{(2)2} + \text{etc.}\right]$$

beständig negativ seyn; sie wird kleiner als M seyn, weil der erste Theil der vorhergehenden Gleichung nothwendig positiv ist; die Gröfsen $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ etc. dürfen also keine wachsenden Exponentialgröfsen oder Kreisbogen enthalten; woraus folgt, dafs das Gleichgewicht des Meeres sicher ist, wenn seine Dichte kleiner ist als die mittlere Dichte der Erde.

14. Uebertrifft die Dichte des Meeres die mittlere Dichte der Erde, so ist seine Figur in einer grofsen Anzahl von Fällen nicht mehr sicher. Man hat im 2ten Satz gesehen, dafs man das Meer so erschüttern kann, dafs die Gleichung seiner Oberfläche die Zeit in der Gestalt von wachsenden Exponentialgröfsen enthält, wenn die Erde keine Umwälzungsbewegung hat, wenn die Tiefe des Meeres beständig ist, und wenn ϱ kleiner als die Einheit ist: dies ist der Sicherheit des Gleichgewichts entgegen. Dasselbe findet im Allgemeinen auch dann Statt, wenn die Erde eine Umwälzungsbewegung hat, und wenn das Sphäroid, welches das Meer bedeckt, ein durch Umdrehung entstandener Körper ist, welches auch immer übrigens das Gesetz der Tiefe des Meeres seyn mag.

Wir nehmen die Gleichung (11) wieder vor, in welcher wir annehmen werden, dafs die Werthe von u und von v für alle auf demselben Halbmesser

sich befindende Theilchen sehr nahe gleich groſs sind. Man nehme ferner an, daſs man beym Anfang der Bewegung $y = h\mu$, $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$, $\left(\frac{du}{dt}\right) = 0$, $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$ hat. Das Flüssige, welches hernach seiner Schwere und der Anziehung seiner Theilchen überlassen war, hat eine Bewegung annehmen müssen, die aus einer unendlichen Menge einzelner Schwingungen zusammengesetzt war, welche so beschaffen waren, daſs man durch ihre Vereinigung

$$y = a \cdot \cos(it + \varepsilon) + a_1 \cdot \cos(i_1 t + \varepsilon_1) + a_2 \cdot \cos(i_2 t + \varepsilon_2) + \text{etc.}$$

erhält, wo a, a_1, a_2 etc. Funktionen von μ sind. Die beständigen Gröſsen i, i_1, i_2 etc. ε, ε_1, ε_2 etc. müssen so beschaffen seyn, daſs man beym Anfang der Bewegung, wo $t = 0$ ist,

$$a \cdot \cos\varepsilon + a_1 \cdot \cos\varepsilon_1 + a_2 \cdot \cos\varepsilon_2 + \text{etc.} = h\mu;$$
$$a i \cdot \sin\varepsilon + a_1 i_1 \cdot \sin\varepsilon_1 + a_2 i_2 \cdot \sin\varepsilon_2 + \text{etc.} = 0$$

hat. Die zugehörenden Werthe von $\left(\frac{du}{dt}\right)$ und von $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ sind nach Satz 3 von der Form

$$-ib \cdot \sin(it + \varepsilon) - i_1 b_1 \cdot \sin(i_1 t + \varepsilon_1) - \text{etc.};$$
$$ic \cdot \cos(it + \varepsilon) + i_1 c_1 \cdot \cos(i_1 t + \varepsilon_1) + \text{etc.},$$

und sie müssen für $t = 0$ auch gleich Null werden. Dieses festgesetzt, substituire man die vorhergehenden Werthe in die Gleichung (11); sie verwandelt sich dann, wenn man sie in Beziehung auf r integrirt, in folgende:

$$\iint \frac{\gamma . d\mu . d\varpi}{2} . \Sigma i^2 . [c^2(1-\mu^2) + b^2] + \int \gamma . d\mu . d\varpi . \Sigma i^2 \left[\frac{c^2(1-\mu^2) - b^2}{2}\right] . \cos(2it + 2\varepsilon)$$
$$+ \iint \gamma . d\mu . d\varpi . \Sigma i i_1 . [b b_1 + c c_1 (1 - \mu^2)] . \cos(it - i_1 t + \varepsilon - \varepsilon_1)$$
$$+ \iint \gamma . d\mu . d\varpi . \Sigma i i_1 . [c c_1 (1 - \mu^2) - b b_1] . \cos(it + i_1 t + \varepsilon + \varepsilon_1)$$
$$= M - g . \iint \frac{d\mu . d\varpi}{2} . \Sigma . \left[\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right) . P^{(1)^2} + \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) . P^{(2)^2} + \text{etc.}\right]$$
$$- g \iint . \frac{d\mu . d\varpi}{2} . \Sigma . \left[\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right) . P^{(1)^2} + \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) . P^{(2)^2} + \text{etc.}\right] . \cos(2it + 2\varepsilon)$$
$$- g . \iint . d\mu . d\varpi . \Sigma . \left[\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right) . P^{(1)} . P_1^{(1)} + \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) . P^{(2)} . P_1^{(2)} + \text{etc.}\right]$$
$$[\cos(it - i_1 t + \varepsilon - \varepsilon_1) + \cos(it + i_1 t + \varepsilon + \varepsilon_1)]; \qquad (12)$$

wo Σ, das Zeichen der endlichen Integrale, sich auf alle Werthe i, i_1 etc. erstreckt. $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ etc. sind die Koeffizienten von $\cos(it + \varepsilon)$ in $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ etc.; $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$ etc. sind die Koeffizienten von $\cos(i_1 t + \varepsilon_1)$ in denselben Gröſsen, und so ferner. Die Vergleichung der Glieder dieser Gleichung, welche von t abhängen, giebt

$$\iint \frac{\gamma \,.\, d\mu \,.\, d\varpi}{2} \,.\, \Sigma \,.\, i^2 \,.\, [c^2(1-\mu^2) + b^2]$$

$$= M - g \,.\iint \frac{d\mu \,.\, d\varpi}{2} \,.\, \Sigma \,.\left[\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right).\, P^{(1)2} + \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right).\, P^{(2)2} + \text{etc.}\right]. \quad (13)$$

Man hat ferner

$$\iint \frac{\gamma \,.\, d\mu \,.\, d\varpi}{2} \,.\, i^2 \,.\, [c^2(1-\mu^2) - b^2]$$

$$= - g \,.\iint . \frac{d\mu \,.\, d\varpi}{2} \,.\, \Sigma \,.\left[\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right).\, P^{(1)2} + \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right).\, P^{(2)2} + \text{etc.}\right]; \quad (14)$$

denn das Flüssige kann jede der einfachen Schwingungen, welche sich auf die Koeffizienten i, i_1 etc. beziehen, besonders haben, weil die Glieder der Gleichungen (A) und (B) des 3ten Satzes, welche in $\sin(it + \varepsilon)$ und $\cos(it + \varepsilon)$ multiplicirt sind, sich einzeln aufheben müssen, wenn man in diesen Gleichungen statt y, $\left(\frac{du}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ ihre vorhergehenden Werthe substituirt. Betrachtet man aber bloſs die Schwankungen, welche sich auf den Winkel $(it + \varepsilon)$ beziehen, und nimmt man an, daſs die von allen übrigen Winkeln abhängenden Glieder gleich Null sind: so giebt die Gleichung (12), wenn man die Koeffizienten von $\cos(2it + 2\varepsilon)$ mit einander vergleicht, die Gleichung (14). Man erhält also, wenn man alle Gleichungen, welche der letzten Gleichung ähnlich sind, zusammennimmt

$$\iint \frac{\gamma \,.\, d\mu \,.\, d\varpi}{2} \,.\, \Sigma \,.\, i^2 \,.\, [c^2(1-\mu^2) - b^2]$$

$$= - g \,.\iint . \frac{d\mu \,.\, d\varpi}{2} \,.\, \Sigma \,.\left[\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right).\, P^{(1)2} + \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right).\, P^{(2)2} + \text{etc.}\right].$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung (13) ab, so findet man

$$\iint \gamma \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \Sigma \,.\, i^2 b^2 = M.$$

Man hat beym Anfang der Bewegung vermöge der Voraussetzung, $y = Y^{(1)} = h\mu$;

$\left(\frac{du}{dt}\right) = 0$; $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$; die Gleichung (11) giebt daher

$$0 = M - \tfrac{4}{3}\pi . gh^2 . \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right)$$

und folglich

$$\int\int \gamma . d\mu . d\varpi . (i^2 b^2 + i_1^2 b_1^2 + \text{etc.}) = \tfrac{4}{3}\pi . g . \left(1 - \frac{1}{\varrho}\right) . h^2.$$

Ist ϱ kleiner als die Einheit, oder welches dasselbe ist, übertrifft die Dichte des Meeres die mittlere Dichte der Erde, so ist der zweyte Theil dieser Gleichung negativ; der erste Theil ist folglich auch negativ, welches unmöglich ist, so lange i^2, i_1^2 etc. positiv sind. Irgend eine dieser Gröſsen ist also in diesem Fall negativ; der Ausdruck von y enthält daher Exponentialgröſsen, und das Gleichgewicht ist nicht sicher.

Drittes Kapitel.

Von der Art, wie man in der Theorie der Ebbe und Fluth des Meeres auf die verschiedenen Umstände, welche in jedem Hafen auf dieselbe Einfluſs haben, Rücksicht nehmen kann.

15. Wir haben im ersten Kapitel angenommen, daſs die Erde ein durch Umdrehung entstandener fester Körper ist, und wir haben die Schwankungen des Meeres in dieser Hypothese bestimmt: wir wollen uns nun der Natur nähern und der Erde eine beliebige Figur geben. Die Ungleichheiten der ersten Art werden in diesem Fall, vermöge des Widerstands welchen das Meer erfährt,
6. unverändert so bleiben, so wie wir sie im 7ten Satz bestimmt haben. Für die Ungleichheiten der zweyten und dritten Art wird der Werth von y aus einer Reihe Sinus und Kosinus bestehen, deren Winkel proportional mit der Zeit t wachsen, und wenn man it einen dieser Winkel nennt, so hat man

$$y = F \,.\, \cos it + G \,.\, \sin it;$$
$$gy - V' = F' . \cos it + G' . \sin it;$$
$$u = H . \cos it + K \,.\, \sin it;$$
$$v = P \,.\, \cos it + Q \,.\, \sin it.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (A) und (B) des 3ten Satzes, so giebt die Vergleichung der Koeffizienten von sin it und von cos it folgende sechs Gleichungen:

$$i^2 H + 2\,ni \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, Q = -\left(\frac{d F'}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2};$$
$$i^2 K - 2\,ni \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1-\mu^2} \,.\, P = -\left(\frac{d G'}{d\mu}\right) . \sqrt{1-\mu^2};$$

$(1-\mu^2)$

$$(1-\mu^2).i^2.P - 2ni.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.K = \left(\frac{dF'}{d\varpi}\right);$$

$$(1-\mu^2).i^2.Q + 2ni.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.H = \left(\frac{dG'}{d\varpi}\right);$$

$$F = \left(\frac{d.\gamma H.\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{d.\gamma P}{d\varpi}\right);$$

$$G = \left(\frac{d.\gamma K.\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) - \left(\frac{d.\gamma Q}{d\varpi}\right).$$

Hieraus findet man leicht

$$H = \frac{-\left(\frac{dF'}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2} - \frac{2n}{i}.\mu.\left(\frac{dG'}{d\varpi}\right).\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}}{i^2 - 4n^2\mu^2};$$

$$K = \frac{-\left(\frac{dG'}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2} + \frac{2n}{i}.\mu.\left(\frac{dF'}{d\varpi}\right).\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}}{i^2 - 4n^2\mu^2};$$

$$P = \frac{\left(\frac{dF'}{d\varpi}\right) - \frac{2n}{i}.\mu.(1-\mu^2).\left(\frac{dG'}{d\mu}\right)}{(1-\mu^2).(i^2 - 4n^2\mu^2)};$$

$$Q = \frac{\left(\frac{dG'}{d\varpi}\right) + \frac{2n}{i}.\mu.(1-\mu^2).\left(\frac{dF'}{d\mu}\right)}{(1-\mu^2).(i^2 - 4n^2\mu^2)};$$

dies giebt

$$F = -\frac{\gamma.(1-\mu^2).\left(\frac{d^2F'}{d\mu^2}\right)}{i^2 - 4n^2\mu^2} - \frac{\gamma.\left(\frac{d^2F'}{d\varpi^2}\right)}{(1-\mu^2).(i^2-4n^2\mu^2)} - \left\{\frac{d.\left(\frac{\gamma.(1-\mu^2)}{i^2-4n^2\mu^2}\right)}{d\mu}\right\}.\left(\frac{dF'}{d\mu}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right).\left(\frac{dF'}{d\varpi}\right)}{(1-\mu^2).(i^2-4n^2\mu^2)} + \frac{\frac{2n}{i}.\mu.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)}{i^2-4n^2\mu^2}.\left(\frac{dG'}{d\mu}\right) - \frac{2n}{i}.\left\{\frac{d.\left(\frac{\gamma\mu}{i^2-4n^2\mu^2}\right)}{d\mu}\right\}.\left(\frac{dG'}{d\varpi}\right).$$

Verwandelt man in diesen Gleichungen F in G; F' in G' und umgekehrt, und ändert man das Zeichen der in $\frac{2n}{i}$ multiplicirten Glieder, so erhält man eine neue Gleichung zwischen G, G', F', welche mit der vorhergehenden verbunden F und G bestimmen wird.

Man kann vermittelst dieser Gleichungen das Gesetz der Tiefe des Meeres, wodurch die Schwankungen der zweyten Art für alle Oerter der Erde gleich Null werden, allgemein bestimmen. Da nämlich für diese Schwankungen i sehr wenig von n verschieden ist, so kann man in den vorhergehenden Gleichungen $i = n$ setzen. Da überdies F und G vermöge der Voraussetzung gleich Null sind, so sind die Werthe von F' und G', nach Satz 7, gleich $M.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi$ und $-M.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi$; wo M eine Funktion von t aber unabhängig von μ und von ϖ ist. Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung zwischen F, F' und G', so findet man

$$0 = \cos\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2} + \frac{\mu.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right).\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Die Gleichung zwischen G, G' und F' giebt

$$0 = \sin\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2} - \frac{\mu.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right).\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Hieraus erhält man $\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right) = 0$ und $\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right) = 0$, und folglich γ gleich einer beständigen Gröſse. Die Schwankungen der zweyten Art können daher nur in dem einzigen Fall für die ganze Erde verschwinden, wenn die Tiefe des Meeres beständig ist.

Sind die Schwankungen der dritten Art für die ganze Erde gleich Null, so sind F und G in Beziehung auf diese Schwankungen gleich Null, und man erhält nach Satz 9:

$$F' = N.(1-\mu^2).\cos 2\varpi; \qquad G' = -N.(1-\mu^2).\sin 2\varpi;$$

wo N eine Funktion von t, aber unabhängig von μ und von ϖ ist. Man kann überdies i sehr nahe gleich $2n$ setzen; die Gleichung zwischen F, F' und G' giebt dann

$$0 = \frac{2\gamma.\cos 2\varpi}{1-\mu^2} + \mu.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right).\cos 2\varpi + \frac{(1+\mu^2).\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right).\sin 2\varpi}{2(1-\mu^2)}.$$

Die Gleichung zwischen G, G' und F' giebt

$$o = \frac{2\gamma . \sin 2\varpi}{1-\mu^2} + \mu . \left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right) . \sin 2\varpi - \frac{(1+\mu^2).\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right) . \cos 2\varpi}{2(1-\mu^2)}.$$

Hieraus erhält man

$$\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right) = o \quad \text{und} \quad o = \frac{2\gamma}{1-\mu^2} + \mu . \left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right).$$

Integrirt man die letzte Gleichung, so findet man

$$\gamma = \frac{A.(1-\mu^2)}{\mu^2},$$

wo A eine willkührliche beständige Gröfse ist. Die Tiefe des Meeres unterm Aequator, wo $\mu = o$ ist, würde nach diesem Werth von γ unendlich grofs seyn, welches nicht angenommen werden kann; es giebt also kein annehmbares Gesetz für die Tiefe des Meeres, wodurch die Schwankungen der dritten Art für die ganze Erde gleich Null werden könnten.

Die Schnelligkeit der Winkelumwälzungsbewegung der Erde in Vergleichung mit der Winkelumdrehungsbewegung der Sonne und des Mondes verstattet, $i = n$ in den Schwankungen der zweyten Art, und $i = 2n$ in den Schwankungen der dritten Art zu setzen. Man kann leicht aus der vorhergehenden Analysis und aus dem 6, 8 und 9ten Satz schliefsen, dafs αy, die Erhöhung eines Theilchens des Meeres über die Fläche, welche ohne die Wirkung der beiden Gestirne die Fläche des Gleichgewichts seyn würde, sehr nahe von folgender Form ist, wenn man die auf die Sonne sich beziehenden Gröfsen L, v, ψ und r für den Mond mit einem Strich bezeichnet:

$$\alpha y = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g.\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)} . \left[\frac{L}{r^3}.(1-3\sin v^2) + \frac{L'}{r'^3} . (1-3\sin v'^2)\right]$$

$$+ A . \left[\frac{L}{r^3}.\sin v.\cos v.\cos(nt+\varpi-\psi-\beta) + \frac{L'}{r'^3}.\sin v'.\cos v'.\cos(nt+\varpi-\psi'-\beta)\right]$$

$$+ B . \left[\frac{L}{r^3}.\cos v^2.\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda) + \frac{L'}{r'^3}.\cos v'^2.\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right];$$

wo A, B, β und λ Funktionen von μ und ϖ sind, welche vom Gesetz der Tiefe des Meeres abhängen. Die Allgemeinheit dieser Form umfafst eine grofse Anzahl von Aenderungen der Erscheinungen der Ebbe und Fluth, welche in den verschiedenen Häfen Statt haben können. Ist die Erde ein durch Umdre-

hung erzeugter Körper, so folgt aus dem 7ten und 9ten Satz, daſs die Zeit des Maximums und Minimums bey den Schwankungen der zweyten und dritten Art, mit der Culminationszeit des Gestirns, welches dieselben hervorbringt, übereinstimmt; man sieht aber aus der vorhergehenden Formel, daſs diese Zeiten im allgemeinen Fall, wo das Meer irgend eine Tiefe hat, sehr verschieden seyn können, und daſs die Zeiten der Ebbe und der Fluth von einem Hafen zum andern sehr veränderlich seyn können, so wie die Beobachtungen dies geben.

Die Schwankungen der zweyten Art können in einigen Häfen unmerklich seyn, dahingegen in andern die Schwankungen der dritten Art es sind. Die Maxima und Minima dieser Schwankungen würden aber nach der vorhergehenden Formel auf die Durchgänge ihrer respectiven Gestirne durch den Meridian in gleichen Zwischenräumen folgen, weil die Gröſsen β und λ für beide Gestirne dieselben sind; wir werden aber in der Folge sehen, daſs dies Resultat den Beobachtungen entgegen ist; die vorhergehende, wenn gleich allgemeine Formel, thut daher doch nicht allen beobachteten Erscheinungen Genüge. Die Unregelmäſsigkeit der Tiefe des Meeres, die Art, nach welcher es auf der Erde verbreitet ist, die Lage und der Abhang der Ufer und deren Verhältniſs gegen die benachbarten Küsten, die Ströhme, der Widerstand, welchen die Gewässer erfahren: dies sind sämmtlich Ursachen, welche man unmöglich in Rechnung bringen kann, und welche auf die Schwankungen dieser groſsen flüssigen Masse Einfluſs haben. Wir können daher nur die allgemeinen Erscheinungen, welche aus den Anziehungen der Sonne und des Monds entstehen müssen, zergliedern, und aus den Beobachtungen die Data herleiten, deren Kenntniſs unumgänglich ist, um die Theorie der Ebbe und Fluth in jedem Hafen zu ergänzen, und welche Data eben so viel willkührliche Gröſsen sind, die von der Ausdehnung, Gröſse des Meeres, von seiner Tiefe und von den Lokalumständen des Hafens abhängen.

16. Wir werden nun die Theorie der Schwankungen des Meeres und ihre Uebereinstimmung mit den Beobachtungen aus diesem allgemeinen Gesichtspunkt betrachten. Man kann das Meer wie eine unendliche Menge Theilchen ansehen, welche eine gegenseitige Wirkung auf einander, theils durch ihren Druck, theils durch ihre gegenseitige Anziehung, ausüben, und auf welche noch überdies die Schwere und die anziehenden Kräfte der Sonne und des Mondes

wirken. Das Meer würde ohne die Wirkung dieser letztern Kräfte schon längst im Gleichgewicht seyn; seine Bewegungen müssen sich also nach dem Gesetz dieser Kräfte richten.

Man bezeichne, um die anziehenden Kräfte der Sonne und des Mondes auf ein Theilchen der Oberfläche des Meeres zu erhalten, welches durch die Koordinaten R, ϖ und θ bestimmt wird, wo R der vom Mittelpunkt der Erde an das Theilchen gezogene Halbmesser ist; man bezeichne die Funktion

$$\frac{3LR^2}{2r^3} \cdot \left[[\sin v \cdot \cos\theta + \cos v \cdot \sin\theta \cdot \cos(nt + \varpi - \psi)]^2 - \tfrac{1}{3}\right]$$

$$+ \frac{3L'R^2}{2r'^3} \cdot \left[[\sin v' \cdot \cos\theta + \cos v' \cdot \sin\theta \cdot \cos(nt + \varpi - \psi')]^2 - \tfrac{1}{3}\right]$$

durch $\alpha V'$: so wird die Summe der Kräfte der Sonne und des Mondes, nach der Richtung des Erdhalbmessers zerlegt, gleich $\alpha \cdot \left(\frac{dV'}{dR}\right)$ oder gleich $2\alpha \cdot V'$ seyn, wenn man nach der Differenziation $R = 1$ setzt. Die Summe dieser Kräfte, senkrecht auf den Erdhalbmesser und in der Ebene des Mittagskreises des Theilchens zerlegt, ist gleich $\alpha \cdot \left(\frac{dV'}{d\theta}\right)$; und die Summe derselben Kräfte, senkrecht auf die Ebene dieses Mittagskreises zerlegt, wird gleich $\frac{\alpha}{\sin\theta} \cdot \left(\frac{dV'}{d\varpi}\right)$ seyn. Diese Ausdrücke sind für die Sonne sehr genähert, wegen ihrer grofsen Entfernung von der Erde, wodurch die in $\frac{L}{r^4}$ multiplicirten Glieder unmerklich werden. Sie sind für den Mond weniger genau; ich habe aber nichts in den Erscheinungen der Ebbe und Fluth bemerkt, welches von den Kräften von der Ordnung $\frac{L'}{r'^4}$ abhängen könnte: vielleicht werden genauere und zahlreichere Beobachtungen als die bisherigen die Wirkungen dieser Kräfte zu erkennen geben.

Wir wollen Anfangs nur die Wirkung der Sonne betrachten und annehmen, dafs sie sich gleichförmig in der Ebene des Aequators und immer in derselben Entfernung vom Mittelpunkt der Erde bewege; die drey vorhergehenden Kräfte verwandeln sich dann in folgende:

$$\frac{3L}{2r^3}.[\sin\theta^2 - \tfrac{2}{3} + \sin\theta^2 . \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi)];$$

$$\frac{3L}{2r^3}.\sin\theta . \cos\theta . [1 + \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi)]; \qquad (A)$$

$$-\frac{3L}{2r^3}.\sin\theta . \sin(2nt + 2\varpi - 2\psi).$$

Das Meer würde, wenn die beständigen Kräfte $\frac{3L}{2r^3}(\sin\theta^2 - \frac{2}{3})$ und $\frac{3L}{2r^3}.\sin\theta.\cos\theta$ allein auf dasselbe wirkten, endlich ins Gleichgewicht kommen; diese Kräfte ändern also nur ein wenig die bleibende Figur, welche das Meer durch die Umwälzungsbewegung erhält. Die drey veränderlichen Theile der vorhergehenden Kräfte müssen aber im Meer Schwankungen hervorbringen, deren Natur wir bestimmen wollen.

Diese Kräfte erhalten nach einem Zwischenraum von einem halben Tag immer dieselbe Gröfse; man kann aber als einen allgemeinen Grundsatz der Dynamik festsetzen: „dafs der Zustand eines Systems von Körpern, in welchem „die ursprünglichen Bedingungen der Bewegung durch den Widerstand, den es „erfährt, verschwunden sind, periodisch ist, so wie die Kräfte, welche auf dassel- „be wirken;" der Zustand des Meeres mufs folglich nach jedem Zwischenraum von einem halben Tag derselbe werden, so dafs eine Ebbe und eine Fluth in diesem Zwischenraum sich ereignen mufs.

Um dies durch eine Schlufsreihe zu zeigen, welche man auf alle ähnliche Fälle anwenden kann, nehme man an, dafs die Höhe des Meers in einem Hafen zu irgend einer Zeit a gleich h gewesen ist, und dafs sie nach den Zwischenräumen $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)} \ldots f^{(i)}$ etc. vom Augenblick a an gezählt, eben so grofs war, so ist $a + f^{(i)}$ die Zeit, wo die Höhe des Meeres nach i Zwischenräumen gleich h war. Nimmt man nun die Zahl i sehr grofs an, so wird diese Zeit nicht von den Bedingungen der Bewegung abhängen, welche im Augenblick a, den wir für den Anfang der Bewegung annehmen, Statt hatten; denn diese Bedingungen werden sämmtlich sehr bald durch die Reibungen und durch den Widerstand aller Art, welchen das Meer in seinen Schwankungen erfährt, vernichtet werden; so dafs die Bewegung des Meeres endlich nicht mehr davon abhängen, und sich blofs auf die Kräfte, welche auf dasselbe wirken, bezie-

hen wird, wodurch es unmöglich wird, den ursprünglichen Zustand des Meeres aus seinem jetzigen Zustand zu erkennen.

Man gedenke sich nun, daſs zur Zeit $a +$ ein halber Tag alle Bedingungen der Bewegung des Meeres dieselben waren, wie im erstern Fall zur Zeit a. Da die Kräfte der Sonne dieselben sind, und sich in beiden Fällen auf dieselbe Art ändern, so ist klar, daſs die auf einander folgenden Zwischenräume, nach welchen die Höhe des Meeres gleich h ist, im zweyten Fall, wo man vom Augenblick $a +$ ein halber Tag ausgeht, eben so groſs seyn werden, als im ersten, nämlich $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ etc., so daſs im Augenblick $a + f^{(i)} +$ ein halber Tag die Höhe des Meeres gleich h seyn wird. Da aber, wenn i sehr groſs ist, der gegenwärtige Zustand des Meeres von allem, was sich auf den Anfang der Bewegung bezieht, unabhängig ist; so ist sichtbar, daſs der Augenblick $a + f^{(i)} +$ ein halber Tag mit irgend einem der Augenblicke zusammentreffen muſs, wo das Meer im ersten Fall die Höhe h hatte; man muſs also

$$a + f^{(i)} + \text{ein halber Tag} = a + f^{(i+r)}$$

haben, wo r eine ganze Zahl ist; und folglich

$$f^{(i+r)} - f^{(i)} = \text{ein halber Tag.}$$

Hieraus folgt, daſs der Zustand des Meeres nach einem halben Tage derselbe wird.

Es ist wahrscheinlich, daſs der Widerstand, welchen das Meer erfährt, die Wirkung einer Ursache, von welcher man annimmt, daſs sie das ganze Meer erschüttert, im Zeitraum von einigen Monaten vernichten würde, so daſs die Ebbe und Fluth nach diesem Zeitraum ihren natürlichen Zustand wieder annehmen würde. Man kann daraus urtheilen, wie geringe der Einfluſs ist, welchen selbst die heftigsten Winde auf die Ebbe und Fluth haben, da dieselben immer nur örtlich sind und nur die Oberfläche des Meeres erschüttern. Nimmt man daher die mittlern Resultate von einer groſsen Anzahl während mehrerer Jahre fortgesetzten Beobachtungen, so werden diese Resultate sehr nahe die Wirkungen der regelmäſsigen Kräfte darstellen, welche auf das Meer wirken.

Man gedenke sich eine gerade Linie, deren Theile die Zeit vorstellen, und auf dieser geraden Linie als Axe der Abscissen eine krumme Linie, deren Ordinaten die Höhen des Meeres ausdrücken, so wird der Theil der krummen Linie, welcher der Abscisse, die einen halben Tag vorstellt, entspricht, die ganze krumme Linie bestimmen, welche aus diesem unendlichmal wiederholten Theilen bestehen wird. Der Zwischenraum zwischen zwey auf einander folgenden Flu-

then wird ein halber Tag seyn, eben so wie der Zwischenraum zwischen zwey auf einander folgenden Ebben.

17. Wir wollen nun diese krumme Linie bestimmen und uns hierzu eine zweyte Sonne L gedenken, welche der ersten vollkommen gleich und sich auf dieselbe Art im Aequator bewegt, mit dem einzigen Unterschied, daſs sie um den Winkel $n'T$ weiter in der Bahn fortgerückt ist als die erstere, wo n' gleich $n - m$ und m gleich $\frac{d\psi}{dt}$ ist. Man erhält die Kräfte, welche sich auf diese neue Sonne beziehen, wenn man in dem im vorhergehenden Satz gegebenen Ausdruck der veränderlichen Kräfte, welche auf das Meer wirken, ψ in $\psi + n'T$ verwandelt. Addirt man dann diese neuen Kräfte zu den vorhergehenden, so erhält man die folgenden:

$$\frac{3L}{2r^3} \cdot \sin\theta^2 \cdot [\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi) + \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2n'T)];$$

$$\frac{3L}{2r^3} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot [\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi) + \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2n'T)];$$

$$-\frac{3L}{2r^3} \cdot \sin\theta \cdot [\sin(2nt + 2\varpi - 2\psi) + \sin(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2n'T)].$$

Setzt man $L_{,} = 2L \cdot \cos n'T$, so verwandeln sich diese drey Kräfte in folgende:

$$\frac{3L_{,}}{2r^3} \cdot \sin\theta^2 \cdot \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - n'T);$$

$$\frac{3L_{,}}{2r^3} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - n'T);$$

$$-\frac{3L_{,}}{2r^3} \cdot \sin\theta \cdot \sin(2nt + 2\varpi - 2\psi - n'T).$$

Diese letztern Kräfte bringen eine Ebbe und Fluth hervor, welche derjenigen ähnlich ist, welche das Gestirn L hervorbringen würde, wenn seine Masse sich in $L_{,}$ verwandelte, und wenn man in den Kräften des vorhergehenden Satzes die Zeit t um $\frac{1}{2}$ T verminderte. Nennt man daher y'' die Ordinate der krummen Linie für die Höhe des Meeres, welche der Abscisse $t - \frac{1}{2}T$ entspricht, so ist $\frac{L_{,} \cdot y''}{L}$ die Höhe des Meeres, welche die drey vorhergehenden Kräfte hervorbringen.

Die-

Diese Höhe ist, vermöge der Natur sehr kleiner Schwankungen, die Summe der Höhen des Meeres, welche aus den Wirkungen der beiden Sonnen entspringen; denn es ist bekannt, daſs die Totalbewegung eines Systems, auf welches sehr kleine Kräfte wirken, der Summe der partiellen Bewegungen, welche jede Kraft besonders ihm mitgetheilt haben würde, gleich ist: so legen sich z. B. kleine Wellen eines Wasserbeckens auf einander in eben der Ordnung, in welcher sie auf der Oberfläche des ruhigen Wassers Statt gehabt haben würden. Dies flieſst unmittelbar daraus, daſs sehr kleine Schwankungen durch linearische Differenzialgleichungen gegeben werden, deren vollständige Integrale die Summe aller partiellen Integrale sind, welche ihnen Genüge thun. Es sey also y die Ordinate der krummen Linie für die Meereshöhen, welche Ordinate der Zeit t entspricht, und y' die der Zeit $t - T$ entsprechende Ordinate, so ist $y + y'$ die Summe dieser Höhen und folglich

$$y + y' = \frac{L_{,} . y''}{L}. \qquad (o)$$

Entwickelt man nun y' und y'' in Reihen, welche nach den Potenzen von T geordnet sind, und vernachlässigt man die Potenzen, welche höher als das Quadrat sind, so erhält man

$$y' = y - T . \frac{dy}{dt} + \frac{T^2}{2} . \frac{d^2y}{dt^2};$$

$$y'' = y - \tfrac{1}{2} T . \frac{dy}{dt} + \frac{T^2}{8} . \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Man hat ferner

$$L_{,} = 2 L - L n'^2 T^2.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (o), so findet man

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - 4 n'^2 . y;$$

hieraus erhält man durch Integriren

$$y = \frac{B . L}{r^3} . \cos (2 n t + 2\varpi - 2\psi - 2\lambda),$$

wo B und λ zwey willkührliche beständige Gröſsen sind, wovon die erste von der ganzen Fluthhöhe, die zweyte hingegen von der Zeit der Fluth abhängt, oder von der Zeit, um welche sie auf den Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis folgt.

Dieser Ausdruck von y giebt das Gesetz, nach welchem sich das Meer erhebt oder vertieft. Man gedenke sich einen senkrechten Kreis, dessen Peripherie den Zwischenraum eines halben Tages vorstellt, und dessen Durchmesser der ganzen Fluthhöhe, das heifst, dem Unterschied des hohen Wassers über das niedrige Wasser gleich sey; man nehme an, dafs die Bogen dieses Umkreises, vom niedrigsten Punkt an gezählt, die Zeiten ausdrücken, welche seit dem niedrigen Wasser verflossen sind; so werden die Quersinus dieser Bogen die Höhen des Meeres seyn, welche diesen Zeiten entsprechen.

Dieses Gesetz würde mitten in einem von allen Küsten freyen Meere genau beobachtet werden; die Lokalumstände verursachen aber in unsern Häfen, dafs die Ebbe und Fluth sich ein wenig davon entfernen; das Meer braucht hier ein wenig mehr Zeit zum Fallen als zum Steigen, und zu Brest beträgt der Unterschied der beiden Zeiten ungefähr zehn Minuten.

Die Erscheinungen der Ebbe und Fluth müssen um desto beträchtlicher seyn, je gröfser ein Meer ist. Die Pressungen, welche jedes Theilchen einer flüssigen Masse erfährt, theilen sich der ganzen Masse mit; hierdurch geschieht es, dafs die Wirkung der Sonne, welche bey jedem einzelnen Theilchen unmerklich ist, merkwürdige Erscheinungen auf dem Weltmeer hervorbringt, und dies ist auch die Ursache, warum die Ebbe und Fluth in den Seen und kleinen Meeren unbeträchtlich sind, z. B. in dem schwarzen und in dem Caspischen Meer.

Man hat im 10ten Satz gesehen, dafs die Tiefe des Meeres einen grofsen Einflufs auf die Höhen der Fluth hat. Die Lokalumstände jedes Hafens können diese Höhen ebenfalls beträchtlich ändern. Die wellenförmigen Bewegungen des Meeres können sehr grofs werden, wenn sie in einer Meerenge zusammengeprefst werden; das Zurückprellen des Wassers von den gegenüberliegenden Küsten kann sie noch vergröfsern; und so geschieht es, dafs die in den Inseln der Südsee durchgängig sehr kleinen Fluthen in unsern Häfen sehr beträchtlich sind.

Bedeckte das Meer ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid und litte es in seinen Bewegungen keinen Widerstand, so würde der Augenblick des hohen Wassers mit dem obern oder untern Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis zusammentreffen. Dies ist aber nicht der Fall der Natur, und die Lokalumstände bringen beträchtliche Verschiedenheiten in den Zeiten der Flu-

then selbst in einander sehr nahen Häfen hervor. Man gedenke sich, um eine richtige Idee von diesen Verschiedenheiten zu erhalten, einen weiten Kanal, der mit dem Meer zusammenhängt und sich sehr weit in das Land erstreckt. Es ist begreiflich, daſs die wellenförmigen Bewegungen, welche an seiner Mündung Statt haben, sich nach und nach in seiner ganzen Länge fortpflanzen werden, so daſs die Gestalt seiner Oberfläche durch eine Reihe groſser Wellen gebildet werden wird, welche in Bewegung sind, sich immer erneuern und ihre Länge in einem halben Tag durchlaufen. Diese Wellen werden in jedem Punkt des Kanals eine Ebbe und Fluth hervorbringen, welche sich nach dem vorhergehenden Gesetz richten werden; die Zeiten der Fluthen werden sich aber immer später ereignen, so wie die Punkte weiter von der Mündung entfernt seyn werden. Man kann das, was wir von einem Kanal gesagt haben, auch auf die Flüsse anwenden, deren Oberfläche durch ähnliche Wellen steigt und fällt, obschon ihre Gewässer eine entgegengesetzte Bewegung haben. Man beobachtet diese Wellen in allen Flüssen nahe bey ihrer Mündung, und sie sind in der Enge des Amazonenflusses bey Pauxis, welches 80 Myriametres (108 geographische Meilen) vom Meer entfernt ist, noch merklich.

18. Wir wollen nun die Wirkung des Mondes betrachten, und annehmen, daſs dies Gestirn sich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegt. Es ist klar, daſs sie im Meer eine Ebbe und Fluth hervorbringen muſs, welche derjenigen ähnlich ist, die aus der Wirkung der Sonne entspringt; die beiden einzelnen Fluthen, welche die Wirkungen dieser Gestirne hervorbringen, werden sich miteinander verbinden ohne sich gegenseitig zu stöhren, und aus ihrer Vereinigung entsteht die zusammengesetzte Fluth, welche wir in unsern Häfen beobachten. Bemerkt man nun die Gröſsen L, r, ψ, λ, B, welche sich auf die Wirkung der Sonne bezogen, in Beziehung auf den Mond mit einem Strich, so wird die aus der Wirkung des Mondes entspringende Höhe des Meeres durch die Funktion

$$\frac{B'.L'}{r'^3}.\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi' - 2\lambda')$$

ausgedrückt, wo B' und λ' zwey neue willkührliche Gröſsen sind. Die ganze Höhe des Meeres y, welche aus der vereinigten Wirkung der Sonne und des Mondes entspringt, ist folglich

$$\gamma = \frac{B \,.\, L}{r^3} \,.\, \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2\lambda) + \frac{B'.L'}{r'^3} \,.\, \cos(2nt + 2\varpi - 2\psi' - 2\lambda').$$

Man sieht aus dieser Formel, daſs sich die Höhe der Fluthen beträchtlich mit den Lichtgestalten des Mondes ändern muſs. Diese Höhe ist am gröſsten, wenn die beiden Kosinus des Ausdrucks von γ der Einheit gleich sind; sie ist dann der Summe der Gröſsen $\frac{B.L}{r^3}$ und $\frac{B'.L'}{r'^3}$ gleich. Sie ist am kleinsten, wenn der Kosinus, dessen Koeffizient der gröſsere ist, gleich 1, der andere Kosinus hingegen gleich -1 ist, und sie ist dann dem Unterschied der beiden vorhergehenden Gröſsen gleich. Ist $\frac{B.L}{r^3}$ gröſser als $\frac{B'.L'}{r'^3}$, so würden das Maximum und Minimum dieser Höhen dann Statt haben, wenn der erste Kosinus gleich 1 ist, und sie würden sich folglich zu derselben Stunde des Tages ereignen. Wenn aber $\frac{B'.L'}{r'^3}$ gröſser als $\frac{B.L}{r^3}$ ist, so würde die kleinste Fluth dann Statt haben, wenn der erste Kosinus gleich -1 ist, oder im Augenblick, wo die Sonne das niedrige Wasser hervorbringt. Die Zeit dieser Fluth wird also um einen Vierteltag von der Zeit der gröſsten Fluth verschieden seyn. Dies ist ein sehr einfaches Mittel, um zu erkennen, welche von den beiden Gröſsen $\frac{B.L}{r^3}$ und $\frac{B'.L'}{r'^3}$ die gröſsere ist. Alle in unsern Häfen angestellten Beobachtungen zeigen einstimmig, daſs die zweyte die erstere übertrifft.

Die beständigen Gröſsen B, B', λ und λ' geben zu verschiedenen wichtigen Bemerkungen Anlaſs. Hätte man $\lambda = \lambda'$, so würde die gröſste Fluth im Augenblick des neuen oder des vollen Mondes Statt haben; die kleinste Fluth würde sich hingegen in den Quadraturen ereignen. Denn die beiden Winkel $2(nt + \varpi - \psi - \lambda)$ und $2(nt + \varpi - \psi' - \lambda')$ sind im Augenblick der gröſsten Fluth gleich Null, oder Vielfache des Umkreises; ihr Unterschied ist also ebenfalls gleich Null oder ein Vielfaches des Umkreises; ist also $\lambda = \lambda'$, so muſs der Mond in Konjunction oder in Opposition mit der Sonne seyn. Nach den in unsern Häfen angestellten Beobachtungen folgt die gröſste Fluth ungefähr $1\frac{1}{2}$ Tag auf den Neu- oder Vollmond, so daſs $\psi' - \psi$ positiv und der mittlern synodischen Bewegung des Mondes während $1\frac{1}{2}$ Tag gleich ist; $\lambda' - \lambda$ ist also negativ und λ übertrifft λ'.

Man wird eine richtige Vorstellung von dieser Erscheinung erlangen, wenn man sich wie oben einen weiten Kanal gedenkt, der mit dem Meer zusammenhängt und sich sehr weit ins Land, in der Richtung des Mittagskreises seiner Mündung, erstreckt. Man nehme an, daſs das hohe Wasser an dieser Mündung im Augenblick des Durchgangs des Gestirns durch den Mittagskreis Statt hat, und daſs sie 21 Dezimalstunden ($=$ 50, 4 gewöhnliche Stunden) braucht, um an das Ende des Kanals zu gelangen; so ist sichtbar, daſs die Sonnenfluth an diesem letztern Punkt eine Dezimalstunde ($2^{St}\ 24'$) auf den Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis folgen wird. Da aber zwey Mondstage gleich 2,070 Sonnentagen sind, so wird die Mondsfluth nur $30'$ ($= 0^{St}\ 43'$) auf den Durchgang des Mondes durch den Mittagskreis folgen. Der Winkel λ ist in diesem Fall eine Dezimalstunde in Graden verwandelt, so daſs man den ganzen Umkreis einem Tag gleich setzt; dies giebt $\lambda = 40^G$ ($= 36^\circ$). Der Winkel λ' ist der Zeit von $30'$ gleich, auf dieselbe Art in Graden verwandelt; dies giebt $\lambda' = 12^G$ ($= 10^\circ.48'$). Ist das Ende des Kanals um eine gewisse Anzahl Grade östlicher als die Mündung, so muſs man sie zu den vorhergehenden Werthen von λ und λ' hinzusetzen, um ihre wahren Werthe zu erhalten. In unsrer Hypothese sind B und B' einander gleich, und der Winkel $\lambda' - \lambda$ ist der synodischen Bewegung des Mondes in der Zeit von 21 Dezimalstunden gleich; der Unterschied der Werthe von λ und λ' verspätigt also bloſs die Erscheinungen der Fluthen, welche an der Mündung Statt haben, wo $\lambda = \lambda'$ ist, um 21 Dezimalstunden, und es ist klar, daſs dies Resultat auf gleiche Art für irgend ein System von Gestirnen Statt haben wird, welche sich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegen.

Man gedenke sich nun, daſs der Kanal von dem wir sprechen, zwey Mündungen hat. Setzt man $\frac{d\psi}{dt} = m$, so wird die Fluth, welche an der ersten Mündung durch die Wirkung des Gestirns L Statt hat, am Ende des Kanals eine Fluth hervorbringen, deren Höhe durch $\frac{B.L}{r^3}.\cos(2nt + 2\varpi - 2\psi - 2mT)$ ausgedrückt werden wird, wenn T die Zeit ist, welche die Fluth braucht, um sich von der ersten Mündung bis zum Ende des Kanals fortzupflanzen. Die Fluth, welche an der zweyten Mündung Statt hat, wird eben so am Ende des

Kanals eine Fluth hervorbringen, deren Höhe durch $\frac{C.L}{r^3}.\cos(2nt+2\varpi-2\psi-2mT')$ ausgedrückt wird, wo T' die Zeit ist, welche diese zweyte Fluth braucht, um sich von der zweyten Mündung bis zum Ende des Kanals fortzupflanzen, und wo der Koeffizient C von der Höhe der Fluth an dieser zweyten Mündung abhängt. Die ganze Höhe y der Fluth, welche durch die Wirkung des Gestirns L am Ende des Kanals hervorgebracht wird, ist daher

$$y = \frac{B.L}{r^3}.\cos(2nt+2\varpi-2\psi-2mT)+\frac{C.L}{r^3}.\cos(2nt+2\varpi-2\psi-2mT').$$

Setzt man nun

$$B_{,} = \sqrt{B^2+C^2+2BC.\cos 2m(T'-T)};$$

$$\sin 2\lambda_{,} = \frac{B.\sin 2mT + C.\sin 2mT'}{B_{,}};$$

so erhält man

$$y = \frac{B_{,}.L}{r^3}.\cos(2nt+2\varpi-2\psi-2\lambda_{,}).$$

Man sieht hieraus, daſs $B_{,}$ und $\lambda_{,}$ vom Werth von m oder von der Geschwindigkeit der Bewegung des Gestirns in seiner Bahn abhängen; und es ist klar, daſs die Werthe von $B_{,}$ und von $\lambda_{,}$ noch zusammengesetzter seyn würden, wenn der Kanal drey oder eine gröſsere Anzahl Mündungen hätte. Das durch die Beobachtung der Fluthen gegebene Verhältniſs von $\frac{B.L}{r^3}$ zu $\frac{B'.L'}{r'^3}$ ist daher nicht genau das Verhältniſs der Kräfte $\frac{L}{r^3}$ zu $\frac{L'}{r'^3}$; es kann in verschiedenen Häfen sehr verschieden seyn, und man kann aus den Erscheinungen der Ebbe und Fluth das Verhältniſs der Kräfte der Sonne und des Mondes nur dann bestimmen, wenn man auf den Unterschied der Werthe von B und B' Rücksicht nimmt.

Wenn in dem Fall, wo der von uns betrachtete Kanal nur zwey Mündungen hat, C gleich $-B$ ist, das heiſst, wenn das hohe Wasser an der ersten Mündung in demselben Augenblick sich ereignet, wo das niedrige Wasser an der zweyten Mündung Statt hat, wenn überdies $T = T'$ ist, oder welches dasselbe ist, wenn die beiden Fluthen dieselbe Zeit brauchen um an das Ende des Kanals zu kommen, so werden die Schwankungen, deren Periode ein halber

Tag ist, keine Ebbe und Fluth an diesem Ende hervorbringen. Dieser sonderbare Fall ist zu Batsha einem Hafen des Königreichs Tunquin und an einigen andern Orten beobachtet worden.

Die groſse Verschiedenheit der Lokalumstände, welche in jedem Hafen auf die Ebbe und Fluth Einfluſs haben, muſs daher sehr beträchtliche Unterschiede hervorbringen, und es giebt wahrscheinlich keinen möglichen Fall, der nicht auf der Erde Statt findet. Da aber die beständigen Gröſsen B und λ für die Sonne und für den Mond gleich groſs seyn würden, wenn die Bewegungen dieser Gestirne gleich wären; so ist es natürlich anzunehmen, daſs ihre Unterschiede den Unterschieden dieser Bewegungen proportional sind. Wir werden diese Hypothese annehmen, und wir werden sehen, daſs sie mit einer merkwürdigen Genauigkeit den Beobachtungen Genüge thut. Wir setzen also

$$\lambda = O - mT$$
$$B = P.(1 - 2mQ),$$

wo O, T, P und Q für die Sonne und für den Mond dieselben Werthe haben. Wir werden in der Folge ein Mittel geben, diese beständigen Gröſsen in jedem Hafen aus den Beobachtungen zu bestimmen.

19. Wir wollen nun sehen, was sich dann ereignen muſs, wenn die Sonne und der Mond sich zwar in der Ebene des Aequators bewegen, aber Ungleichheiten in ihren Bewegungen und in ihren Entfernungen unterworfen sind. Die im 16ten Satz gefundenen partiellen Kräfte

$$\frac{3L}{2r^3} \cdot (\sin\theta^2 - \tfrac{2}{3}) \text{ und } \frac{3L}{2r^3} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$

sind nicht mehr beständig; sie ändern sich aber mit groſser Langsamkeit und die Periode ihrer Aenderungen wird ein Jahr seyn. Wäre die Dauer dieser Periode unendlich, so würden diese Kräfte keine andere Wirkung haben als die, die bleibende Figur des Meeres zu ändern, welches sehr bald in den Zustand des Gleichgewichts kommen würde. Ob nun aber schon diese Dauer endlich ist, so hat man doch im 6ten Satz gesehen, daſs man das Meer wegen des Widerstandes, welchen es erfährt, so ansehen kann, als ob es in jedem Augenblick unter der Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewicht wäre, und daſs man die entsprechende Höhe der Fluthen in dieser Hypothese bestimmen kann. Man hat auſserdem gesehen, daſs die Höhe der Fluthen, welche aus der Wirkung dieser Gestirne entsteht, für jede Tiefe des Meeres gleich

$$-\frac{(1+3\cos 2\theta)}{8g\cdot\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}\cdot\frac{L}{r^3}$$

ist. Substituirt man in den Theilen der Sonnenkräfte (A) des 16ten Satzes, welche in die Sinus und Kosinus des Winkels $2nt + 2\varpi - 2\psi$ multiplicirt sind, statt r und ψ ihre Werthe, so wird jeder dieser Theile in Sinus und Kosinus von Winkeln von der Form $2nt - 2qt + 2\varepsilon$ entwickelt werden, so daſs man folgende Gleichungen erhalten wird:

$$\frac{3L}{2r^3}\cdot\sin\theta^2\cdot\cos 2(nt+\varpi-\psi) = \sin\theta^2\cdot\Sigma\cdot k\cdot\cos 2(nt-qt+\varepsilon);$$

$$\frac{3L}{2r^3}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos 2(nt+\varpi-\psi) = \sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\Sigma\cdot k\cdot\cos 2(nt-qt+\varepsilon);$$

$$\frac{3L}{2r^3}\cdot\sin\theta\cdot\sin 2(nt+\varpi-\psi) = \sin\theta\cdot\Sigma\cdot k\cdot\sin 2(nt-qt+\varepsilon);$$

das Zeichen der endlichen Integrale, Σ, dient hier zur Bezeichnung der Summe aller Glieder von der Form $k\cdot\cos\cdot\sin 2(nt-qt+\varepsilon)$, in welche man den ersten Theil jeder dieser Gleichungen entwickeln kann.

Das beträchtlichste von diesen Gliedern ist dasjenige, welches vom Winkel $2nt - 2mt + 2\varpi$ abhängt, und welches die Ebbe und Fluth des Meeres in dem Fall hervor bringt, den wir vorher betrachtet haben, wo die Sonne sich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegte, und immer dieselbe Entfernung von der Erde behielt. Die übrigen Glieder können als das Resultat der Anziehungen von eben so viel besondern Gestirnen angesehen werden, welche sich sämmtlich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegen. Aus der Vereinigung der einzelnen Ebben und Fluthen, welche aus der Wirkung aller dieser Gestirne entstehen, entspringt die ganze durch die Wirkung der Sonne hervorgebrachte Ebbe und Fluth.

Nennt man die Masse des eingebildeten Gestirns, dessen Wirkung das vom Winkel $2nt - 2qt + 2\varepsilon$ abhängende Glied hervorbringt, l, und seine Entfernung vom Mittelpunkt der Erde a, so hat man

$$\frac{3L}{2a^3} = k, \text{ oder } \frac{L}{a^3} = \tfrac{2}{3}k.$$

Man hat im vorhergehenden Satz gesehen, daſs der Theil des Ausdrucks der Meereshöhe, welcher vom Winkel $2nt - 2mt + 2\varpi$ abhängt, gleich

P.

$$P.(1 - 2mQ) \cdot \frac{L}{r^3} \cdot \cos 2(nt - mt + \varpi - O + mT)$$

ist, wenn man annimmt, daſs die Sonne sich gleichförmig in der Ebene des Aequators mit einer Winkelgeschwindigkeit mt bewegt, und wo die beständigen Gröſsen P, Q, O und T für alle Gestirne dieselben sind, welches auch immer ihre eigene Bewegung seyn mag. Die Summe aller einzelnen Fluthen, welche aus den Wirkungen aller Gestirne l, l', l'' etc. entstehen, ist daher

$$\Sigma . P . (1 - 2qQ) \cdot \frac{l}{a^3} \cdot \cos 2(nt - qt + \varepsilon - O + qT),$$

und folglich gleich

$$\frac{2P}{3} \cdot \Sigma' . k . \cos 2(nt - qt + \varepsilon - O + qT)$$
$$+ \frac{2PQ}{3} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \Sigma . k . \sin 2(nt - qt + \varepsilon - O + qT);$$

wo das Differenzial so genommen werden muſs, daſs man nt als beständig ansieht. Man hat aber nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma . k . \cos 2(nt - qt + \varepsilon - O + qT) = \frac{3L}{2r^3} \cdot \cos 2(nt + \varpi - \psi - \lambda),$$

wenn man die Zeit t in den veränderlichen Gröſsen nt, ψ und r des zweyten Theils dieser Gleichung um T vermindert, und λ gleich $O - nT$ setzt. Der Theil der Höhe des Meeres, welcher aus der Wirkung der Sonne entspringt und vom Winkel $2nt + 2\varpi - 2\psi$ abhängt, ist daher unter den vorhergehenden Bedingungen gleich

$$P . \frac{L}{r^3} . \cos 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) + P . Q . \frac{d}{dt} . \left[\frac{L}{r^3} . \sin 2(nt + \varpi - \psi - \lambda)\right].$$

Wendet man das, was wir so eben von der Sonne gesagt haben, auf den Mond an, so findet man, daſs der Theil der Höhe des Meeres, welcher aus seiner Wirkung entspringt, und welcher von der Umwälzungsbewegung der Erde abhängt, gleich

$$P . \frac{L'}{r'^3} . \cos 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) + P . Q . \frac{d}{dt} . \left[\frac{L'}{r'^3} . \sin 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda)\right]$$

ist, wo die Zeit t in diesem Ausdruck ebenfalls um T zu vermindern ist. Der von der Umwälzungsbewegung der Erde unabhängige Theil ist gleich

$$-\frac{(1+3\cos 2\theta)}{8g\cdot\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}\cdot\frac{L'}{r'^3}.$$

Vereinigt man alle aus der Wirkung der Sonne und des Mondes entspringende Glieder, so erhält man ſolgenden genäherten Ausdruck für die Höhe des Meeres, αy,

$$\alpha y = -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\cdot\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}\cdot\left[\frac{L}{r^3}+\frac{L'}{r'^3}\right]$$

$$+P.\left[\frac{L}{r^3}.\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}.\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right]$$

$$+P.Q.\frac{d}{dt}.\left[\frac{L}{r^3}.\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}.\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right];$$

wo die Zeit t in den mit P und Q multiplicirten Gliedern um T vermindert, und das Differenzial so genommen werden muſs, daſs man nt als beständig ansieht.

20. Wir wollen nun endlich den Fall der Natur untersuchen, wo die Sonne und der Mond sich nicht in der Ebene des Aequators bewegen. Wir haben im 16ten Satz gezeigt, auf welche Art man die Sonnen- und Mondskräfte parallel mit drey auf einander senkrechten Axen erhalten kann, und es ſolgt daraus:

erstens daſs diese Kräfte, parallel mit dem Erdhalbmesser zerlegt, ſolgende sind:

$$-\frac{(1+3\cos 2\theta)}{4}.\left[\frac{L}{r^3}.(1-3\sin v^2)+\frac{L'}{r'^3}.(1-3\sin v'^2)\right]$$

$$+6\sin\theta.\cos\theta.\left\{\begin{array}{l}\frac{L}{r^3}.\sin v.\cos v.\cos(nt+\varpi-\psi)\\ +\frac{L'}{r'^3}.\sin v'.\cos v'.\cos(nt+\varpi-\psi')\end{array}\right\}$$

$$+\tfrac{3}{2}\sin\theta^2.\left[\frac{L}{r^3}.\cos v^2.\cos 2(nt+\varpi-\psi)+\frac{L'}{r'^3}.\cos v'^2.\cos 2(nt+\varpi-\psi')\right];$$

zweytens daſs diese Kräfte, senkrecht auf den Erdhalbmesser und in der Ebene des Mittagskreises zerlegt, ſolgende sind:

$$\tfrac{3}{4}\sin 2\theta \,.\left[\frac{L}{r^3}\,.\,(1 - 3\sin v^2) + \frac{L'}{r'^3}\,.\,(1 - 3\sin v'^2)\right]$$

$$+ 3\cos 2\theta \,.\left[\frac{L}{r^3}\,.\sin v.\cos v.\cos(nt + \varpi - \psi) + \frac{L'}{r'^3}\,.\sin v'.\cos v'.\cos(nt + \varpi - \psi')\right]$$

$$+ \tfrac{3}{2}\sin\theta\,.\cos\theta\,.\left[\frac{L}{r^3}\,.\cos v^2.\cos 2(nt + \varpi - \psi) + \frac{L'}{r'^3}\,.\cos v'^2\,.\cos 2(nt + \varpi - \psi')\right];$$

drittens daſs diese Kräfte, senkrecht auf die Ebene des Mittagskreises zerlegt, folgende sind:

$$- 3\cos\theta\,.\left[\frac{L}{r^3}\,.\sin v.\cos v.\sin(nt + \varpi - \psi) + \frac{L'}{r'^3}\,.\sin v'.\cos v'.\sin(nt + \varpi - \psi')\right]$$

$$- \tfrac{3}{2}\sin\theta\,.\left[\frac{L}{r^3}\,.\,\cos v^2.\sin 2(nt + \varpi - \psi) + \frac{L'}{r'^3}\,.\,\cos v'^2\,.\sin 2(nt + \varpi - \psi')\right].$$

Die partiellen Kräfte

$$-\left(\frac{1 + 3\cos 2\theta}{4}\right).\left[\frac{L}{r^3}\,.\,(1 - 3\sin v^2) + \frac{L'}{r'^3}\,.\,(1 - 3\sin v'^2)\right];$$

$$\tfrac{3}{4}\sin 2\theta\,.\left[\frac{L}{r^3}\,.\,(1 - 3\sin v^2) + \frac{L'}{r'^3}\,.\,(1 - 3\sin v'^2)\right]$$

wachsen sehr langsam; man kann daher annehmen, wie man im vorhergehenden Satz gesehen hat, daſs das Meer in jedem Augenblick unter der Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewicht ist; und der im 6ten Satz gegebene Werth von αy,

$$-\frac{(1 + 3\cos 2\theta)}{8g\,.\left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)}.\left[\frac{L}{r^3}\,.\,(1 - 3\sin v^2) + \frac{L'}{r'^3}\,.\,(1 - 3\sin v'^2)\right]$$

drückt in diesem Fall die Höhe des Meeres aus, welche aus der Wirkung dieser Kräfte entspringt.

Die partiellen Kräfte, welche vom Winkel $2nt + 2\varpi - 2\psi + 2\lambda$ abhängen, können in verschiedene Glieder zerlegt werden, welche in Sinus und Kosinus von Winkeln von der Form $2nt - 2qt + 2\varepsilon$ multiplicirt sind. Man wird sich wie im vorhergehenden Satz versichern, daſs daraus im Ausdruck der Höhe des Meeres folgende Gröſse entspringt:

$$P.\left[\frac{L.\cos v^2}{r^3}.\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'.\cos v'^2}{r'^3}.\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right]$$

$$+PQ.\frac{d}{dt}.\left[\frac{L.\cos v^2}{r^3}.\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'.\cos v'^2}{r'^3}.\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right];$$

wo die Zeit t in diesen Gliedern um T vermindert, und das Differenzial so genommen werden muſs, daſs man nt als beständig ansieht.

Wir haben nur noch den Theil der vorhergehenden Kräfte zu betrachten, welcher vom Winkel $nt+\varpi$ — etc. abhängt. Dieser Theil kann in Glieder entwickelt werden, welche in Sinus und Kosinus von Winkeln von der Form $nt-qt+\varepsilon$ multiplicirt sind, wo q in Vergleichung mit n sehr klein ist. Jedes dieser Glieder bringt in der Zeit von einem halben Tag eine Ebbe und Fluth hervor, welche derjenigen ähnlich ist, welche die vom Winkel $2nt-2qt+2\varepsilon$ abhängenden Glieder hervorbringen, bloſs mit dem einzigen Unterschied, daſs die auf den Winkel $nt-qt+\varepsilon$ sich beziehende Fluth täglich nur einmal Statt hat, da hingegen die auf den Winkel $2nt-2qt+2\varepsilon$ sich beziehende Fluth täglich zweymal Statt hat.

Man wird sehr leicht durch die Analysis der vorhergehenden Sätze finden, daſs die Höhe des Meeres, welche aus den Kräften entsteht, deren Periode beynahe ein Tag ist, durch folgende Formel ausgedrückt werden kann.

$$A.\left[\frac{L}{r^3}.\sin v.\cos v.\cos(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}.\sin v'.\cos v'.\cos(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right]$$

$$+B.\frac{d}{dt}.\left[\frac{L}{r^3}.\sin v.\cos v.\sin(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}.\sin v'.\cos v'.\sin(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right];$$

wo A, B und γ drey willkührliche beständige Gröſsen sind, welche bloſs durch Beobachtungen in jedem Hafen bestimmt werden können; wo die Differenziale so genommen werden müssen, daſs man nt als beständig ansieht, und wo die Zeit t um eine beständige Gröſse T' vermindert werden muſs, welche man ebenfalls bloſs aus den Beobachtungen bestimmen kann.

Vereinigt man nun alle einzelnen Höhen des Meeres, so erhält man seine ganze Höhe αy wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\alpha y = & -\frac{1+3\cos 2\theta}{8g.\left(1-\frac{3}{5\,\varrho}\right)}.\left[\frac{L}{r^3}.(1-3\sin v^2)+\frac{L'}{r'^3}.(1-3\sin v'^2)\right] \\
& + A.\left[\frac{L}{r^3}.\sin v.\cos v.\cos(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}.\sin v'.\cos v'.\cos(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right] \\
& + B.\frac{d}{dt}.\left[\frac{L}{r^3}.\sin v.\cos v.\sin(nt+\varpi-\psi-\gamma)+\frac{L'}{r'^3}.\sin v'.\cos v'.\sin(nt+\varpi-\psi'-\gamma)\right] \\
& + P.\left[\frac{L}{r^3}.\cos v^2.\cos 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}.\cos v'^2.\cos 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right] \\
& + P.Q.\frac{d}{dt}.\left[\frac{L}{r^3}.\cos v^2.\sin 2(nt+\varpi-\psi-\lambda)+\frac{L'}{r'^3}.\cos v'^2.\sin 2(nt+\varpi-\psi'-\lambda)\right].\quad (O)
\end{aligned}
$$

Man muſs in diesem Ausdruck die Differenziale so nehmen, daſs man nt als beständig ansieht; man muſs die Zeit t in den mit A und B multiplicirten Gliedern um eine beständige Gröſse T', und in den mit P und Q multiplicirten Gliedern um eine beständige Gröſse T vermindern; diese beständigen Gröſsen und A, B, γ, P, Q, λ müssen in jedem Hafen aus den Beobachtungen bestimmt werden.

Viertes Kapitel.

Vergleichung der vorhergehenden Theorie mit den Beobachtungen.

21. Wir wollen nun die vorzüglichsten Erscheinungen der Fluthen entwickeln, welche aus dem vorhergehenden Ausdruck von y entspringen, und sie mit den Beobachtungen vergleichen. Wir werden diese Erscheinungen in zwey Klassen theilen, wovon die eine sich auf die Höhen der Fluthen, die andere auf ihre Zwischenzeiten bezieht, und wir werden sie bey ihrem Maximum *in den* Syzygien, und bey ihrem Minimum in den Quadraturen betrachten.

Von den Fluthhöhen in den Syzygien.

Die Zeiten des hohen und des niedrigen Wassers werden durch die Gleichung $\frac{dy}{dt} = 0$ bestimmt; man kann aber bey der Differenziation des vorhergehenden Ausdrucks von ay die Gröſsen v, v', r, r', ψ und ψ' als beständig ansehen, weil sich diese Gröſsen sehr langsam ändern, so daſs der Einfluſs dieser Aenderungen auf die Höhen des hohen und des niedrigen Wassers unmerklich ist; denn es ist bekannt, daſs ein kleiner Irrthum in der Zeit t bey diesen zwey Punkten des Maximums und des Minimums für den Werth von y unmerklich ist. Man kann auch ohne beträchtlichen Irrthum das in B multiplicirte Glied des Ausdrucks von y vernachlässigen; denn da die vom Winkel $nt + \varpi$ abhängenden Schwankungen, deren Periode beynahe ein halber Tag ist, in unsern Häfen sehr klein sind, so ist sehr wahrscheinlich, daſs der Koeffizient B unmerklich ist: wir werden in der Folge sehen, daſs Q sehr wenig beträchtlich

ist, so daſs wir anfangs das Glied, dessen Factor es ist, vernachlässigen werden.

Die Gleichung $\frac{dy}{dt} = 0$ giebt so

$$0 = \frac{A}{2P} \cdot \left[\frac{L}{r^3} . \sin v . \cos v . \sin(nt + \varpi - \psi - \gamma) + \frac{L'}{r'^3} . \sin v' . \cos v' . \sin(nt + \varpi - \psi' - \gamma) \right]$$

$$+ \frac{L}{r^3} . \cos v^2 . \sin 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) + \frac{L'}{r'^3} . \cos v'^2 . \sin 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda).$$

Der Bruch $\frac{A}{2P}$ ist in unsern Häfen sehr klein, und man wird in der Folge sehen, daſs er zu Brest höchstens $\frac{1}{40}$ ist; man kann ihn also ohne einen merklichen Fehler zu befürchten, vernachlässigen. Die vorhergehende Gleichung giebt so

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3} . \cos v^2 . \sin 2(\psi - \psi')}{\frac{L'}{r'^3} . \cos v'^2 + \frac{L}{r^3} . \cos v^2 . \cos 2(\psi - \psi')}.$$

Man muſs nun im Ausdruck von y den durch diese Gleichung bestimmten Werth von $nt + \varpi - \psi'$ substituiren. Es sey (A) der Werth, welchen alsdann die Funktion

$$A . \left[\frac{L}{r^3} . \sin v . \cos v . \cos(nt + \varpi - \psi - \gamma) + \frac{L'}{r'^3} . \sin v' . \cos v' . \cos(nt + \varpi - \psi' - \gamma) \right]$$

erhält, so findet man:

$$ay = - \frac{(1 + 3 \cos 2\theta)}{8g . \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)} . \left[\frac{L}{r^3} . (1 - 3 \sin v^2) + \frac{L'}{r'^3} . (1 - 3 \sin v'^2) \right] + (A)$$

$$\pm P . \sqrt{\left(\frac{L}{r^3} . \cos v^2 \right)^2 + \frac{2L}{r^3} . \cos v^2 . \frac{L'}{r'^3} . \cos v'^2 . \cos 2(\psi' - \psi) + \left(\frac{L'}{r'^3} . \cos v'^2 \right)^2};$$

wo das Zeichen + für das hohe Wasser, das Zeichen — für das niedrige Wasser genommen werden muſs.

Man nehme an, daſs dieser Ausdruck die Höhe der Morgenfluth giebt, so erhält man den Ausdruck für die Höhe der Abendfluth, wenn man die veränderlichen Gröſsen um den Zuwachs vermehrt, welchen sie in der Zwischenzeit zwischen beiden Fluthen erhalten; man muſs folglich das Zeichen von (A) ändern, weil der Winkel $nt + \varpi - \psi - \gamma$ sich ungefähr um zwey rechte Win-

kel in dieser Zeit ändert, da man den geringen Unterschied, der hier Statt hat, wegen der Kleinheit von (A) vernachlässigen kann; der Unterschied der beiden Fluthen eines Tages ist folglich $2(A)$. Bezeichnet man nun durch y' die halbe Summe der Morgen- und Abendfluthhöhe, so wird y' dasjenige seyn, was wir in Zukunft unter täglicher mittlerer absoluter Fluthhöhe verstehen werden. Man hat sehr nahe

$$y' = -\frac{(1+3\cos 2\theta)}{8g\cdot\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}\cdot\left[\frac{L}{r^3}\cdot(1-3\sin v^2)+\frac{L'}{r'^3}\cdot(1-3\sin v'^2)\right]$$

$$+P.\sqrt{\left(\frac{L}{r^3}\cdot\cos v^2\right)^2+\frac{2L}{r^3}\cdot\cos v^2\cdot\frac{L'}{r'^3}\cdot\cos v'^2\cdot\cos 2(\psi'-\psi)+\left(\frac{L'}{r'^3}\cdot\cos v'^2\right)^2};$$

wo alle veränderliche Gröſsen dieses Ausdrucks sich auf die zwischen die Morgen- und Abendfluth fallende Ebbe beziehen, und folglich auf einen Augenblick, der um T vor diese Ebbe fällt, bezogen werden müssen. Es ist sehr wahrscheinlich, daſs der nicht in P multiplicirte Theil dieses Ausdrucks sich auf einen andern Zeitpunkt bezieht; dieser Theil ist aber in Vergleichung mit dem andern so klein, daſs man sie beide ohne merklichen Fehler auf den Zeitpunkt beziehen kann, welchen der gröſsere erfordert.

Nennt man (A') den Werth, welchen (A) zur Zeit des niedrigen Wassers hat, welches zwischen die Morgen- und Abendfluth fällt, so ist die Höhe des niedrigen Wassers gleich

$$-\frac{(1+3\cos 2\theta)}{8g\cdot\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}\cdot\left[\frac{L}{r^3}\cdot(1-3\sin v^2)+\frac{L'}{r'^3}\cdot(1-3\sin v'^2)\right]+(A')$$

$$-P.\sqrt{\left(\frac{L}{r^3}\cdot\cos v^2\right)^2+\frac{2L}{r^3}\cdot\cos v^2\cdot\frac{L'}{r'^3}\cdot\cos v'^2\cdot\cos 2(\psi'-\psi)+\left(\frac{L'}{r'^3}\cdot\cos v'^2\right)^2}.$$

Zieht man diesen Ausdruck von der täglichen mittlern absoluten Fluthhöhe ab, so erhält man das, was wir ganze Fluthhöhe nennen werden, welche folglich der Ueberschuſs der halben Summe der beiden Fluthen eines Tages über die dazwischen liegende Ebbe ist. Bezeichnet man diesen Ueberschuſs durch y'', so erhält man

$$y'' = -(A')+2P.\sqrt{\left(\frac{L}{r^3}\cdot\cos v^2\right)^2+\frac{2L}{r^3}\cdot\cos v^2\cdot\frac{L'}{r'^3}\cdot\cos v'^2\cdot\cos 2(\psi'-\psi)+\left(\frac{L'}{r'^3}\cdot\cos v'^2\right)^2}.$$

Der

Der Unterschied zweyer auf einander folgenden Ebben ist endlich gleich $2(A')$.

In der Gegend des Maximums der Fluthen, oder in der Gegend der Syzygien, ist der Winkel $\psi' - \psi$ wenig beträchtlich, weil er im Maximum gleich Null ist; man hat daher im Augenblick des hohen Wassers sehr nahe $nt + \varpi - \psi' = \lambda$. Substituirt man diesen Werth in die Funktion (A), so erhält man in der Voraussetzung, daſs man die Zeit t in dieser Funktion um T vermindern muſs, so wie in der mit P multiplicirten Funktion,

$$(A) = - A \cdot \left(\frac{L}{r^3} \cdot \sin v \cdot \cos v + \frac{L'}{r'^3} \cdot \sin v' \cdot \cos v'\right) \cdot \cos(\lambda - \gamma).$$

Da (A) sehr klein ist, so muſs der Fehler der vorhergehenden Voraussetzung unmerklich seyn. Die Funktion (A') wird sehr nahe folgende seyn:

$$(A') = A \cdot \left(\frac{L}{r^3} \cdot \sin v \cdot \cos v + \frac{L'}{r'^3} \cdot \sin v' \cdot \cos v'\right) \cdot \sin(\gamma - \lambda).$$

Man kann sogar wegen der Kleinheit dieser Funktionen $\lambda = \gamma$ setzen, wodurch (A') gleich Null wird. Vernachlässigt man nun in den mit P multiplicirten Gliedern der Ausdrücke von y' und von y'' die 4te Potenz von $\psi' - \psi$, so erhält man in den Syzygien

$$y' = - \frac{(1 + 3 \cos 2\theta)}{8g \cdot \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)} \cdot \left(\frac{L}{r^3} \cdot (1 - 3 \sin v^2) + \frac{L'}{r'^3} \cdot (1 - 3 \sin v'^2)\right)$$

$$+ P \cdot \left(\frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 + \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2\right) - \frac{2P \cdot \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2}{\frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 + \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2} \cdot [(\psi' - \psi)^2 + \tfrac{1}{4} q^2];$$

$$y'' = 2P \cdot \left(\frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 + \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2\right) - \frac{4P \cdot \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2}{\frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 + \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2} \cdot [(\psi' - \psi)^2 + \tfrac{1}{8} q^2];$$

wo q die Aenderung des Bogens $\psi' - \psi$ in dem Zeitraum von zwey auf einander folgenden Fluthen ist. Die Hinzusetzung der von q abhängenden Glieder gründet sich darauf, daſs der wahre Werth von $(\psi' - \psi)^2$ im Ausdruck von y' der halben Summe der beiden auf die zwey auf einander folgenden Fluthen sich beziehenden Quadrate $(\psi' - \psi)^2$ gleich ist, und man sieht leicht, daſs diese halbe Summe gleich $(\psi' - \psi)^2 + \frac{1}{4} q^2$ ist, wenn der Bogen $(\psi' - \psi)$ sich

auf die dazwischen liegende Ebbe bezieht. Beziehen sich also die veränderlichen Gröſsen der zwey vorhergehenden Formeln auf diese Ebbe, so muſs man, um mehrerer Genauigkeit willen, das Quadrat $(\psi' - \psi)^2$ im Ausdruck von y' um $\frac{3}{4} q^2$, und im Ausdruck von y'' um $\frac{1}{8} q^2$ vermehren.

22. Wir wollen nun die auf die Nachtgleichen und Sonnenwenden sich beziehenden Ausdrücke von y' und y'' entwickeln, um den Einfluſs der Abweichungen der Gestirne auf die Fluthen zu bestimmen. Das Glied

$$-\frac{(1 + 3 \cos 2\theta)}{8g \cdot \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)} \cdot \left(\frac{L}{r^3} \cdot (1 - 3 \sin v^2) + \frac{L'}{r'^3} \cdot (1 - 3 \sin v'^2)\right)$$

des Ausdrucks von y', ist sehr klein: man kann also ohne merklichen Fehler annehmen, daſs sich die veränderlichen Gröſsen r, v, r', v' in demselben auf den Augenblick der Syzygien beziehen. Addirt man die Werthe, welche y' in zwey auf einander folgenden Syzygien hatte, so kann man im vorhergehenden Gliede annehmen, daſs r' die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde in den Syzygien ist; denn es ist sichtbar, daſs der Mond bey der zweyten Syzygie in der Erdnähe seyn wird, wenn er bey der ersten in der Erdferne war. r ist in den Syzygien der Nachtgleichen sehr nahe der mittlern Entfernung der Erde von der Sonne gleich; und wenn man eben so viel Syzygien in der Nähe der Winter- als in der Nähe der Sommersonnenwende betrachtet, so wird man auch hier noch r der mittlern Entfernung der Erde von der Sonne gleich setzen können.

Der Theil $P \cdot \left(\frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 + \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2\right)$ im Ausdruck von y' ändert sich im Zeitraum von einigen Tagen merklich, und da er in unsern Häfen beträchtlich ist, so muſs man nothwendig auf seine Aenderung Rücksicht nehmen. Hierzu sey ε' die Neigung der Mondsbahn gegen den Aequator, und Γ' der Abstand des Mondes vom aufsteigenden Knoten seiner Bahn auf dem Aequator, so hat man $\sin v' = \sin \varepsilon' \cdot \sin \Gamma'$, und folglich

$$\cos v'^2 = 1 - \tfrac{1}{2} \sin \varepsilon'^2 + \tfrac{1}{2} \sin \varepsilon'^2 \cdot \cos 2\Gamma'.$$

Nennt man nun t die Zeit, welche seit dem Maximum der Fluth bis zum Augenblick irgend einer Beobachtung verflossen ist, wo t für Beobachtungen, die früher als dieses Maximum sind, negativ ist; so erhält man, wenn man die Potenzen von t vernachlässigt, welche höher als das Quadrat sind, und wenn man

die Bewegung des Mondes in seiner Bahn als gleichförmig während der Zeit t ansieht, welches man sich ohne merklichen Fehler erlauben kann,

$$\cos v''^2 = \cos v'^2 - t \cdot \frac{d\Gamma'}{dt} \cdot \sin \varepsilon'^2 \cdot \sin 2\Gamma' - t^2 \cdot \left(\frac{d\Gamma'}{dt}\right)^2 \cdot \sin \varepsilon'^2 \cdot \cos 2\Gamma';$$

wo die Werthe von v' und von Γ' im zweyten Theil dieser Gleichung sich auf die Syzygie beziehen. Sin $2\Gamma'$ ist in den Nachtgleichen und Sonnenwenden beynahe gleich Null; betrachtet man daher nur die Syzygien, welche nahe bey diesen Punkten sich ereignen, so verschwindet das Glied des Ausdrucks von $\cos v''^2$, welches in die erste Potenz von t multiplicirt ist, aus der Summe der Werthe von y', vorzüglich wenn man eine hinlänglich groſse Anzahl Syzygien betrachtet, damit die positiven und negativen Werthe von $\sin 2\Gamma'$ sich gegenseitig aufheben; man hat folglich dann

$$\cos v''^2 = \cos v'^2 - t^2 \cdot \left(\frac{d\Gamma'}{dt}\right)^2 \cdot (\sin \varepsilon'^2 - 2 \sin v'^2).$$

Man nehme zur Einheit der Zeit den Zwischenraum zwischen zwey auf einander folgenden Morgen- oder Abendfluthen in der Nähe der Syzygien an, welcher Zeitraum ungefähr $1^{tag},0271$ beträgt. Es sey v' die mittlere synodische Bewegung des Mondes in diesem Zeitraum, so erhält man in den Syzygien, wenn man auf das Argument der Variation Rücksicht nimmt, welches in diesen Punkten die Bewegung des Mondes beständig vermehrt,

$$\left(\frac{d\Gamma'}{dt}\right)^2 = 1,165 \cdot v'^2,$$

und folglich

$$\cos v''^2 = \cos v'^2 - 1,165 \cdot t^2 v'^2 \cdot (\sin \varepsilon'^2 - 2 \sin v'^2).$$

Man kann die Aenderung von $\frac{1}{r'^3}$ vernachlässigen, wenn man zwey auf einander folgende Syzygien zugleich betrachtet. Man kann die Aenderungen von $\frac{1}{r'}$ und von $\sin v^2$ ebenfalls vernachlässigen, weil sie im Zeitraum einer kleinen Anzahl Tage wenig beträchtlich sind: sie beziehen sich überdies auf die Wirkung der Sonne, von welcher wir in der Folge sehen werden, daſs sie dreymal geringer ist, als die Wirkung des Mondes.

Wir haben nun noch das Glied des Ausdrucks von y',

$$-\frac{2 . P . \frac{L}{r^3} . \cos \nu^2 . \frac{L'}{r'^3} . \cos \nu'^2}{\frac{L}{r^3} . \cos \nu^2 + \frac{L'}{r'^3} . \cos \nu'^2} . (\psi' - \psi)^2$$

zu betrachten. Nennt man für die Sonne ε und Γ das, was wir für den Mond ε' und Γ' genannt haben, und bemerkt man, dafs ε' sehr wenig von ε verschieden ist, und dafs $\sin (\Gamma' + \Gamma)$ in den Syzygien der Nachtgleichen und Sonnenwenden beynahe Null ist, so erhält man sehr nahe

$$\cos \nu . \cos \nu' . (\psi' - \psi) = \cos \left(\frac{\varepsilon' + \varepsilon}{2}\right) . (\Gamma' - \Gamma),$$

wodurch sich das vorhergehende Glied in folgendes verwandelt:

$$-\frac{2 . P . \frac{L}{r^3} . \frac{L'}{r'^3} . \cos \left(\frac{\varepsilon' + \varepsilon}{2}\right)^2 . t^2 \nu'^2}{\frac{L}{r^3} . \cos \nu^2 + \frac{L'}{r'^3} . \cos \nu'^2}.$$

Dieses festgesetzt, nenne man Y' die Summe der Werthe von y', welche zu $2i$ Syzygien in der Nähe der Nachtgleichen gehören, so findet man

$$Y' = -\frac{2i(1 + 3 \cos 2\theta)}{8g . \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)} . \left(\frac{L}{r^3} . (1 - 3 \sin V^2) + \frac{L'}{r'^3} . (1 - 3 \sin V'^2\right)$$

$$+ 2iP . \left(\frac{L}{r^3} . \cos V^2 + \frac{L'}{r'^3} . \cos V'^2\right)$$

$$- 2iP . \frac{L'}{r'^3} . (t^2 + \tfrac{1}{16}) \nu'^2 . \left\{ 1{,}165 . (\sin \varepsilon'^2 - 2 \sin V'^2) + \frac{\frac{2L}{r^3} . \cos \left(\frac{\varepsilon' + \varepsilon}{2}\right)^2}{\frac{L}{r^3} . \cos V^2 + \frac{L'}{r'^3} . \cos V'^2} \right\}.$$

$\cos V^2$, $\cos V'^2$, $\sin V'^2$ und $\cos \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right)^2$ sind in diesem Ausdruck die mittlern Werthe von allen $2i$ Werthen, welche $\cos \nu^2$, $\cos \nu'^2$, $\sin \nu'^2$ und $\cos \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right)^2$ in den $2i$ Syzygien haben. Derselbe Ausdruck kann auch noch die Summe der Werthe von y' in $2i$ Syzygien der Sonnenwenden vorstellen, wovon die eine Hälfte in die Nähe der Wintersonnenwende fällt.

Man betrachte nun den Ausdruck von y''. Das Glied

$$A \,.\left(\frac{L}{r^3}\,.\,\sin v\,.\cos v + \frac{L'}{r'^3}\,.\,\sin v'\,.\,\cos v'\right)$$

ist in unsern Häfen sehr klein; es ist in den Syzygien der Nachtgleichen gleich Null; es verschwindet auch noch aus der Summe der Werthe von y'', wenn man zwey auf einander folgende Syzygien und eben so viel Winter- als Sommersonnenwenden betrachtet. Nennt man also Y'' die Summe der Werthe, welche y'' in $2i$ Syzygien in der Nähe der Nachtgleichen hat, so erhält man

$$Y'' = 4\,iP\,.\left(\frac{L}{r^3}\,.\,\cos V^2 + \frac{L'}{r'^3}\,.\,\cos V'^2\right)$$

$$-\,4\,iP\,.\,\frac{L'}{r'^3}\,.(t^2 + \tfrac{1}{32})\,v'^2\,.\left\{1{,}165\,.(\sin \varepsilon'^2 - 2\sin V'^2) + \frac{2\,\frac{L}{r^3}\,.\,\cos\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}\right)^2}{\frac{L}{r^3}\,.\cos V^2 + \frac{L'}{r'^3}\,.\cos V'^2}\right\};$$

dieser Ausdruck giebt auch noch die Summe der Werthe von y'' in $2i$ Syzygien der Sonnenwenden.

Wir wollen nun sehen, was man zu diesen Ausdrücken von Y' und Y'' wegen der von Q abhängenden Glieder, die wir bisher vernachlässigt haben, hinzusetzen muſs. Wir nehmen hierzu den Ausdruck (O) von αy im 20sten Satz wieder vor. Das Differenzial $\frac{d\,.\,\cos v^2}{dt}$ ist in den Nachtgleichen und Sonnenwenden gleich Null; man kann das Differenzial von $\frac{1}{r^3}$, welches durch dt dividirt wird, vernachlässigen, wenn man zwey auf einander folgende Syzygien zusammen betrachtet; wir werden auch noch das Glied

$$P\,.\,Q\,.\,\frac{d}{dt}.\left(\frac{L}{r^3}\,.\,\cos v^2\,.\,\sin(nt + \varpi - \psi - \lambda)^2\right)$$

vernachlässigen, weil v, ψ und r sehr langsam sich ändern, und weil $\frac{L}{r^3}$ dreymal kleiner ist als $\frac{L'}{r'^3}$. Das von Q abhängende Glied der Formel (O) wird so zum Ausdruck von αy die Gröſse

$$-\,2\,P.\,Q\,.\,\frac{d\psi'}{dt}\,.\,\frac{L'}{r'^3}\,.\,\cos v'^2\,.\,\cos 2\,(nt + \varpi - \psi' - \lambda)$$

hinzusetzen. Man hat aber

$$\frac{d\psi'}{dt} \cdot \cos v'^2 = \frac{d\Gamma'}{dt} \cdot \cos \varepsilon' = m' \cdot \cos \varepsilon',$$

wo $m't$ die mittlere Bewegung des Mondes ist; das vorhergehende Glied verwandelt sich so in

$$-2\, m'\, P \,.\, Q \,.\, \cos \varepsilon' \,.\, \frac{L'}{r'^3} \,.\, \cos 2\,(nt + \varpi - \psi' - \lambda).$$

Man kann hieraus leicht schlieſsen, daſs das von Q abhängende Glied nur L' in $L'(1 - 2m'Q \,.\, \cos \varepsilon')$ in den Ausdrücken von αy, Y' und Y'' bey den Syzygien der Nachtgleichen verwandelt, wo $\cos v'$ sehr nahe gleich 1 ist; daſs es hingegen bey den Sonnenwenden, wo $\cos v' = \cos \varepsilon'$ ist, die Gröſse L' in $L'\left(1 - \frac{2\, m'\, Q}{\cos v'}\right)$ verwandelt; so daſs der Unterschied der Werthe, welche L' in diesen beiden Fällen hat, zur Bestimmung von Q dienen kann.

23. Wir wollen nun die vorhergehenden Formeln mit den Beobachtungen vergleichen. Man hat zu Anfang des vorigen Jahrhunderts und auf die Einladung der Akademie der Wissenschaften in unsern Häfen eine groſse Anzahl Beobachtungen über die Ebbe und Fluth angestellt. Sie wurden sechs Jahre hintereinander täglich zu Brest fortgesetzt, und obgleich einiges zu wünschen übrig wäre, so bilden sie doch wegen ihrer Anzahl, wegen der Gröſse und Regelmäſsigkeit der Fluthen in diesem Hafen, die vollständigste und *nützlichste* Sammlung, die wir in dieser Gattung besitzen. Wir werden unsre Formeln mit den Beobachtungen dieser Sammlung vergleichen. Da diese Beobachtungen durch viele Umstände verwickelt sind, die von der Wirkung der Sonne und des Mondes verschieden sind, so muſs man eine groſse Anzahl von ihnen betrachten, damit die Wirkungen der zufälligen Ursachen sich gegenseitig zerstöhren, so daſs sie zusammengenommen nur die Wirkung der regelmäſsigen Ursachen darstellen. Man muſs überdies durch eine vortheilhafte Verbindung die Erscheinungen, welche man erkennen will, sichtbar machen. Wir haben so zur Bestimmung des Einflusses der Abweichung der Gestirne zwey auf einander folgende Syzygien zugleich betrachtet, welche zusammengenommen von der Aenderung des Abstandes des Mondes von der Erde beynahe unabhängig sind. Ich habe, um die Beobachtungen mit der Theorie über diesen Punkt zu vergleichen, in der angeführten Sammlung 24 Syzygien in der Nähe der Nachtgleichen und

24 Syzygien in der Nähe der Sonnenwenden gewählet, und immer zwey auf einander folgende Syzygien betrachtet. Folgendes sind die Tage dieser Syzygien zu Brest:

Syzygien in der Nähe der Nachtgleichen.

Jahr 1711; 28 Aug., 12 Sept., 26 Sept., 12 October.
— 1712; 1 Sept., 15 Sept.
— 1714; 25 Aug., 8 Sept., 23 Sept., 8 October.
— 1715; 18 Febr., 5 März, 20 März, 4 April, 28 Aug., 13 Sept., 27 Sept., 12 Oct.
— 1716; 23 Febr., 8 März, 23 März, 6 April, 1 Sept., 15 Sept.

Syzygien in der Nähe der Sonnenwenden.

Jahr 1711; 16 Jun., 30 Jun., 25 Nov., 9 December.
— 1712; 19 Jun., 3 Jul., 28 Nov., 13 December.
— 1714; 29 May, 12 Jun., 27 Jun., 11 Jul., 21 Nov., 7 Dec., 21 Dec.
— 1715; 5 Jan., 17 Jun., 1 Jul., 26 Nov., 10 Dec., 25 Dec.
— 1716; 9 Jan., 5 Jun., 19 Jun.

Ich habe in jeder dieser Syzygien ein Mittel zwischen den zwey absoluten Höhen der beiden Fluthen eines Tages, das heiſst, die mittlere absolute Höhe des Meeres genommen; ich habe den Tag, welcher vor die Syzygie fällt, den Tag der Syzygie selbst und die vier Tage nach der Syzygie betrachtet; ich bezeichne diese Tage in ihrer Ordnung durch — 1, 0, 1, 2, 3, 4. Man hat zuweilen nur eine Fluth in einem Tage beobachtet; ich habe dann daraus die mittlere absolute Höhe dadurch gefunden, daſs ich zu ihr die Hälfte des Ueberschusses über die nicht beobachtete Fluth hinzugesetzt habe, welchen Ueberschuſs ich durch eine vorhergehende Untersuchung dieser Beobachtungen, sehr nahe sowohl für die Syzygien der Nachtgleichen, als auch für die Syzygien der Sonnenwenden bestimmt hatte.

Man hat auch zuweilen die Höhe der Ebbe, welche zwischen die zwey Fluthen desselben Tages fällt, nicht beobachtet. Ich habe dann zur Bestimmung der ganzen Fluthhöhe der Theorie gemäſs angenommen, daſs der Unterschied der ganzen Fluthhöhen in zwey auf einander folgenden Tagen sehr nahe doppelt so groſs ist, als der Unterschied der entsprechenden mittlern absoluten Höhen. Ich habe dann ein Mittel zwischen den ganzen Fluthhöhen genommen, welche ich durch diese Voraussetzung aus den Beobachtungen der beiden Tage erhielt, zwischen welche der Tag, den ich betrachtete, fiel.

Das Gesetz der beobachteten Ebben zeigte zuweilen offenbar einen Fehler im Zeichen einer dieser Höhen an. Ich habe dann fast immer die Beobachtung der Ebbe vernachlässigt, und die ganze Fluthhöhe durch die so eben gegebene Regel bestimmt. Ich habe bey der Berechnung der folgenden Tafel diese Regeln der Vorsicht angewendet; sie enthält die Summe der mittlern absoluten Fluthhöhen und der ganzen Fluthhöhen, welche zu jedem der Tage gehören die ich in den vorhergehenden Syzygien betrachtet habe.

Erste Tafel.

Tage	*Mittlere absolute Fluthhöhen,* in Mètres.	*ganze Fluthhöhen.* in Mètres.
	Syzygien der Nachtgleichen.	
— 1	129,890	128,988
0	136,079	142,068
1	139,851	149,342
2	139,962	150,066
3	137,479	143,826
4	131,653	131,770
	Syzygien der Sommersonnenwenden.	
— 1	62,004	58,097
0	63,914	62,002
1	65,028	64,095
2	65,157	64,995
3	64,147	63,425
4	61,914	59,186
	Syzygien der Wintersonnenwenden.	
— 1	65,211	61,098
0	66,456	64,967
1	67,121	67,202
2	66,424	67,500
3	65,998	66,187
4	63,574	61,425

24. Wir wollen zuerst die Beobachtungen alle zusammen betrachten. Man erhält für alle 48 Syzygien:

Zwey-

Zweyte Tafel.

Tage	Mittlere absolute Fluthhöhe. Mètres		ganze Fluthhöhen. Mètres
— 1	257,105		248,183
0	266,449		269,037
1	272,000		280,639
2	271,543		282,561
3	267,624		273,438
4	257,141		252,381.

Betrachtet man die Aenderungen der absoluten und der ganzen Fluthhöhen dieser Tafel, so sieht man, daſs die gröſsten Fluthen nicht am Tage der Syzygie selbst, sondern zwischen dem ersten und zweyten Tag sich ereignen. Wir wollen den Abstand der Zeit des Maximums der Fluthen von der Syzygie in den vorhergehenden Beobachtungen bestimmen. Wir nehmen hierzu die Zwischenzeit zwischen zwey Morgen- oder Abendfluthen in der Nähe der Syzygien zur Einheit an, und zur Epoche die Zeit der Ebbe, welche sich zwischen den zwey Fluthen des vor die Syzygie fallenden Tages ereignet. Es sey $a + bx - cx^2$ der Ausdruck der absoluten Fluthhöhe in der Nähe der Syzygien für einen dieser Epoche nahen Tag, wo x die Anzahl der Zwischenräume ist, um welche diese Fluth auf die Epoche folgt. Bezieht sich dieser Ausdruck auf eine Morgenfluth, so wird der Ausdruck der Abendfluth desselben Tages $a + b.(x + \frac{1}{2}) - c.(x + \frac{1}{2})^2$ seyn, wenn man nur die Ungleichheiten betrachtet, deren Periode beynahe ein Tag ist, welches die einzigen Ungleichheiten sind, auf welche man hier Rücksicht nehmen muſs, weil die Wirkungen der übrigen Ungleichheiten sich in den Beobachtungen der zweyten Tafel aufheben. Addirt man die beiden vorhergehenden Ausdrücke, so giebt die Hälfte ihrer Summe dasjenige, was wir mittlere absolute Fluthhöhe genannt haben; der Ausdruck dieser Höhe ist so

$$a - \tfrac{1}{16}c + b.(x + \tfrac{1}{4}) - c.(x + \tfrac{1}{4})^2.$$

Der Ausdruck der Höhe der dazwischen liegenden Ebbe ist nach unserer Theorie von der Form

$$a' - b.(x + \tfrac{1}{4}) + c'.(x + \tfrac{1}{4})^2,$$

wo $x + \frac{1}{4}$ die Zeit ist, welche von der Epoche an bis zu dieser Ebbe verflossen ist; nennt man diese Zeit t, so wird der Ausdruck der ganzen Fluthhöhe

von folgender Form seyn:

$$a'' + 2bt - 2ct^2.$$

Das Maximum dieser ganzen Fluthhöhe ereignet sich dann, wenn $t = \frac{b}{2c}$ ist; dies ist auch der Werth von x, welcher dem Maximum der Funktion $a + bx - cx^2$ entspricht.

Man kann die ganzen Fluthhöhen der zweyten Tafel gebrauchen, um $\frac{b}{2c}$ durch die Beobachtungen zu bestimmen; da aber die mittlern absoluten Höhen dieser Tafel mit mehrerer Sorgfalt beobachtet worden sind, als die ganzen Fluthhöhen, so werden wir beide zusammen anwenden.

Es seyen also f, f', f'', f''', f^{IV} und f^{V} die sechs Summen, welche man erhält, wenn man die absoluten Fluthhöhen zu den ganzen Fluthhöhen jedes Tages der zweyten Tafel addirt. Der analytische Ausdruck dieser Summen wird von der Form $k + ibt - ict^2$ seyn, und wenn man in ihm t nach und nach gleich 0, 1, 2, 3, 4, 5 setzt, so erhält man die Werthe von $f, f', f'', f''', f^{IV}, f^{V}$. Hieraus findet man

$$12ic = f''' + f'' - f^{V} - f,$$

$$ib = 5\,ic + \frac{f^{V} + f^{IV} + f''' - f'' - f' - f}{9},$$

und folglich

$$\frac{b}{2c} = \frac{5}{2} + \frac{2.(f^{V} + f^{IV} + f''' - f'' - f' - f)}{3.(f''' + f'' - f^{V} - f)}.$$

Substituirt man nun statt f, f' etc. ihre Zahlenwerthe, so findet man

$$\frac{b}{2c} = 2{,}58176.$$

Der Zeitraum, um welchen das Maximum der ganzen Fluthhöhen auf die Zeit der Ebbe folgt, welche zwischen den beiden Fluthen des Tages der Syzygie fällt, ist also 1,58176. Wir werden in der Folge sehen, daſs der zur Einheit angenommene Zeitraum sehr nahe $1^{\text{tag}},02705$ $(= 1^{\text{t}}.0^{\text{st}}.38'.57'')$ ist. Multiplicirt man ihn in 1,58176, so drückt das Product $1^{\text{tag}},62455$ den Zeitraum aus, um welchen das Maximum der ganzen Fluthhöhen auf den Augenblick der Morgen-Ebbe des Tages der Syzygie folgt. Dieser Augenblick fällt in die Mitte der Zeiten zwischen den beiden Fluthen dieses Tages, und man findet im

Mittel, daſs er in den vorhergehenden Beobachtungen gleich $0^{tag},39657$ war. Man findet ferner, daſs die Zeit der Syzygie in denselben Beobachtungen zu Brest im Mittel $0^{tag},45667$ war, so daſs sie auf die Ebbe um $0^{tag},06010$ folgte; die Syzygie ereignete sich folglich $1^{tag},56445$ vor der Zeit des Maximums der ganzen Fluthhöhen. Da aber ein Fehler von einigen Metern in diesen Beobachtungen einen beträchtlichen Einfluſs auf diesen Zeitraum haben kann, so müssen wir dies wichtige Element der Theorie der Ebbe und Fluth auf eine genauere Art bestimmen.

Ich habe hierzu die absoluten Fluthhöhen des zweyten Tages vor der Syzygie und des fünften Tages nach der Syzygie betrachtet; sie sind beynahe gleich weit vom Maximum der Fluthhöhen auf beiden Seiten entfernt, welche in diesen Entfernungen äuſserst merklich sich ändern. Ich habe die absoluten Morgen- und Abendfluthhöhen des zweyten Tages vor jeder Syzygie addirt; hatte man nur eine Höhe an einem Tage beobachtet, so habe ich sie verdoppelt. Die angeführte Sammlung von Beobachtungen enthält 100 Syzygien, wo ich mir ähnliche Beobachtungen habe verschaffen können. Ich habe $1009^{me},470$ für die Summe der absoluten Fluthhöhen des zweyten Tages vor der Syzygie gefunden, und $1010^{me},886$ für die Summe der absoluten Fluthhöhen des fünften Tages nach der Syzygie. Unter den Höhen vor der Syzygie gehören aber 86 zu Morgenfluthen und 114 zu Abendfluthen; nimmt man daher die Zeit von der Ebbe des zweyten Tages vor den Syzygien bis zur Ebbe des folgenden Tages zur Einheit an, so folgt die mittlere Zeit, auf welche sich die erste Summe bezieht, um $\frac{14}{400}$, oder um 0,035 dieses Zeitraums auf die Ebbe des zweyten Tages vor der Syzygie. In der zweyten Summe giebt es eben so viel Morgen- als Abendfluthhöhen; die Zeit, auf welche sie sich bezieht, ist folglich die Ebbe des fünften Tages nach der Syzygie. Die Mitte des Zeitraums der zwischen den Augenblicken, auf welche sich diese Summen beziehen, enthalten ist, ist nicht genau die Mitte des Zeitraums, der zwischen der Morgen-Ebbe des zweyten Tages vor der Syzygie und der Ebbe des fünften Tages nach der Syzygie verflossen ist; er nähert sich der zweyten Grenze um 0,0175.

Wären die beiden Summen $1009^{me},470$ und $1010^{me},886$ einander gleich, so würde diese Mitte die Zeit des Maximums der Fluthhöhen seyn; die zweyte Summe übertrifft aber die erste um $1^{me},416$; der Augenblick des Maximums ist

also der Zeit der Ebbe des fünften Tages nach der Syzygie ein wenig näher. Die absolute Fluthhöhe dieses Tages und des zweyten Tages vor der Syzygie ändert sich zu Brest um $0^{me},14803$, während der Hälfte des Zeitraums, der zur Einheit angenommen worden ist. Nimmt man daher an, daſs die Zeit des Maximums der Fluthhöhen sich um ein Hunderttheil dieses Zeitraums der zweyten Grenze nähert, so wird die Summe der 200 Höhen in der zweyten Grenze um $0^{me},59212$ vermehrt werden; und die Summe der 200 Höhen in der ersten Grenze wird um eben so viel vermindert werden, so daſs der Unterschied dieser zwey Summen $1^{me},18424$ seyn wird. Da nun die Beobachtungen für diesen Unterschied $1^{me},416$ geben, so muſs man das Maximum der Fluthhöhen der zweyten Grenze um 0,01196 nähern. Setzt man noch zu dieser Gröſse 0,0175, so erhält man 0,02946, um welche das Maximum der Fluthhöhen sich der Zeit der Ebbe des fünften Tages nach den Syzygien mehr nähert als die Mitte des Zeitraums, der zwischen dieser Ebbe und der Ebbe des zweyten Tages vor der Syzygie enthalten ist; drückt man diese Zeit in Theilen des Tages aus, so findet man sehr nahe $0^{tag},03022$.

Nun stimmt aber die Mitte des zwischen diesen beiden Ebben verflossenen Zeitraums mit der Mitte des Zeitraums überein, der zwischen der Morgen-Ebbe des Tages der Syzygie und zwischen der entsprechenden Ebbe des dritten Tages nach der Syzygie enthalten ist. Der Zeitraum zwischen zwey auf einander folgenden Morgenfluthen ist alsdann $1^{tag},02705$; die zweyte Mitte ist folglich um $1^{tag},54058$ von der Morgenebbe am Tage der Syzygie entfernt. Man kann für die Zeit dieser Ebbe $0^{tag},39657$ annehmen, so wie in den Beobachtungen der zweyten Tafel, weil die Zeit zu Brest von 100 Syzygien, die ich betrachtet habe, im Mittel $0^{tag},46013$ beynahe so wie in den Beobachtungen dieser Tafel war. Die Syzygie folgte also um $0^{tag},06356$ auf die Zeit der Morgen-Ebbe, und sie fiel folglich $1^{tag},47702$ vor das Mittel des zwischen den beiden Grenzen verflossenen Zeitraums. Addirt man hierzu $0^{tag},03022$, so findet man $1^{tag},50724$ ($= 1^{tag}.12^{st}.10'.26''$) für den Zeitraum, um welchen das Maximum der Fluthhöhen zu Brest auf die Syzygie folgt. Dies ist der Werth, den ich in der Folge für diesen Zeitraum betrachten werde.

25. Wir wollen nun das Gesetz der Aenderungen der mittlern absoluten Fluthhöhen, und der ganzen Fluthhöhen der zweyten Tafel, bestimmen. Wir nehmen hierzu den Zeitraum zwischen zwey auf einander folgenden Morgen-

oder Abendfluthen in der Nähe der Syzygien an; und wir nennen k die Gröfse, um welche die mittlere Zeit des Maximums der Fluthhöhen auf das Mittel des Zeitraums folgt, der zwischen den sechs Tagen der von uns betrachteten Beobachtungen enthalten ist. Es sey $a - b \, . \, t^2$ der allgemeine Ausdruck der mittlern absoluten Fluthhöhen der zweyten Tafel, wo t die Entfernung von dem Augenblick des Maximums ist. Die mittlern absoluten Fluthhöhen, welche den Tagen — 1, 0, 1, 2, 3, 4 entsprechen, sind dann:

$$a - b.(\tfrac{5}{2} + k)^2; \quad a - b.(\tfrac{3}{2} + k)^2; \quad a - b.(\tfrac{1}{2} + k)^2; \quad a - b.(\tfrac{1}{2} - k)^2;$$
$$a - b.(\tfrac{3}{2} - k)^2; \quad a - b.(\tfrac{5}{2} - k)^2.$$

Zieht man von der Summe der dritten und vierten die Summe der äufsersten Höhen ab, so erhält man 12 b als Unterschied. Die Resultate der zweyten Tafel geben für diesen Unterschied $29^{me},297$; hieraus findet man $b = 2^{me},4414$ $(7^{F.}.6^{Z.},19)$.

Stellt man eben so die ganzen Fluthhöhen der zweyten Tafel durch $a' - b'.t^2$ vor, so findet man auf dieselbe Art:

$$b' = 5^{me},2197 \ (16^{F}.\ 0^{Z},82).$$

Nach der im 22sten Satz gegebenen Theorie sollte $b = \frac{1}{2} b'$, und folglich $b = 2^{me},6098 \ (8^{F}.0^{Z},41)$ seyn. Der Unterschied zwischen diesem Werth und $2^{me},4414$, welchen die Beobachtungen der mittlern absoluten Fluthhöhen geben, ist innerhalb der Grenzen der Fehler der Beobachtungen. Da aber die mittlern absoluten Höhen mit mehrerer Sorgfalt als die Ebben beobachtet worden sind, so werden wir für b den dritten Theil der Summe der zwey durch die Beobachtungen gegebenen Werthe von b und b', und für b' das doppelte dieses Drittheils annehmen; man erhält so

$$b = 2^{me},5537 \ (7^{F}.10^{Z},34); \quad b' = 5^{me},1074 \ (15^{F}.8^{Z},68).$$

Wir bemerken zur Bestimmung von a und a', dafs die Summe der sechs vorhergehenden Ausdrücke der mittlern absoluten Fluthhöhen gleich $6a - b.\left(\frac{35}{2} + 6k^2\right)$ ist. Diese Summe ist nach den Beobachtungen der zweyten Tafel gleich $1591^{me},862$; man erhält folglich

$$a = \frac{1591^{me},862 + \left(\frac{35}{2} + 6k^2\right).2^{me},5537}{6}.$$

Man findet auf dieselbe Art

$$a' = \frac{1606^{me},239 + \left(\frac{35}{2} + 6k^2\right).5^{me},1074}{6}.$$

Die Zeit der Syzygie in der zweyten Tafel war im Mittel $0^{tag},45667$; addirt man hierzu $1^{tag},50724$, welches der Abstand der Syzygie vom Maximum der Fluthhöhen ist, so erhält man $1^{tag},96391$ für den Abstand dieses Maximums von der Mitternacht, die vor die Syzygie zu Brest fällt. Die mittlere Zeit zwischen den beiden Fluthen des Tages der Syzygie war $0^{tag},39657$; addirt man hierzu $\frac{3}{2}$ des zur Einheit angenommenen Zeitraums, welcher gleich $1^{tag},02705$ ist, so erhält man $1^{tag},93715$ für den Abstand des Mittels des Zeitraums, der zwischen den Beobachtungen der sechs Tage enthalten ist, von der Mitternacht, welche vor der Syzygie vorhergeht. Zieht man diesen Abstand von $1^{tag},96391$ ab, so erhält man den Werth von k in Tagen ausgedrückt, nämlich $0^{tag},02676$; und dividirt man ihn durch $1,02705$, um ihn in Theilen des zur Einheit angenommenen Zeitraums zu erhalten, so findet man $k = 0,026055$; dies giebt

$$a = 272^{me},760\ (829^{F},676); \qquad a' = 282^{me},606\ (869^{F},987).$$

Der Ausdruck der Zahlen der mittlern absoluten Fluthhöhen der zweyten Tafel ist also

$$272^{me},760 - 2^{me},5537.t^2\ (839^{F},676 - 7^{F},862.t^2),$$

und der Ausdruck der Zahlen der ganzen Fluthhöhen derselben Tafel ist

$$282^{me},606 - 5^{me},1074.t^2\ (869^{F},987 - 15^{F},723.t^2).$$

Die Werthe von t sind für diese Zahlen respective

$-2,526055$; $-1,526055$; $-0,526055$; $0,473945$; $1,473945$; $2,473945$.

Substituirt man diese Werthe in die zwey vorhergehenden Formeln, und vergleicht man diese Resultate mit den Zahlen der zweyten Tafel, so wird man sehen, daſs die Fehler sehr klein und innerhalb der Grenzen der Fehler sind, deren die Beobachtungen fähig sind.

Wir wollen nun diese durch die Beobachtungen gegebenen Formeln mit den durch die Theorie der Schwere im 22sten Satz gefundenen vergleichen. Es sey e die Höhe des Nullpunkts am Maaſsstab der Beobachtungen über die Horizontalfläche des Gleichgewichts, welche das Meer ohne die Wirkung der Sonne und des Mondes annehmen würde: es sey ferner h die Summe der Quadrate der Kosinus der Abweichungen der Sonne in den Augenblicken der Syzygien der zweyten Tafel; und h' dieselbe Summe in Beziehung auf den Mond,

so erhält man nach Satz 22:

$$a = 48e - \frac{3(1+3\cos 2\theta)}{8g\cdot\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}\cdot\left[\frac{L}{r^3}(h-32)+\frac{L'}{r'^3}(h'-32)\right]$$

$$+ P\cdot\left(\frac{hL}{r^3}+\frac{h'L'}{r'^3}\right) - \frac{b}{16} = 272^{me},760;$$

$$a' = 2P\cdot\left(\frac{hL}{r^3}+\frac{h'L'}{r'^3}\right) - \frac{b}{16} = 282^{me},606.$$

Man hat im 11 ten Satz gesehen, daſs $\frac{3L}{4r^3g} = 0^{me},12316$ ist. Da die Breite von Brest 535685″, so hat man 2θ sehr nahe gleich 928630″. Vernachlässigt man den in Vergleichung mit der Einheit sehr kleinen Bruch $\frac{3}{5\varrho}$, weil die mittlere Dichte der Erde die Dichte des Meeres mehrmals übertrifft, so erhält man

$$\frac{1+3\cos 2\theta}{8g\cdot\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}\cdot\frac{L}{r^3} = 0^{me},02745.$$

Wir werden in der Folge sehen, daſs in den mittlern Entfernungen des Mondes von der Erde $\frac{L'}{r'^3} = \frac{3L}{r^3}$ ist; die Entfernung des Mondes in den Syzygien ist aber um $\frac{1}{120}$ kleiner als seine mittlere Entfernung, weil das Argument der Variation die Entfernung des Mondes in den Syzygien beständig vermindert; man hat also in den Syzygien $\frac{L'}{r'^3} = \frac{123}{40}\cdot\frac{L}{r^3}$. Ich habe gefunden, daſs für die 48 Syzygien der zweyten Tafel

$$h = 44,13399; \quad h' = 44,50884$$

ist; man hat daher

$$\frac{3(1+3\cos 2\theta)}{8g}\cdot\left[\frac{L}{r^3}(h-32)+\frac{L'}{r'^3}(h'-32)\right] = 4^{me},1666,$$

und folglich

$$48\cdot e - 4^{me},1666 + \tfrac{1}{2}(282^{me},606) - \tfrac{1}{32}(2^{me},5537) = 272^{me},760;$$

dies giebt

$$e = 2^{me},827 \text{ (8 Fuſs 8,43 Zoll).}$$

Man hat ferner, wenn man $\frac{L'}{r'^3}$ auf die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde reducirt,

$$2P \cdot \tfrac{41}{40} h' \cdot \left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) + 2P \cdot (h - \tfrac{41}{40} h') \cdot \frac{L}{r^3} = 282^{me},756.$$

Da der Bruch $2P \cdot (h - \frac{41}{40} h') \cdot \frac{L}{r^3}$ sehr klein ist, so kann man in ihm

$$\frac{L}{r^3} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right)$$

setzen; man erhält so

$$2P \cdot (\tfrac{123}{160} h' + \tfrac{40}{160} h) \cdot \left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) = 282^{me},756.$$

Hieraus findet man

$$2P \cdot \left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) = 6^{me},2490 \text{ (19 Fuſs } 2\tfrac{1}{2} \text{ Zoll).}$$

Dies ist der Ausdruck der ganzen Fluthhöhe, welche zu Brest Statt haben würde, wenn die Sonne und der Mond sich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegten. Denn man hat im 22sten Satz gesehen, daſs L' sich für die Syzygien der Nachtgleichen in $L'(1 - 2m'Q \cdot \cos \varepsilon')$, und für die *Syzygien* der Sonnenwenden in $L'\left(1 - \frac{2m' \cdot Q}{\cos \varepsilon'}\right)$ verwandelt, so daſs L' für alle Syzygien der zweyten Tafel in $L'\left[1 - m'Q \cdot \left(\cos \varepsilon' + \frac{1}{\cos \varepsilon'}\right)\right]$ verwandelt werden muſs; man hat aber

$$\cos \varepsilon' + \frac{1}{\cos \varepsilon'} = 2 + 4 \cdot \frac{(\sin \frac{1}{2} \varepsilon')^4}{\cos \varepsilon'},$$

und man kann das letztere Glied in Vergleichung mit dem erstern wegen der Kleinheit von $(\sin \frac{1}{2} \varepsilon')^4$ vernachlässigen; L' muſs daher für die Syzygien der zweyten Tafel in $L'(1 - 2m' \cdot Q)$ verwandelt werden, eben so, als ob der Mond sich in der Ebene des Aequators selbst bewegte.

Wir wollen nun die Aenderung der Fluthhöhen nahe bey ihrem Maximum bestimmen, so wie sie die Theorie der Schwere giebt. Wir nehmen hierzu den Ausdruck Y'' des 22sten Satzes wieder vor. Da der Winkel ε' sich beträchtlich während der 48 Syzygien der zweyten Tafel geändert hat, so wird er

mit

mit einer für unsern Zweck hinreichenden Genauigkeit bestimmt werden, wenn man statt cos ε'^2 eine Mittelzahl zwischen den Quadraten der Kosinus der Abweichungen des Mondes in den 24 Syzygien der Sonnenwenden dieser Tafel nimmt. Es seyen also p und p' die Summen der Quadrate der Kosinus der Abweichungen der Sonne und des Mondes in den 24 Syzygien der Nachtgleichen, und q und q' dieselben Summen in den 24 Syzygien der Sonnenwenden, so kann man sehr nahe

$$\sin \varepsilon'^2 = \frac{24 - q'}{24} \text{ und } \cos\left(\frac{\varepsilon' + \varepsilon}{2}\right)^2 = \frac{q' + q}{2}$$

setzen. Das in t^2 multiplicirte Glied des Ausdrucks von Y'' verwandelt sich so für die 24 Syzygien der Nachtgleichen in

$$-48 P \cdot \tfrac{123}{160} \cdot \left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) t^2 v'^2 \cdot \left[\frac{q + q'}{p + \frac{123}{40} p'} + 1{,}165 \cdot \left(\frac{2p' - q' - 24}{24}\right)\right];$$

und dasselbe Glied ist für die 24 Syzygien der Sonnenwenden gleich

$$-48 P \cdot \tfrac{123}{160} \cdot \left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) . t^2 v'^2 \cdot \left[\frac{q + q'}{q + \frac{123}{40} q'} - 1{,}165 \cdot \left(\frac{24 - q'}{24}\right)\right];$$

wo $\frac{L'}{r'^3}$ sich auf die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde bezieht. Ich habe

$p = 23{,}68196$; $p' = 23{,}75355$; $q = 20{,}45203$; $q' = 20{,}75529$

gefunden. v' ist die mittlere synodische Bewegung des Monds in der Zeit von $1^{tag},02705$, und diese Bewegung ist 141866″ (12°.46′.4,″6), wenn man auf das Argument der Variation Rücksicht nimmt, welches diese Bewegung in den Syzygien beständig vermehrt. Man erhält so für den Werth des in t^2 multiplicirten Gliedes im Ausdruck von Y'', der sich auf die 24 Syzygien der Nachtgleichen bezieht, $-3^{me},2040.t^2$ und für den Werth desselben Gliedes in den 24 Syzygien der Sonnenwenden $-1^{me},8977.t^2$; dies Glied wird folglich für alle Syzygien zusammen gleich $-5^{me},1017.t^2$ ($15^F.8^Z,46$) seyn. Die Beobachtungen haben uns im vorhergehenden Satz $-5^{me},1074.t^2$ ($15^F.8^Z,68$) für dies Glied gegeben. Sie stimmen also in dieser Rücksicht vollkommen mit der Theorie überein.

26. Wir wollen nun die Beobachtungen der Syzygien der Nachtgleichen und der Syzygien der Sonnenwenden der ersten Tafel besonders mit der Theorie vergleichen. Bestimmt man durch die Methode des vorhergehenden Satzes

die Ausdrücke der absoluten und ganzen Fluthhöhen für die Syzygien der Nachtgleichen, welche die Beobachtungen dieser Tafel geben, so findet man

$$140^{me},432 - 1^{me},5811 \cdot t^2 \ (432^{P},312 - 4^{P},867 \cdot t^2),$$

für den Ausdruck der absoluten Fluthhöhen der Nachtgleichen, und

$$150^{me},235 - 3^{me},1623 \cdot t^2 \ (462^{P},487 - 9^{P},735 \cdot t^2),$$

für den Ausdruck der ganzen Fluthhöhen. Man findet auf dieselbe Art

$$132^{me},328 - 0^{me},9725 \cdot t^2 \ (407^{P},364 - 2^{P},994 \cdot t^2)$$

für den Ausdruck der absoluten Fluthhöhen in den Syzygien, und

$$132^{me},371 - 1^{me},9451 \cdot t^2 \ (407^{P},497 - 5^{P},988 \cdot t^2)$$

für den Ausdruck der entsprechenden zugehörenden ganzen Fluthhöhen.

Man sieht erstlich, daſs die ganzen Fluthhöhen vom Maximum an schneller in den Syzygien der Nachtgleichen abnehmen, als in den Syzygien der Sonnenwenden. Dies Resultat der Beobachtungen stimmt gänzlich mit der Theorie überein, welche, wie man so eben gesehen hat, $-3^{me},2040$ $(9^{P},863)$ und $-1^{me},8977$ $(5^{P},842)$ für die Koeffizienten von t^2 giebt, welches sehr wenig von den aus den Beobachtungen gefundenen Zahlen $-3^{me},1623$ und $-1^{me},9451$ verschieden ist.

Setzt man in den vorhergehenden Ausdrücken $t = 0$, so erhält man $8^{me},104$ für den Ueberschuſs der mittlern absoluten Fluthhöhen der *Nachtgleichen* über die der Sonnenwenden, und $17^{me},864$ für den Ueberschuſs der entsprechenden ganzen Fluthhöhen der Nachtgleichen über die der Sonnenwenden. Der zweyte Ueberschuſs beträgt etwas mehr als das Doppelte des ersten. Nach Satz 22. soll er das Doppelte des ersten um die Gröſse

$$\frac{6(1 + 3\cos 2\theta)}{8g \cdot \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)} \cdot \left[\frac{L}{r^3} \cdot (p - q) + \tfrac{41}{40} \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot (p' - q')\right]$$

übertreffen, welche in Zahlen verwandelt gleich $2^{me},050$ $(6^{P},311)$ ist. Die Beobachtungen geben $1^{me},656$ $(5^{P},098)$ für dieselbe Gröſse: der Unterschied ist innerhalb der Grenzen der Fehler, deren die Beobachtungen fähig sind.

Der Ueberschuſs von $17^{me},864$ der ganzen Fluthhöhen der Syzygien der Nachtgleichen über die der Sonnenwenden entsteht aus den Abweichungen der Sonne und des Mondes, welche die Wirkung dieser Gestirne auf das Meer vermehren. Dieser Ueberschuſs ist nach Satz 22 gleich

$$2P \cdot \left[\frac{L}{r^3} \cdot (p-q) + \tfrac{41}{40} \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \left[p' \cdot (1 - 2m'Q \cdot \cos \varepsilon') - q' \cdot \left(1 - \frac{2m'Q}{\cos \varepsilon'}\right)\right]\right],$$

oder gleich

$$2P \cdot \left[\frac{L}{r^3} \cdot (p-q) + \tfrac{41}{40} \cdot \frac{L'}{r'^3} (1 - 2m' \cdot Q)(p' - q')\right]$$
$$+ 2P \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \tfrac{41}{40} \cdot 2m' \cdot Q \cdot (1 - \cos \varepsilon') \left(p' + \frac{q'}{\cos \varepsilon'}\right).$$

Man hat aber nach dem vorhergehenden Satz

$$2P \cdot \left[\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3} \cdot (1 - 2m' \cdot Q)\right] = 6^{me},2490;$$

man wird ferner in der Folge sehen, dafs $\frac{L'}{r'^3} \cdot (1 - 2m' \cdot Q)$ sehr nahe gleich $\frac{3L}{r^3}$ ist; man kann endlich hier $\cos \varepsilon'^2 = \frac{q'}{24}$ setzen; die vorhergehende Formel verwandelt sich so in

$$19^{me},494 + \frac{2m'Q}{1 - 2m'Q} \cdot 16^{me},953.$$

Setzt man sie dem beobachteten Ueberschufs $17^{me},864$ gleich, so wird man $2m'Q$ bestimmen können, und man wird

$$2m'Q = -0,10637$$

finden. Es scheint also aus den vorhergehenden Beobachtungen zu folgen, dafs die Schnelligkeit der Bewegung des Mondes in seiner Bahn die Wirkung des Mondes zu Brest auf die Erhöhung der Gewässer des Meeres um $\frac{1}{10}$ vermehrt, so wie sie den Augenblick des Maximums der Fluthhöhen um $1\frac{1}{2}$ Tag verspätet; dieses schwierige Element mufs aber durch eine gröfsere Anzahl Beobachtungen bestimmt werden.

27. Wir wollen endlich die Fluthhöhen in den Syzygien der Wintersonnenwenden der ersten Tafel mit denen der Sommersonnenwenden derselben Tafel vergleichen, um die Wirkung zu erhalten, welche die Aenderung der Entfernung der Erde von der Sonne auf die Fluthen hervorbringt. Addirt man die ganzen Fluthhöhen der Tage 1 und 2 in den Wintersonnenwenden der ersten Tafel, so erhält man $134^{me},702$ für ihre Summe. Dieselbe Summe beträgt in den Sommersonnenwenden $129^{me},090$, und ist also um $5^{me},612$ kleiner als die vor-

hergehende; dies beweist den Einfluſs, welchen die gröſsere Nähe der Sonne im Winter als im Sommer, auf die Fluthen hat.

Will man hierüber die Theorie der Schwere mit den Beobachtungen vergleichen, so nenne man l die Summe der Quadrate der Abweichungen der Sonne in den Syzygien der Sommersonnenwenden der ersten Tafel, und l' dieselbe Summe für den Mond. Man erwäge ferner daſs uns die Sonne im Winter ungefähr $\frac{1}{60}$ näher ist, als in der mittlern Entfernung, wodurch der Werth von $\frac{L}{r^3}$ um $\frac{1}{20}$ vermehrt wird, welcher Werth aus dem entgegengesetzten Grund im Sommer um $\frac{1}{20}$ vermindert wird: dann geben die Formeln des 22sten Satzes

$$4P \cdot \left[\frac{L}{r^3} \cdot (\tfrac{21}{20}\, q - 2l) + \tfrac{41}{40} \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot (q' - 2l')\right]$$

für den Ueberschuſs, welchen die Beobachtungen gleich $5^{me},612$ gegeben haben. Man hat aber

$$\frac{L'}{r'^3} = \frac{3L}{r^3}; \qquad 2P \cdot \frac{L}{r^3} = \tfrac{1}{4} \cdot 6^{me},2490;$$

ich habe ferner $l = 10,16776$ und $l' = 10,34151$ gefunden: die vorhergehende Funktion wird so $4^{me},257$, welches nur um $1^{me},355$ (4 Fuſs) von dem Resultat der Beobachtungen verschieden ist.

28. Die Wirkung, welche die Aenderung des Abstandes von der Erde hervorbringt, ist für den Mond weit beträchtlicher als bey der Sonne. Um hierinn die Theorie mit den Beobachtungen zu vergleichen, habe ich die ganzen Fluthhöhen des ersten und zweyten Tages nach den Syzygien in 12 Syzygien addirt, wo der Halbmesser des Mondes in der Nähe seiner Erdferne 30′ (= 16′) überstieg; ich habe ferner die ganzen Fluthhöhen derselben Tage in 12 nahen und entsprechenden Syzygien addirt, wo der Halbmesser des Mondes in der Nähe seiner Erdferne unter 28′ (= 15′) war; ich habe diese zwey Tage gewählt, weil der Augenblick des Maximums der Fluthhöhen, dem sie sehr nahe sind, zwischen sie fällt. Die folgende Tafel enthält die Tage dieser Syzygien und die ihnen zugehörenden ganzen Fluthhöhen.

Dritte Tafel.

Tag der Syzygie.		Ganze Fluthhöhe in der Erdnähe.	Ganze Fluthhöhe in der Erdferne.
1714.	16 Januar	13^{me}, 305	
—	30 Januar		10^{me}, 654
—	14 April	13, 529	
—	29 April		10, 778
—	10 August		10, 453
—	25 August	14, 126	
—	8 September		10, 614
—	23 September	14, 539	
—	8 October		10, 681
—	23 October	13, 470	
1715.	5 März	14, 300	
—	20 März		10, 985
—	4 April	14, 061	
—	18 April		10, 372
—	12 October	14, 415	
—	27 October		10, 451
—	11 November	13, 711	
—	26 November		9, 986
1716.	6 May		10, 244
—	21 May	13, 186	
—	5 Junius		9, 592
—	19 Junius	13, 479	
—	4 Julius		9, 750
—	19 Julius	12, 135	

Man sieht aus dieser Tafel, daſs die Fluthhöhen, wo der Halbmesser des Mondes gröſser als 30′ war, beständig gröſser sind als diejenigen, wo der Halbmesser des Mondes kleiner als 28′ war. Addirt man die ganzen Fluthhöhen, welche auf den gröſsten Halbmesser sich beziehen, so ist ihre Summe gleich 164^{me}, 256. Die Summe der 12 ganzen Fluthhöhen, wo der Mondshalbmesser am kleinsten war, ist 124^{me}, 560. Der Unterschied beider Summen ist 39^{me}, 6961. Wir wollen nun sehen, wie groſs er nach der Theorie seyn soll.

Vernachlässigt man die Gröſse (A'), so wie wir es im Ausdruck von y'' des 21sten Satzes gethan haben, welche Gröſse im gegenwärtigen Fall theils an sich selbst, theils deswegen unmerklich ist, weil die Abweichungen des Mondes abwechselnd nördlich und südlich in den Beobachtungen der dritten Tafel sind, so ist aus diesem Ausdruck sichtbar, daſs man den Theil des gesuchten Unterschiedes erhalten wird, welcher sich auf die von P abhängenden Glieder bezieht, wenn man erstens den mittlern Halbmesser des Mondes in den 24 Beobachtungen der Tafel sucht, welchen Halbmesser ich gleich 2917″ finde; zweytens wenn man in jeder Beobachtung das Quadrat des Kosinus der Abweichung des Mondes in den Kubus des Verhältnisses seines Halbmessers zu 2917″ multiplicirt; drittens wenn man diese Producte für die 12 Beobachtungen, wo der Halbmesser des Mondes 30′ überstieg, addirt, welche Summe ich gleich 13,5846 finde, und wenn man davon die Summe derselben Producte für die 12 Beobachtungen, wo der Mondshalbmesser unter 28′ war, abzieht, welche Summe ich gleich 9,3628 finde; viertens, wenn man endlich den Unterschied dieser beiden Summen, nämlich 4,2218 in $4P \cdot \frac{L'}{r'^3}$ multiplicirt, wo r' die mittlere Entfernung des Mondes in den Syzygien ist; dies giebt $4P \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot 4{,}2218$ für den Theil des gesuchten Unterschieds, der von P abhängt.

Wir bemerken nun, um den von Q abhängenden Theil zu erhalten, daſs dieser Theil nach dem 20sten Satz zum Ausdruck von ay das Glied $-2PQ \cdot \frac{d\psi'}{dt} \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2$ hinzusetzt: man hat nach dem 21sten Satz $\frac{d\psi'}{dt} \cdot \cos v'^2 = \frac{d\Gamma'}{dt} \cdot \cos \varepsilon'$, und man hat sehr nahe $\frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{m'}{r'^2}$, wenn man die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde zur Einheit annimmt; das vorhergehende Glied verwandelt sich so in $-2m' \cdot QP \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos \varepsilon'$. Man kann $\cos \varepsilon' = \sqrt{\frac{q'}{24}}$ setzen, wo q' die Summe der Quadrate der Kosinus der Abweichungen des Mondes in den 24 Syzygien der zweyten Tafel ist, welche Summe wir im vorhergehenden Satz gleich 20,75529 gefunden haben. Man erhält folglich den Theil des gesuchten Unterschieds, der sich auf Q bezieht, wenn

man erstens die Summe der fünften Potenz des Verhältnisses des Mondshalbmesser bey jeder Beobachtung in der Erdnähe zu 2917″ sucht, und von ihr dieselbe Summe für die Beobachtungen in der Erdferne abzieht; zweytens, wenn man den Rest in $-\,8\,m'\,P\,.\,Q\,.\,\frac{L'}{r'^3}\,.\,\sqrt{\frac{q'}{24}}$ multiplicirt. Man findet so

$-\,8\,m'\,P\,.\,Q\,.\,\frac{L'}{r'^3}\,.\,6{,}9091$, wo r' sich auf die mittlere Entfernung des Mondes in den Syzygien bezieht.

Addirt man die zwey von P und von Q abhängenden Theile, so ist der gesuchte Unterschied

$$4P\,.\,\frac{L'}{r'^3}\,.\,(1-2m'.Q)\,.\,4{,}2218-\frac{8m'Q.P.\frac{L'}{r'^3}\,.\,(1-2m'.Q)\,.\,2{,}6873}{1-2m'.Q};$$

man hat nach Satz 25.

$$2P\,.\,\frac{L'}{r'^3}\,.\,(1-2m'Q)=\frac{123}{160}\,.\,6^{me}{,}2490\,;$$

der vorhergehende Unterschied verwandelt sich so in

$$40^{me}{,}562-\frac{2m'Q}{1-2m'Q}\,.\,25^{me}{,}819.$$

Setzt man ihn dem beobachteten Unterschied $39^{me}{,}6961$ gleich, so findet man $2\,m'\,Q = 0{,}03425$. Dieser Werth ist unmerklich und hat entgegengesetztes Zeichen mit dem Werth, welchen wir im vorhergehenden Satz aus den Erscheinungen der Fluthen, die von den Declinationen abhängen, bestimmt haben. Man sieht aus der Gröſse, welche der Koeffizient von $2\,m'\,Q$ im vorhergehenden Unterschied hat, daſs die Phänomene der Fluthen, die von den Aenderungen der Entfernung des Mondes von der Erde abhängen, zur Bestimmung desselben sehr schicklich sind, und es folgt aus ihnen, daſs $2\,m'\,Q$ zu Brest sehr klein und selbst unmerklich ist.

Die Abendfluthen übertreffen zu Brest die Morgenfluthen in den Syzygien der Sommersonnenwende vermöge der Ungleichheiten der zweyten Art, deren Periode beynahe ein Tag ist; in den Syzygien der Wintersonnenwende findet das entgegengesetzte Statt. Ich habe zur Bestimmung der Gröſse dieses Phänomens den Ueberschuſs der Abendfluth über die Morgenfluth in 17 Syzygien in der Nähe der Sommersonnenwende am ersten und zweyten Tage nach der Sy-

zygie addirt. Da das Maximum der Fluthen nahe in die Mitte zwischen diesen beiden Tagen der Beobachtungen fällt, so ist die tägliche Aenderung der Fluthhöhen, welche aus den Ungleichheiten der dritten Art entspringt, in dem vorhergehenden Resultate fast unmerklich, welches folglich nur den Ueberschuſs der Abendfluthen über die Morgenfluthen enthalten muſs, der aus den Ungleichheiten der zweyten Art entsteht. Die Summe dieser Ueberschüsse in den 34 Tagen der Beobachtung war $6^{me},131$.

Ich habe eben so den Ueberschuſs der Morgenfluthen über die Abendfluthen bey 11 Syzygien in der Nähe der Wintersonnenwende addirt. Die Summe dieser Ueberschüsse betrug in den 22 Tagen der Beobachtung $4^{me},109$. Nimmt man ein Mittel zwischen diesen beiden Resultaten, so findet man $0^{me},183$ ($6^{Z},76$) für den Ueberschuſs der Abendfluth über die Morgenfluth in den Sommersonnenwenden, oder der Morgenfluth über die Abendfluth in den Wintersonnenwenden, der aus den Ungleichheiten der zweyten Art entspringt.

Dieser Ueberschuſs ist nach Satz 21 gleich

$$2\,A\,.\left(\frac{L}{r^3}\,.\,\sin v'\,.\,\cos v + \frac{L'}{r'^3}\,.\,\sin v'\,.\,\cos v'\right).\cos(\lambda-\gamma),$$

diese Funktion ist folglich gleich $0^{me},183$. Es ist wahrscheinlich, daſs $\cos(\lambda-\gamma)$ wenig von der Einheit verschieden ist; man wird seinen Werth genau aus einer langen Reihe Beobachtungen der Morgen- und Abendebben erkennen.

Von den Fluthhöhen in der Nähe der Quadraturen.

29. Wir nehmen, um diese Höhen aus der Theorie zu bestimmen, die vollständigen Ausdrücke von y' und y'' des 21sten Satzes wieder vor, und wir bemerken, daſs, wenn man ψ' in $100^G + \psi'$ oder in $300^G + \psi'$ verwandelt, je nachdem der Mond in der Nähe seines ersten oder zweyten Viertels ist, daſs man folgende Werthe von y' und y'' erhalten wird, wenn man y' und y'' durch Reihen ausdrückt, wobey man $\psi' - \psi$ wenig beträchtlich setzen muſs, wie dies in der Nähe der Quadraturen der Fall ist, und wenn man die in Q multiplicirten Glieder vernachlässigt,

$y' =$

$$y' = -\frac{(1 + 3 \cos 2\theta)}{8g \cdot \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)} \cdot \left(\frac{L}{r^3} \cdot (1 - 3 \sin v^2) + \frac{L'}{r'^3} \cdot (1 - 3 \sin v'^2)\right)$$

$$+ P \cdot \left(\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 + \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2\right) + \frac{2P \cdot \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2}{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 + \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2} \cdot (\psi' - \psi)^2;$$

$$y'' = A \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \sin v' \cdot \cos v' \cdot \sin(\lambda - \gamma) \pm A \cdot \frac{L}{r^3} \cdot \sin v \cdot \cos v \cdot \cos(\lambda - \gamma)$$

$$+ 2P \cdot \left(\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 - \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2\right) + \frac{4P \cdot \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2}{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 - \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2} \cdot (\psi' - \psi)^2;$$

wo das Zeichen + in dem ersten Viertel des Mondes, und das Zeichen — in seinem zweyten Viertel Statt findet.

Der Ueberschuſs der Abendfluth über die Morgenfluth ist zu Brest in den Quadraturen der Nachtgleichen vermöge der Ungleichheiten der zweyten Art gleich

$$- 2A \cdot \frac{L'}{r'^3} \cdot \sin v' \cdot \cos v' \cdot \cos(\lambda - \gamma).$$

Es folgt hieraus nach dem vorhergehenden Satz, daſs zu Brest die Abendfluth die Morgenfluth in den Quadraturen der Frühlingsnachtgleichen übertrifft; daſs sie hingegen in den Quadraturen der Herbstnachtgleichen von ihr übertroffen wird.

Betrachtet man in einer Anzahl von $2i$ Quadraturen in der Nähe der Nachtgleichen die absoluten und die ganzen Fluthhöhen der Tage in der Nähe der Quadraturen; nennt man Y' die Summe der mittlern absoluten Höhen, so findet man durch dieselbe Analysis, durch welche Y' im 22sten Satz bestimmt worden ist,

$$Y' = -\frac{2i(1+3\cos 2\theta)}{8g\cdot\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}\cdot\left(\frac{L}{r^3}\cdot(1-3\sin^2 V^2)+\frac{L'}{r'^3}\cdot(1-3\sin V'^2\right)$$

$$+\,2iP\cdot\left(\frac{L'}{r'^3}\cdot\cos V'^2-\frac{L}{r^3}\cdot\cos V^2\right)$$

$$+\,2iP\cdot\frac{L'}{r'^3}\cdot(t^2+\tfrac{1}{16})(\Gamma'-\Gamma\cos V'.\cos\varepsilon)^2\left\{1{,}0611.\sin\varepsilon'^2+\frac{\frac{2L}{r^3}\cdot\cos V^2}{\frac{L'}{r'^3}.\cos V'^2-\frac{L}{r^3}\cdot\cos V^2}\right\};$$

t ist die seit dem Minimum der mittlern absoluten Fluthhöhe bis zum Augenblick, den man betrachtet, verflossene Zeit, der Zeitraum, der von einer Fluth bis zur entsprechenden Fluth des folgenden Tages in den Quadraturen der Nachtgleichen verfliefst, zur Einheit angenommen; Γ und Γ' sind die Bewegungen der Sonne und des Mondes in diesem Zeitraum, wo man aber auf das Argument der Variation Rücksicht nehmen mufs, welches die Bewegung des Mondes in den Quadraturen beständig vermindert; ε und ε' sind die Neigungen der Bahnen dieser Gestirne gegen den Aequator.

Der Werth von Y' für $2\,i$ Quadraturen, wovon i in der Nähe der Wintersonnenwenden und i in der Nähe der Sommersonnenwenden sind, ist:

$$Y' = -\frac{2i(1+3\cos 2\theta)}{8g\cdot\left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)}\cdot\left[\frac{L}{r^3}\cdot(1-3\sin V^2)+\frac{L'}{r'^3}\cdot(1-3\sin V'^2)\right]$$

$$+\,2iP\cdot\left(\frac{L'}{r'^3}\cdot\cos V'^2-\frac{L}{r^3}\cdot\cos V^2\right)$$

$$+\,2iP.\frac{L'}{r'^3}.(t^2+\tfrac{1}{16}).\left(\Gamma'\cos\varepsilon'-\frac{\Gamma}{\cos\varepsilon}\right)^2\cdot\left\{\frac{\frac{2L}{r^3}\cdot\cos V^2}{\frac{L'}{r'^3}.\cos V'^2-\frac{L}{r^3}.\cos V^2}-1{,}0611\,.\,\mathrm{tang}\,\varepsilon'^2\right\}.$$

Nennt man Y'' die ganzen Fluthhöhen, die zu Y' gehören, so findet man in den $2\,i$ Quadraturen der Nachtgleichen

$$Y'' = 4\,i\,P\,.\left(\frac{L'}{r'^3}\,.\cos V'^2 - \frac{L}{r^3}\,.\cos V^2\right)$$

$$+ 4iP.\frac{L'}{r'^3}.(t^2+\tfrac{1}{32}).(\Gamma'-\Gamma.\cos V'.\cos \varepsilon)^2.\left\{1{,}0611.\sin \varepsilon'^2 + \frac{\frac{2L}{r^3}\,.\cos V^2}{\frac{L'}{r'^3}\,.\cos V'^2 - \frac{L}{r^3}\,.\cos V^2}\right\};$$

und in den $2i$ Quadraturen der Sonnenwenden,

$$Y'' = 4\,i\,P\,.\left(\frac{L'}{r'^3}\,.\cos V'^2 - \frac{L}{r^3}\,.\cos V^2\right)$$

$$+ 4iP.\frac{L'}{r'^3}.(t^2+\tfrac{1}{32}).\left(\Gamma'.\cos\varepsilon' - \frac{\Gamma}{\cos \varepsilon}\right)^2.\left\{\frac{\frac{2L}{r^3}\,.\cos V^2}{\frac{L'}{r'^3}.\cos V'^2 - \frac{L}{r^3}\,.\cos V^2} - 1{,}0611\,.\mathrm{tang}\,\varepsilon'^2\right\}.$$

Man wird endlich wie im 22sten Satz sehen, daſs es hinreichend ist, um auf die von Q abhängenden Glieder Rücksicht zu nehmen, bey den auf die Nachtgleichen sich beziehenden Ausdrücken L' in $L'\left(1 - \frac{2\,m'\,Q}{\cos V'}\right)$, und bey den auf die Sonnenwenden sich beziehenden Ausdrücken L' in $L'(1 - 2m'.Q.\cos\varepsilon')$ zu verwandeln.

30. Ich habe, um diese Resultate mit den Beobachtungen zu vergleichen, in der angeführten Sammlung die Beobachtungen für 24 Quadraturen in der Nähe der Nachtgleichen, und 24 Quadraturen in der Nähe der Sonnenwenden genommen, und immer zwey auf einander folgende Quadraturen betrachtet. Folgendes sind die Tage dieser Quadraturen zu Brest:

Quadraturen der Nachtgleichen.

Jahr 1711; 5 Sept., 19 Sept., 4 October., 18 October.
— 1712; 15 März, 29 März, 24 Aug., 8 Sept., 22 Sept., 7 October.
— 1714; 18 Aug., 1 Sept., 17 Sept., 30 September.
— 1715; 12 März, 28 März, 22 Aug., 6 September.
— 1716; 1 März, 15 März, 30 März, 14 April, 8 Sept., 23 September.

Quadraturen der Sonnenwenden.

Jahr 1711; 23 Jun., 7 Julius.
— 1712; 27 May, 12 Jun., 25 Jun., 11 Julius.
— 1714; 21 May, 5 Jun., 20 Jun., 4 Jul., 14 Dec., 28 December.
— 1715; 26 May, 8 Jun., 24 Jun., 8 Jul., 18 Nov., 3 Dec., 17 December.
— 1716; 2 Jan., 28 May, 12 Jun., 27 Jun., 11 Julius.

Ich hätte gewünscht, eben so viel Quadraturen in der Nähe der Wintersonnenwenden, als in der Nähe der Sommersonnenwenden zu betrachten; der Mangel der Beobachtungen hat mir es aber nicht verstattet.

Ich habe in jeder dieser Quadraturen ein Mittel zwischen den absoluten Höhen zweyer auf einander folgenden Fluthen genommen, um das zu erhalten, was ich mittlere absolute Fluthhöhe nenne. Ich habe zuerst die beiden Fluthen des Tages der Quadratur betrachtet; dann die beiden folgenden Fluthen; hernach die auf diese folgenden Fluthen; endlich die beiden Fluthen, welche auf die letztern folgen, so daſs oft die beiden Fluthen, die ich zusammen betrachtet habe, nicht an demselben Tag sich ereignet haben. Die ganze Fluthhöhe ist der Ueberschuſs der mittlern absoluten Höhe über die dazwischen fallende Ebbe. Ich bezeichne diese Fluthen durch die Zahlen 0, 1, 2, 3, und fange hierbey von der Fluth an, die auf den Tag der Quadratur fällt. Die Höhe der Ebbe ist zuweilen nicht beobachtet worden; zuweilen ist sogar nur eine der beiden Höhen jedes Tages beobachtet worden. Ich habe mich dann zur Ergänzung der fehlenden Beobachtungen derselben Methode bedient, die ich für die Fluthen in den Syzygien gebraucht habe. Ich habe so die folgenden Resultate erhalten.

Vierte Tafel.

Quadraturen der Nachtgleichen.

Mittlere absolute Fluthhöhen.			*ganze Fluthhöhen.*
Nummer der Fluth.	Mètres		Mètres.
0	99,511	- - - -	69,835
1	94,282	- - - -	58,638
2	96,059	- - - -	62,383
3	105,639	- - - -	81,342.

Quadraturen der Sonnenwenden.

Nr. der Fluth.	*Mittlere absolute Fluthhöhen.*		*Ganze Fluthhöhen.*
0	$106^{me},117$	- - - -	$82^{me},244$
1	102,997	- - - -	76,289
2	103,220	- - - -	76,654
3	106,760	- - - -	84,498.

31. Wir wollen zuerst alle Beobachtungen zusammen betrachten. Man erhält für alle 48 Quadraturen die folgenden Resultate:

Fünfte Tafel.

Nummer der Fluth.	*Mittlere absolute Fluthhöhen.* Mètres.		*ganze Fluthhöhen.* Mètres.
0	205,628	- - - -	152,079
1	197,279	- - - -	134,927
2	199,279	- - - -	139,037
3	212,399	- - - -	165,840.

Man nehme den zwischen zwey Morgen- oder Abendfluthen in der Nähe der Quadraturen verflossenen Zeitraum zur Einheit an, und den mittlern Augenblick zwischen den beiden Fluthen am Tage der Quadratur zu Brest zur Epoche. Es sey $a - bx + cx^2$ der Ausdruck der absoluten Fluthhöhe für irgend einen Tag in der Nähe dieser Lichtgestalt, wo x die Anzahl der als Einheit angenommenen Zwischenräume ist, um welche diese Fluth auf die Epoche folgt. Bezieht sich dieser Ausdruck auf eine Morgenfluth, so wird der Ausdruck der Abendfluthhöhe desselben Tages $a - b\,(x + \frac{1}{2}) + c\,(x + \frac{1}{2})^2$ seyn, wenn man nur die Ungleichheiten betrachtet, deren Periode beynahe ein halber Tag ist. Addirt man diese beiden Ausdrücke, so wird die Hälfte ihrer Summe die mittlere absolute Fluthhöhe seyn; der Ausdruck dieser Höhe ist folglich

$$a + \tfrac{1}{16}\,c - b.(x + \tfrac{1}{4}) + c.(x + \tfrac{1}{4})^2.$$

Der Ausdruck der dazwischen fallenden Ebbe ist nach der Theorie von der Form

$$a' + b.(x + \tfrac{1}{4}) - c.(x + \tfrac{1}{4})^2.$$

Setzt man daher $x + \frac{1}{4} = t$, so ist der Ausdruck der ganzen Fluthhöhe von folgender Form:

$$m - 2bt + 2ct^2.$$

Das Minimum dieser Fluth hat dann Statt, wenn $t = \dfrac{b}{2c}$; dieser Werth von t ist auch der Werth von x, der dem Minimum der Formel $a - bx + cx^2$ entspricht.

Man kann zur Bestimmung von $\frac{b}{2c}$ die ganzen Fluthhöhen der fünften Tafel gebrauchen; da aber die absoluten Höhen derselben Tafel mit gröfserer Sorgfalt beobachtet worden sind, als die ganzen Fluthhöhen, so werden wir sie beide zusammen gebrauchen. Es seyen also f, f', f'', f''' die vier Summen, welche man erhält, wenn man die mittlern absoluten Höhen der Tafel zu den zugehörenden ganzen Fluthhöhen addirt, so wird der analytische Ausdruck dieser Summen von folgender Form seyn: $k - ibt + ict^2$. Setzt man hier nach und nach $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, so erhält man die Werthe von $f, f' f'', f'''$, woraus man

$$4ic = f - f' - f'' + f''',$$
$$ib = 3\,ic + \frac{f + f' - f'' - f'''}{4},$$

und folglich

$$\frac{b}{2c} = \tfrac{1}{2} + \frac{f + f' - f'' - f'''}{2.(f - f' - f'' + f''')} = 1{,}2964$$

finden wird. Man wird in der Folge sehen, dafs der zur Einheit angenommene Zeitraum gleich $1^{tag},0521$ ($1^{t}.1^{st}.15'.2''$) ist; der Zeitraum der von der Epoche bis zum Minimum der Fluthhöhen verflossen ist, ist folglich in Tagen ausgedrückt gleich $1^{tag},3639$. Die Zeit der Epoche war zu Brest in diesen Beobachtungen $0^{tag},6121$, und die mittlere Zeit der Quadraturen war $0^{tag},4683$, so dafs die Quadratur um $0^{tag},1438$ vor der Epoche vorherging. Addirt man diese Gröfse zu $1^{tag},3639$, so findet man $1^{tag},5077$ ($= 1^{t}.12^{st}.11'.5''$) für den Zeitraum, um welchen das Minimum der Fluthhöhen auf die Quadratur folgt. Dies ist sehr wenig von $1^{tag},50724$ ($= 1^{t}.12^{st}.10'.26''$) verschieden, welches der Zeitraum ist, um welchen das Maximum der Fluthhöhen auf die Syzygie folgt, wie man im 24sten Satz gesehen hat: beide Zeiträume sind folglich einander gleich, wie sie es nach der Theorie seyn müssen. Wir werden sie beide gleich $1^{tag},50724$ setzen.

Wir wollen nun das Gesetz bestimmen, nach welchem sich die mittlern absoluten und ganzen Fluthhöhen in den 48 vorhergehenden Quadraturen ändern. Wir nehmen hierzu den zwischen zwey auf einander folgenden Morgen- oder Abendfluthen in der Nähe der Quadraturen verflossenen Zeitraum zur Einheit an, und wir nennen k die Gröfse, um welche der mittlere Augenblick des

Minimums der Fluthhöhen vor dem Mittel des Zeitraums vorhergeht, der zwischen den 4 Tagen der Beobachtungen enthalten ist. Es sey $a + bt^2$ der allgemeine Ausdruck der mittlern absoluten Höhen der fünften Tafel, wo t die Entfernung vom Minimum dieser Höhen ist. Die mittlern absoluten Höhen, welche zu den Zahlen 0, 1, 2, 3 gehören, sind dann

$$a + b.(\tfrac{3}{2} - k)^2; \quad a + b.(\tfrac{1}{2} - k)^2; \quad a + b.(\tfrac{1}{2} + k)^2; \quad a + b.(\tfrac{3}{2} + k)^2.$$

Zieht man die Summe der beiden mittlern von der Summe der beiden äufsersten ab, so erhält man $4b$ zum Unterschied, welcher nach der fünften Tafel gleich $21^{me},469$ ist; hieraus findet man $b = 5^{me},3672$ ($= 16^F,5226$).

Stellt man eben so durch $a' + b't^2$ die ganzen Fluthhöhen der fünften Tafel vor, so findet man auf dieselbe Art $b' = 10^{me},9887$. Nach der Theorie ist $b = \frac{1}{2}b' = 5^{me},4943$ ($= 16^F,9139$). Der Unterschied zwischen diesem Werth von b und dem vorhergehenden ist innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Nimmt man für b das Drittheil der Summe der beiden Werthe von b und b' und statt b' das Doppelte dieses Drittheils, so findet man

$$b = 5^{me},4520 \ (= 16^F,7836); \qquad b' = 10^{me},9040 \ (= 33^F,5673).$$

Wir bemerken zur Bestimmung von a und a', dafs die Summe der vier vorhergehenden Ausdrücke der absoluten Fluthhöhen gleich $4a + b(5 + 4k^2)$ ist; diese Summe ist nach der fünften Tafel gleich $814^{me},585$, folglich

$$a = \frac{814^{me},585 - (5 + 4k^2)\, 5^{me},4520}{4}.$$

Man findet auf dieselbe Art

$$a' = \frac{591^{me},883 - (5 + 4k^2)\, 10^{me},9040}{4}.$$

Wir bemerken ferner zur Bestimmung von k, dafs die mittlere Zeit der Quadratur zu Brest in den 48 Quadraturen der fünften Tafel $0^{tag},46829$ war; addirt man hierzu die Entfernung der Quadratur vom Minimum der Fluthhöhen, nämlich $1^{tag},50724$, so erhält man $1^{tag},97553$ für die Entfernung des Augenblicks des Minimums der Fluthhöhen von der Mitternacht, die vor der Quadratur vorhergeht. Der mittlere Augenblick zwischen den beiden Fluthen des Tages der Quadratur war zu Brest in den Beobachtungen der fünften Tafel $0^{tag},61215$; addirt man hierzu $\frac{3}{2}$ des zur Einheit angenommenen Zeitraums, welcher gleich $1^{tag},05207$ ist, so erhält man $2^{tag},19025$ für die Entfernung der Mitternacht,

welche vor der Quadratur vorhergeht, vom Mittel des Zeitraums, der zwischen den äußersten Beobachtungen der Tafel enthalten ist. Zieht man hiervon $1^{tag},97553$ ab, so ist der Unterschied $0^{tag},21472$ der Werth von k in Tagen ausgedrückt, und wenn man ihn durch $1^{tag},05207$ dividirt, so erhält man $0,204093$ für diesen Werth, in Theilen des zur Einheit angenommenen Zeitraums ausgedrückt. Hierdurch findet man

$$a = 196^{me},604; \qquad a' = 133^{me},886;$$

der Ausdruck der Zahlen der fünften Tafel für die absoluten Fluthhöhen ist folglich

$$196^{me},604 + 5^{me},4520 \,.\, t^2; \quad (605^F,234 + 16^F,7836 \,.\, t^2),$$

und der Ausdruck der Zahlen derselben Tafel für die ganzen Fluthhöhen ist

$$133^{me},886 + 10^{me},9040 \,.\, t^2; \quad (412^F,161 + 33^F,5673 \,.\, t^2).$$

Wir wollen nun diese durch die Beobachtung gegebenen Formeln mit den durch die Theorie der Schwere im 29sten Satz gegebenen Formeln vergleichen. Es sey e die Höhe des Nullpunkts des Maasstabes der Beobachtung über die Horizontalfläche des Gleichgewichts, welche das Meer ohne die Wirkung der Sonne und des Mondes haben würde; es sey ferner h die Summe der Quadrate der Kosinus der Abweichungen der Sonne in den Augenblicken des ersten oder letzten Viertels in den Quadraturen der fünften Tafel, und h' dieselbe Summe in Beziehung auf den Mond, so erhält man nach Satz 29.

$$48\,e - \frac{3\,(1 + 3\cos 2\theta)}{8\,g\,.\left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)} \,.\left[\frac{L}{r^3}(h - 32) + \frac{L'}{r'^3}(h' - 32)\right]$$

$$+ P\,.\left(\frac{h'\,L'}{r'^3} - \frac{h\,L}{r^3}\right) + \tfrac{1}{16}\,b = 196^{me},604;$$

man hat für Brest nach Satz 25

$$\frac{(1 + 3\cos 2\theta)}{8g\,.\left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right)} \,.\, \frac{L}{r^3} = 0^{me},02745.$$

Der Werth von $\frac{L}{r^3}$ ist aber in den von uns betrachteten 48 Quadraturen nicht genau seinem mittlern Werth gleich. Die fünfte Tafel enthält 24 Quadraturen der Nachtgleichen, 18 Quadraturen der Sommersonnenwenden und 6 Quadraturen der Wintersonnenwenden. Man hat aber im 27sten Satz gesehen, dafs

dafs $\frac{L}{r^3}$ in den Quadraturen der Sommersonnenwenden um $\frac{1}{20}$ abnimmt, in den Quadraturen der Wintersonnenwenden hingegen um $\frac{1}{20}$ zunimmt; man mufs folglich den mittlern Werth von $\frac{L}{r^3}$ in $\frac{79}{80}$ multipliciren, um seinen mittlern Werth in den 48 Quadraturen zu erhalten; die Gröfse $\frac{L'}{r'^3}$ ist ferner um $\frac{1}{40}$ in den Quadraturen kleiner, als in den mittlern Entfernungen, wegen des Arguments der Variation; und da diese Gröfse in den mittlern Entfernungen sehr nahe gleich $\frac{3L}{r^3}$ ist, so mufs man sie in den Quadraturen gleich $\frac{117}{40} \cdot \frac{L}{r^3}$ setzen. Ich habe endlich in den vorhergehenden Quadraturen

$$h = 44,16767; \quad h' = 44,45074$$

gefunden; man erhält so

$$\frac{3(1+3\cos 2\theta)}{8g \cdot \left(1-\frac{3}{5\varrho}\right)} \cdot \left[\frac{L}{r^3}(h-32) + \frac{L'}{r'^3}(h'-32)\right] = 3^{me},989.$$

Vergleicht man den Ausdruck der ganzen Fluthhöhen der fünften Tafel mit den Formeln des 29sten Satzes, so findet man

$$2P \cdot \left(\frac{h'L'}{r'^3} - \frac{hL}{r^3}\right) + \tfrac{1}{16} b = 133^{me},886.$$

Diese Gleichung bedarf einer geringen Verbesserung, die deswegen nöthig ist, weil es unter den Quadraturen der fünften Tafel 18 Quadraturen in den Sommersonnenwenden und 6 Quadraturen in den Wintersonnenwenden giebt; nun entspricht aber die Ebbe in diesen Quadraturen der Abendsonnenfluth, welche zu Brest im Sommer die Morgensonnenfluth um $0^{me},0457$ übertrifft; man mufs folglich die Gröfse $133^{me},886$ um sechsmal $0^{me},0457$ vermehren, damit sie von den Ungleichheiten, deren Periode beynahe ein Tag ist, unabhängig sey, und man erhält alsdann

$$2P \cdot \left(\frac{h'L'}{r'^3} - \frac{hL}{r^3}\right) = 133^{me},819.$$

Hieraus findet man

$$e = 2^{me},778; \; (= 8^{P}.6^{z},62).$$

Die Beobachtungen der Syzygien haben uns im 25sten Satz $e = 2^{me},827$

(= 8^r, 8^z, 43) gegeben. Ob der geringe Unterschied zwischen diesen beiden Werthen von den Fehlern der Beobachtungen oder, wie ich vermuthe, davon abhängt, daſs das Meer zu Brest nicht gänzlich so weit fällt, als die Theorie in den groſsen Fluthen giebt? dies wird eine gröſsere Anzahl Beobachtungen zu erkennen geben.

Wir wollen die Gleichung

$$2P.\left(\frac{h'.L'}{r'^3}-\frac{h.L}{r^3}\right)=133^{me},819$$

wieder vornehmen. Will man die Werthe von $\frac{L}{r^3}$ und von $\frac{L'}{r'^3}$ auf die mittlern Entfernungen der Sonne und des Mondes bringen, so muſs man die Summe der Quadrate der Kosinus der Abweichungen der Sonne und des Mondes in den Quadraturen der Sonnenwenden der fünften Tafel in $\frac{3}{40}$ multipliciren, um darauf Rücksicht zu nehmen, daſs die Anzahl der Sommersonnenwenden gröſser ist, als die der Wintersonnenwenden; addirt man hernach das Product zu der Summe der Quadrate der Kosinus der Abweichungen der Sonne in den Quadraturen der Nachtgleichen, so wird die Summe der Werth von h seyn, welchen man hier brauchen muſs. Ich finde so $h = 43,6557$.

Der Werth von $\frac{L'}{r'^3}$ muſs in den Quadraturen wegen des Arguments der Variation um $\frac{1}{40}$ vermindert werden, welches eben so viel ist, als h' in demselben Verhältniſs zu vermindern, welches dann 43,3395 wird; man hat folglich

$$2P.\left(43,3395.\frac{L'}{r'^3}-43,6557.\frac{L}{r^3}\right)=133^{me},819,$$

wo r und r' die mittlern Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde sind. Man kann dieser Gleichung die folgende Gestalt geben

$$2P.43,3395.\left(\frac{L'}{r'^3}-\frac{L}{r^3}\right)-2P.0,3162.\frac{L}{r^3}=133^{me},819.$$

Man kann in dem kleinen Glied $2P.0,3162.\frac{L}{r^3}$

$$\frac{L}{r^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{L'}{r'^3}-\frac{L}{r^3}\right)$$

setzen; man erhält dann

$$2P \cdot 43{,}1814 \cdot \left(\frac{L'}{r'^3} - \frac{L}{r^3}\right) = 133^{me},819,$$

und hieraus

$$2P \cdot \left(\frac{L'}{r'^3} - \frac{L}{r^3}\right) = 3^{me},0990.$$

Wir haben im 25sten Satz

$$2P \cdot \left(\frac{L'}{r'^3} + \frac{L}{r^3}\right) = 6^{me},2490$$

gefunden; dies giebt

$$\frac{L'}{r'^3} = 2{,}9677 \cdot \frac{L}{r^3};$$

man kann also sehr nahe $\frac{L'}{r'^3}$ dreymal so groſs als $\frac{L}{r^3}$ setzen. Man muſs aber hier bemerken, daſs dies Verhältniſs nicht genau das Verhältniſs der Massen der Sonne und des Mondes, jede durch den Würfel ihrer mittlern Entfernungen von der Erde dividirt, ist. Es erhellet aus Satz 25., daſs das gefundene Verhältniſs gleich $\frac{L' \cdot (1 - 2m'Q)}{r'^3}$ zu $\frac{L \cdot (1 - 2mQ)}{r^3}$ ist, wenn L' und L diese Massen und $m't$, mt die mittlern Bewegungen dieser Gestirne um die Erde ausdrücken; man kann also dieses Verhältniſs nur dann für das Verhältniſs $\frac{L'}{r'^3}$ zu $\frac{L}{r^3}$ nehmen, wenn Q gleich Null oder unmerklich ist, und wir haben im vorhergehenden gesehen, daſs dies sehr nahe im Hafen von Brest der Fall ist.

Wir werden nun die Aenderungen der Fluthhöhen in der Nähe ihres Minimums bestimmen, so wie die Theorie sie giebt. Hierzu nehmen wir die Werthe von Y'' des 29sten Satzes wieder vor. Es sollen p und p' die Summen der Quadrate der Kosinus der Abweichungen der Sonne und des Mondes in den Quadraturen der Nachtgleichen der fünften Tafel seyn; es sollen q und q' dieselben Summen in den Quadraturen der Sonnenwenden dieser Tafel seyn, so wird man in diesen Ausdrücken

$$\cos \varepsilon^2 = \frac{q}{24}; \qquad \cos \varepsilon'^2 = \frac{p'}{24}$$

setzen können; das in t^2 multiplicirte Glied des Ausdrucks von Y'', welcher

sich auf die 24 Quadraturen der Nachtgleichen bezieht, verwandelt sich dann in

$$\tfrac{39}{40}.48.P.\frac{L'}{r'^3}.t^2.\left(\Gamma'-\frac{\Gamma}{24}.\sqrt{qp'}\right)^2.\left\{1{,}0611.\left(\frac{24-p'}{24}\right)+\frac{2p.\frac{L}{r^3}}{\tfrac{39}{40}p'.\frac{L'}{r'^3}-p.\frac{L}{r^3}}\right\},$$

wo Γ′ und Γ die Bewegungen des Mondes und der Sonne in den Quadraturen während des zur Einheit angenommenen Zeitraums sind, welcher in den Quadraturen der Nachtgleichen gleich $1^{tag},057496$ ist; man muſs hierbey bemerken, daſs Γ′ in den Quadraturen beständig durch die Ungleichheit der Variation vermindert wird.

Vermindert man $\frac{L}{r^3}$ um $\frac{1}{40}$, weil es in der fünften Tafel 18 Quadraturen in den Sommersonnenwenden gegen 6 in den Wintersonnenwenden giebt, so wird das in t^2 multiplicirte Glied des Ausdrucks von Y'' für die 24 Quadraturen der Sonnenwenden gleich

$$\tfrac{39}{40}.48.P.\frac{L'}{r'^3}.t^2.\left\{\Gamma'.\sqrt{\frac{p'}{24}}-\frac{\Gamma}{\sqrt{\frac{q}{24}}}\right\}^2.\left\{\frac{2q'L}{\frac{q'L'}{r'^3}-\frac{qL}{r^3}}-1{,}0611.\left(\frac{24-p'}{p'}\right)\right\},$$

wo Γ′ und Γ die Bewegungen des Mondes und der Sonne in diesen Quadraturen während des zur Einheit angenommenen Zeitraums sind, welcher in den Quadraturen der Sonnenwenden gleich $1^{tag},046644$ ist.

In diesen Ausdrücken sind $\frac{L}{r^3}$ und $\frac{L'}{r'^3}$ auf die mittlern Entfernungen der Sonne und des Mondes von der Erde gebracht, wo man

$$\frac{L'}{r'^3}=3.\frac{L}{r^3};\qquad 2P.\frac{L'}{r'^3}=\tfrac{3}{4}.6^{me},2490$$

hat. Ich habe gefunden

$p=23{,}68841$; $p'=20{,}69652$; $q=20{,}47926$; $q'=23{,}75422$.

Dies festgesetzt, erhält man $7^{me},819$ ($24^{F}.0^{Z},84$) für das in t^2 multiplicirte Glied des Ausdrucks von Y'', welcher sich auf die 24 Quadraturen der Nachtgleichen bezieht, und $2^{me},794$ ($8^{F}.7^{Z},22$) für dasselbe Glied in Beziehung auf die 24 Quadraturen der Sonnenwenden. Die Summe dieser beiden Glieder ist $10^{me},613$

(32^F. 8^z, 06), welches sehr wenig von 10^me, 9040 (33^F. 6^z, 81) verschieden ist, welches Resultat die Beobachtungen der fünften Tafel geben.

32. Man betrachte nun die Fluthen der Quadraturen der Nachtgleichen und die der Sonnenwenden besonders. Man findet durch die Methode des vorhergehenden Satzes

$$94^{me},033 + 3^{me},747.t^2 \;(= 289^F,475 + 11^F,535.t^2),$$
$$58^{me},370 + 7^{me},495.t^2 \;(= 179^F,688 + 23^F,073.t^2)$$

für die Ausdrücke der absoluten und ganzen Fluthhöhen in den Nachtgleichen der vierten Tafel; die Ausdrücke derselben Gröfsen für die Fluthen der Sonnenwenden derselben Tafel sind

$$102^{me},571 + 1^{me},705.t^2 \;(= 315^F,571 + 5^F,249.t^2),$$
$$75^{me},517 + 3^{me},410.t^2 \;(= 232^F,474 + 10^F,504.t^2).$$

Man sieht erstlich, dafs die Fluthhöhen schneller in den Nachtgleichen als in den Sonnenwenden wachsen, welches der Theorie gemäfs ist. Der Koeffizient von t^2 der ganzen Fluthhöhen ist $7^{me},495$ ($23^F.0^z,87$) in den Nachtgleichen und $3^{me},410$ ($10^F.6^z,04$) in den Sonnenwenden; wir haben im vorhergehenden Satz gesehen, dafs die Theorie für diese Koeffizienten $7^{me},819$ ($= 24^F.0^z,84$) und $2^{me},794$ ($8^F.7^z,22$) giebt: die Unterschiede sind innerhalb der Grenzen der Fehler der Beobachtungen und der in dieser Rechnung gebrauchten Elemente.

Zieht man das erste Glied des Ausdrucks der ganzen Fluthhöhen in den Nachtgleichen von dem ersten Glied ihres Ausdrucks in den Sonnenwenden ab, so wird der Unterschied $17^{me},147$ die Wirkung der Abweichungen der Gestirne seyn. Will man sie von den Fluthen, deren Periode beinahe ein Tag ist, unabhängig erhalten, so mufs man zu ihr 6mal $0^{me},0457$ hinzusetzen und sie wird alsdann $17^{me},421$.

Diese Wirkung ist nach den Formeln des 29sten Satzes gleich

$$\tfrac{39}{40}.2P.\left[\frac{L}{r^3}.(p-q)+\frac{L'}{r'^3}.\left[(1-2m'.Q.\cos\varepsilon')\,q'-\left(1-\frac{2m'.Q}{\cos\varepsilon'}\right).p'\right]\right],$$

oder

$$\tfrac{39}{40}.2P.\left[\frac{L}{r^3}.(p-q)+\frac{L'}{r'^3}.(1-2m'.Q)(q'-p')\right]$$
$$+\tfrac{39}{40}.2P.\frac{L'}{r'^3}.(1-2m'.Q)(1-\cos\varepsilon')\left(q'+\frac{p'}{\cos\varepsilon'}\right).\frac{2m'Q}{1-2m'Q};$$

wo man p um seinen 39sten Theil vermehren muſs, und wo man $\cos \epsilon' = \sqrt{\frac{p'}{24}}$ setzen kann. Bemerkt man nun, daſs

$$\frac{L'}{r'^3} \cdot (1 - 2m' \cdot Q) = \frac{3L}{r^3}; \qquad 2P \cdot \left[\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3} \cdot (1 - 2m' \cdot Q)\right] = 6^{me},2490$$

ist, so verwandelt sich dieser Ausdruck in folgenden

$$18^{me},861 + \frac{2m'Q}{1 - 2m'Q} \cdot 15^{me},015.$$

Setzt man ihn dem Resultat der Beobachtungen $17^{me},421$ gleich, so erhält man

$$2m'Q = -0,1061,$$

welches Resultat dem gemäſs ist, was uns die in der Nähe der Syzygien angestellten Beobachtungen im 26sten Satz gegeben haben, aber ein entgegengesetztes Zeichen mit dem Resultat hat, welches wir im 27sten Satz aus der Vergleichung der Beobachtungen in der Erdnähe und in der Erdferne gefunden haben. Es folgt hieraus daſs man die von Q abhängenden Glieder vernachlässigen kann, bis eine sehr groſse Anzahl Beobachtungen seinen wahren Werth bestimmt hat.

33. Man hat im 29sten Satz gesehen, daſs zu Brest die Abendfluthen in den Quadraturen der Frühlingsnachtgleiche die Morgenfluthen übertreffen müssen, und daſs das Entgegengesetzte bey den Fluthen in der Nähe der Quadraturen der Herbstnachtgleiche Statt findet. Ich habe, um dies Phänomen zu prüfen, die Ueberschüsse der Abendfluthen über die Morgenfluthen am ersten und zweyten Tag nach der Quadratur bey 11 Quadraturen in der Nähe der Frühlingsnachtgleichen addirt; die Summe dieser Ueberschüsse war $3^{me},143$. Ich habe eben so $3^{me},385$ für die Summe der Ueberschüsse der Morgenfluthen über die Abendfluthen bey 13 Quadraturen in den Herbstnachtgleichen gefunden. Das Mittel zwischen diesen Beobachtungen giebt $0^{me},138$ ($= 5^z,10$) für den Ueberschuſs einer Abendfluth über die Morgenfluth in den Quadraturen der Frühlingsnachtgleichen, oder einer Morgenfluth über die Abendfluth in den Quadraturen der Herbstnachtgleichen.

Wir haben im 28sten Satz den Ueberschuſs der Abendfluthen über die Morgenfluthen in den Syzygien der Sommersonnenwenden gleich $0^{me},183$ ($= 6^z,76$) gefunden. Dieser Ueberschuſs verhält sich, nach der Theorie, zum

vorhergehenden wie $\left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right)$ zu $\frac{L'}{r'^3}$ oder wie 4 zu 3; dies ist sehr nahe das Verhältniſs der Zahlen 0,183 und 0,138.

Ich habe endlich gefunden, daſs der Einfluſs der Aenderung der Entfernung des Mondes sich auf eine eben so merkliche Art in den Beobachtungen der Fluthen der Quadraturen, als in den Fluthen der Syzygien zeigt.

Von den Zeiten der Fluthen und von ihren Zwischenzeiten in der Nähe der Syzygien.

34. Man nehme die im 21sten Satz gefundene Gleichung

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 \cdot \sin 2(\psi - \psi')}{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 + \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 \cdot \cos 2(\psi - \psi')}$$

wieder vor, und man gebe ihr folgende Form:

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) = \frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot \sin 2(\psi' - \psi)}{\frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 + \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot \cos 2(\psi' - \psi)}.$$

Da der Winkel $\psi' - \psi$ in den Syzygien wenig beträchtlich ist, so kann man seine dritte Potenz vernachlässigen; man erhält so

$$nt + \varpi - \psi - \lambda = \frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot (\psi' - \psi)}{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 + \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2}.$$

Wir werden nun den Augenblick betrachten, der in die Mitte der beiden Fluthen desselben Tages fällt, welchen Augenblick wir Zeit der ganzen Fluthhöhe nennen wollen; die vorhergehende Gleichung wird auch noch für diesen Augenblick gelten, wenn die veränderlichen Gröſsen nt, ψ und ψ' sich auf ihn beziehen. Nun ist aber $nt + \varpi - \psi$ der Stundenwinkel der Sonne und $\psi' - \psi$ im Maximum der ganzen Fluthhöhen gleich Null; nennt man daher T die Zeit dieses Maximums in wahrer Zeit ausgedrückt, so ist die wahre Zeit der ganzen Fluthhöhe irgend eines Tages gleich

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot (\psi' - \psi)}{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 + \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2};$$

wo das zweyte Glied dieses Ausdrucks in Zeit verwandelt werden muſs, im Verhältniſs des ganzen Umkreises für einen Tag. Es sey v' die synodische Bewegung des Mondes in den Syzygien während des Zeitraums, der zwischen zwey auf einander folgenden Morgen- oder Abendfluthen in der Nähe der Syzygien enthalten ist, welchen Zeitraum wir zur Einheit annehmen wollen; es sey t die Anzahl dieser Zeiträume, vom Augenblick des Maximums in den Syzygien der Nachtgleichen an gezählt, so wird $\psi' - \psi$ sehr nahe gleich $t \,.\, v' \,.\, \cos \varepsilon'$ seyn, und man wird $\cos v'^2 = \cos v^2$ setzen können; die Zeit der Fluth, in wahrer Zeit ausgedrückt, ist folglich:

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3} \,.\, t \,.\, v' \,.\, \cos \varepsilon'}{\frac{L'}{r'^3} + \frac{L}{r^3}}.$$

Die Gröſse $(\psi' - \psi) \,.\, \cos v'$ ist in den Sonnenwenden sehr nahe gleich $t v'$, und man kann auch hier $\cos v'^2 = \cos v^2$ setzen; die wahre Zeit der Fluth ist folglich

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3} \,.\, t v'}{\left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) \,.\, \cos v'};$$

t muſs in diesen Formeln für Fluthen, die vor das Maximum fallen, negativ angenommen werden. Wir wollen sie nun mit den Beobachtungen vergleichen.

35. Ich habe hierzu die Zeiten der ganzen Fluthhöhen der ersten Tafel für die Tage 0, 1, 2, 3, so bestimmt, daſs ich das Mittel zwischen den Zeiten der beiden Fluthen desselben Tages genommen habe, welche Zeiten von der vorhergehenden wahren Mitternacht gezählt worden sind. Ich habe folgende Resultate gefunden:

Sechste Tafel.

Syzygien der Nachtgleichen.

Tage von der Syzygie an gezählt.	*Zeit der ganzen Fluthhöhe zu Brest in wahrer Zeit ausgedrückt.*
0 - - -	0^{tag},39708
1 - - -	0,42222
2 - - -	0,44733
3 - - -	0,47359.

Syzy-

Syzygien der Sonnenwenden.

Tage von der Syzygie an gezählt.	*Zeit der ganzen Fluthhöhe zu Brest in wahrer Zeit ausgedrückt.*
0	$0^{tag},39606$
1	0,42592
2	0,45369
3	0,48186.

Man betrachte zuerst diese Beobachtungen alle zusammen. Nimmt man ein Mittel zwischen den Zeiten der ganzen Fluthhöhen dieser Tafel, welche zu demselben Tag in den Syzygien der Nachtgleichen und in denen der Sonnenwenden gehören, so erhält man $0^{tag},39657$; $0^{tag},42407$; $0^{tag},45051$; $0^{tag},477725$ für die wahren Zeiten der ganzen Fluthhöhen, die zu den Tagen 0, 1, 2, 3 gehören. Es sey $a + bt'$ der allgemeine Ausdruck dieser Zeiten, wo t' die Anzahl der zur Einheit angenommenen Zeiträume ist, vom Augenblick der ganzen Fluthhöhe des Tages der Syzygie an gezählt. Zieht man die Zeit der vierten Fluth von der Zeit der ersten ab, so ist der Unterschied gleich $3b$; hieraus findet man $b = 0^{tag},027052$. Zieht man von der Summe der vier vorhergehenden Zeiten $6b$ ab, so ist der Unterschied gleich $4a$; dies giebt $a = 0^{tag},39664$; der Ausdruck dieser Zeiten wird so

$$0^{tag},39664 + 0^{tag},027052 \,.\, t'.$$

Will man hieraus die beständige Gröfse T des vorhergehenden Satzes bestimmen, so bemerke man, dafs die Zeit der Fluth um $0^{tag},027052$ zunimmt, wenn die Fluth sich um $1^{tag},027502$ entfernt. Nun ist aber die Zeit der Syzygien der vorhergehenden Tafel zu Brest im Mittel $0^{tag},45667$; nimmt man daher an, dafs diese Zeit $0^{tag},45667 - x$ ist, so wird die Zeit der ganzen Fluthhöhe $0^{tag},39664 + 0,027052 \,.\, x$ seyn, und diese letztere Zeit wird um $1,027052 \,.\, x - 0^{tag},06003$ auf die Syzygie folgen. Nun ist T die Zeit der zum Maximum gehörenden ganzen Fluthhöhe, welche, nach Satz 24, um $1^{tag},50724$ auf die Syzygie folgt; setzt man also die Funktion $1,027052 \,.\, x - 0^{tag},06003$ dieser Gröfse gleich, so wird man x bestimmen und man wird finden,

$$0^{tag},39664 + 0,027052 \,.\, x = 0^{tag},43793.$$

Dies ist der Werth von T zu Brest, und dies würde die Zeit der ganzen Sonnenfluthhöhe in diesem Hafen seyn, wenn die Sonne allein auf das Meer wirkte, und wenn dies Gestirn sich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegte, Zieht man davon ein Viertheil des Tages ab, so wird der Unterschied $0^{tag},18793$.

die Zeit der Sonnenfluth zu Brest in diesen Voraussetzungen seyn, von der wahren Mitternacht oder Mittag an gezählt.

Wir wollen nun den Werth des Koeffizienten von t', der aus dem Gesetz der Schwere entspringt, bestimmen. Man hat im vorhergehenden Satz gesehen, daſs dieser Koeffizient in den Syzygien der Nachtgleichen gleich

$$\frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot v' \cdot \cos \varepsilon'}{\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}}$$

ist; der Winkel v' ist nach Satz 25 gleich 141866″: dividirt man ihn durch 4, um ihn in Theile des Tages zu verwandeln, so findet man $0^{tag},0354655$. Man kann $\cos \varepsilon'$ gleich $\sqrt{\frac{q'}{24}}$ setzen, wo q' nach Satz 25 gleich 20,75529 ist; man hat überdies in den Syzygien der Nachtgleichen $\frac{L'}{r'^3} = \frac{123}{40} \cdot \frac{L}{r^3}$; man muſs aber diesen Werth um $\frac{1}{30}$ vermehren, weil die Ausdrücke von $\frac{L}{r^3}$ und $\frac{L'}{r'^3}$ in der Gleichung $\frac{dy}{dt} = 0$ des 21sten Satzes respective in $n - m$ und $n - m'$ multiplicirt sind, wo mt und $m't$ die Bewegungen der Sonne und des Mondes sind; $m' - m$ ist nahe $\frac{1}{30}$ von $n - m$; man findet so $0^{tag},024679$ für den Koeffizienten von t', welchen die Theorie in den Syzygien der Nachtgleichen giebt.

Derselbe Koeffizient ist nach dem vorhergehenden Satz in den Syzygien der Sonnenwenden gleich

$$\frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot v'}{\left(\frac{L}{r^3} + \frac{L'}{r'^3}\right) \cdot \cos v'}.$$

Wir können $\cos v' = \sqrt{\frac{q'}{24}}$ setzen; dies giebt $0^{tag},028603$ für diesen Koeffizienten. Addirt man ihn zum vorhergehenden, und nimmt man die Hälfte der Summe, so findet man $0^{tag},026641$; dies ist der Koeffizient von t', welchen die

Theorie für alle Syzygien der sechsten Tafel zusammen giebt, welches sehr wenig von dem durch die Beobachtungen gegebenen Resultate $0^{tag},027052$ verschieden ist.

Wollte man das Resultat der Beobachtungen mit dem der Theorie vereinigen, so müſste man das Verhältniſs von $\frac{L'}{r'^3}$ zu $\frac{L}{r^3}$ ein wenig vergröſsern, welches ein neues Mittel zur Bestimmung dieses Verhältnisses giebt. Man wird aber dies wichtige Element mit Genauigkeit bestimmen, wenn man die Unterschiede der beobachteten Fluthzeiten in einer Entfernung von $3\frac{1}{2}$ Tagen auf beiden Seiten des Maximums der Fluthhöhen gebraucht. Ich habe hierzu in der angeführten Sammlung von Beobachtungen 98 Syzygien betrachtet; ich habe die Zeiten der Morgen- und Abendfluthen des zweyten Tages vor der Syzygie addirt, welche Zeiten von der wahren Mitternacht für die Morgenfluthen, und von dem wahren Mittag für die Abendfluthen gezählt worden waren. Ich habe die Zeit der Fluth doppelt genommen, wenn sie nur einmal beobachtet worden war; dies hat mir 196 Beobachtungen gegeben. Ich habe auf dieselbe Art die Zeiten der Morgen- und Abendfluthen des fünften Tages nach der Syzygie addirt. Die Summe dieser Zeiten war $16^{tag},997222$ bey dem zweyten Tage vor der Syzygie, und $55^{tag},386111$ bey dem fünften Tage nach der Syzygie. Dividirt man ihren Unterschied durch 196, so findet man $0^{tag},195862$; dies ist die Verspätung dieser Fluthen während des Zeitraums dieser Beobachtungen.

Man nehme die Gleichung des vorhergehenden Satzes wieder vor,

$$\text{tang}\, 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) = \frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot \sin 2(\psi' - \psi)}{\frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2 + \frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot \cos 2(\psi' - \psi)}.$$

Da die 98 Syzygien, die ich betrachtet habe, ohne Unterschied in der Nähe der Nachtgleichen und der Sonnenwenden genommen worden sind, so kann man $\cos v'^2 = \cos v^2$ und $\psi' - \psi$ der synodischen Bewegung des Mondes seit dem Augenblick der gröſsten Fluthhöhe gleich setzen; da aber dieser Augenblick sehr nahe in die Mitte des zwischen den Beobachtungen enthaltenen Zeitraums fällt, so kann man $2(\psi' - \psi)$ der synodischen Bewegung des Mondes während dieses Zeitraums sehr nahe gleich setzen. Die Zeit der gröſsten Fluthhöhe wird überdies durch die Gleichung $nt + \varpi - \psi - \lambda = 0$ bestimmt; $2(nt + \varpi - \psi - \lambda)$

ist also die Verspätung der Fluth in dem zwischen diesen Beobachtungen enthaltenen Zeitraum, wenn man diese Verspätung in Theilen des Viertelkreises ausdrückt, und den ganzen Umkreis einem Tag gleich setzt. Nennt man ihn nach dieser Bestimmung μ, so hat man

$$\frac{\frac{L'}{r'^3}}{\frac{L}{r^3}} = \frac{\text{tang}\,\mu}{\sin 2\,(\psi' - \psi) - \text{tang}\,\mu\,.\cos 2\,(\psi' - \psi)}.$$

Die vorhergehenden Beobachtungen geben $\mu = 783448''$. Da aber unter den Beobachtungen vor der Syzygie 112 sich auf den Abend beziehen, und unter denen nach der Syzygie bloſs 100; so kann man leicht hieraus schlieſsen, daſs der mittlere Zeitraum dieser Beobachtungen $7^{\text{tag}}, 165249$ war. Nimmt man an, daſs dieser Zeitraum durch den Augenblick des Maximums der Fluthen in zwey gleiche Theile getheilt wird, und nimmt man auf das Argument der Variation Rücksicht, so findet man $983284''$ für die synodische Bewegung des Mondes in diesem Zeitraum; dies ist der Werth von $2\,(\psi' - \psi)$; man erhält so

$$\frac{L'}{r'^3} = 3{,}053\,\frac{L}{r^3}.$$

Dieser Werth bezieht sich auf die mittlere Entfernung des Mondes *von der* Erde, weil die Ungleichheit der Variation an den Grenzen des *zwischen* den Beobachtungen enthaltenen Zeitraums sehr nahe gleich Null ist; man muſs ihn aber, wie wir oben gesehen haben, um $\frac{1}{30}$ vermehren; dies giebt

$$\frac{L'}{r'^3} = 3{,}155\,.\,\frac{L}{r^3},$$

welcher Werth sich von 3 wenig entfernt. Die Beobachtungen der Höhen und der Zwischenzeiten der Fluthen zeigen daher einstimmig, daſs die Wirkung der Anziehung des Mondes auf die Fluthen zu Brest sehr nahe dreymal so groſs ist, als die Wirkung der Sonne.

36. Man betrachte nun die Syzygien der Nachtgleichen, so wie die der Sonnenwenden der sechsten Tafel besonders. Wendet man die Methode des vorhergehenden Satzes auf sie an, so findet man

$$0^{\text{tag}}, 39680 + 0^{\text{tag}}, 025503\,.\,t'$$

für den Ausdruck der Zeiten der ganzen Fluthhöhen in den Syzygien der Nachtgleichen, und

$0^{tag},39648 + 0^{tag},028600 . t'$

für denselben Ausdruck in den Syzygien der Sonnenwenden.

Die Zeit der Syzygie war zu Brest im Mittel $0^{tag},51612$ in den erstern Syzygien, und 0,39722 in den letztern; hieraus findet man T gleich $0^{tag},43725$ aus den Beobachtungen der Syzygien der Nachtgleichen und T gleich $0^{tag},43841$ in den Beobachtungen der Syzygien der Sonnenwenden; der Unterschied zwischen diesen Werthen und dem folgenden $0^{tag},43793$, welchen alle Beobachtungen der Syzygien zusammen uns im vorhergehenden Satz gegeben haben, ist innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Es folgt aus den vorhergehenden Ausdrücken, daſs der Koeffizient von t', oder welches dasselbe ist, die tägliche Verspätung der Fluth in der Nähe der Syzygien, in den Nachtgleichen kleiner ist als in den Sonnenwenden. Das Resultat der Beobachtungen stimmt mit der Theorie überein, welche uns im vorhergehenden Satz $0^{tag},024679$ und $0^{tag},028603$ für diese Koeffizienten gegeben hat, welche sehr wenig von den aus den Beobachtungen bestimmten Koeffizienten $0^{tag},025503$ und $0^{tag},028600$ verschieden sind.

37. Die Verspätung der Fluthen von einem Tag zum andern ändert sich sehr merklich, wenn sich die Entfernungen des Mondes von der Erde ändern. Ich habe, um die Theorie in diesem Punkt mit den Beobachtungen zu vergleichen, bey den Fluthen der dritten Tafel, die in der Erdnähe waren, die Zeiten des hohen Wassers Morgens und Abends am Tage der Syzygie addirt, welche Zeiten von der wahren Mitternacht für die Morgenfluthen, und von dem wahren Mittag für die Abendfluthen gezählt worden sind. Ihre Summe ist $3^{tag},476389$. Ich habe eben so die Zeiten des hohen Wassers am Morgen und Abend des dritten Tages nach der Syzygie addirt, und ich habe für diese Summe $5^{tag},719444$ gefunden. Der Unterschied $2^{tag},243055$ durch 72 getheilt, giebt $0^{tag},031154$ für die tägliche Verspätung der Fluthen.

Die Summe der Zeiten des hohen Wassers am Tage der Syzygie ist bey den Fluthen derselben Tafel, die in die Erdferne fallen $3^{tag},642361$, und die Summe der Zeiten des hohen Wassers am dritten Tage nach der Syzygie ist $5^{tag},229514$. Der Unterschied, durch 72 getheilt, giebt $0^{tag},022044$ für die tägliche Verspätung der Fluthen. Man sieht so, daſs diese Verspätung geringer in der Erdnähe des Mondes, als in seiner Erdferne ist, und wenn man die vorhergehenden Resultate mit den Halbmessern des Mondes in den Beobachtungen

der dritten Tafel vergleicht, so findet man, dafs eine Minute Aenderung im Halbmesser, 258″ Aenderung in der Verspätung der Fluthen von einem Tag zum andern hervorbringt.

Wir wollen nun sehen, was die Theorie über diesen Gegenstand giebt. Da die Beobachtungen der dritten Tafel ohne Unterschied in der Nähe der Nachtgleichen und der Sonnenwenden genommen worden sind, so kann man bey ihnen $\psi' - \psi$ gleich der synodischen Bewegung des Mondes in den Syzygien, und $\cos v'^2 = \cos v^2$ setzen. Die tägliche Verspätung der Fluthen in der Nähe der Syzygien ist dann nach Satz 34, gleich

$$\frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot v'}{\frac{L'}{r'^3} + \frac{L}{r^3}}.$$

Da aber v' in der Erdnähe des Mondes beträchtlicher ist, als in der Erdferne, so hat man in diesen beiden Punkten der Bahn $r'^2 v' = r_,'^2 v_,'$, wo $r_,'$ und $v_,'$ sich auf die mittlere Entfernung des Mondes in den Syzygien beziehen. Der vorhergehende Ausdruck verwandelt sich so in:

$$\frac{\frac{L'}{r_,'^3} \cdot \left(\frac{r_,'}{r'}\right)^5 \cdot v_,'}{\frac{L'}{r_,'^3} \cdot \left(\frac{r_,'}{r'}\right)^3 + \frac{L}{r^3}}.$$

Wir haben vorhin gesehen, dafs $\frac{L'}{r'^3} = \frac{123}{40} \cdot \frac{L}{r^3}$ ist; dieser Werth mufs aber hier um $\frac{1}{30}$ vermindert werden; dies giebt $\frac{L'}{r_,'^3} = 2{,}9775 \cdot \frac{L}{r^3}$; ich habe aufserdem bey den Syzygien in der Erdnähe der dritten Tafel $\frac{r_,'}{r'} = 1{,}06057$, und bey den Syzygien in der Erdferne $\frac{r_,'}{r'} = 0{,}93943$ gefunden; man hat endlich $v_,' = 0^{\text{tag}},0354655$, wenn man $v_,'$ in Zeit verwandelt im Verhältnifs des ganzen Umkreises für einen Tag. Dieses festgesetzt, giebt die vorhergehende Formel $0^{\text{tag}},031125$ für die tägliche Verspätung der Fluthen in den Syzygien in der Erdnähe der dritten Tafel, und $0^{\text{tag}},022272$ für die tägliche Verspätung der

Fluthen in den Syzygien in der Erdferne; dies ist sehr wenig von den beobachteten Verspätungen $0^{tag},031154$ und $0^{tag},022044$ verschieden.

Von den Zeiten der Fluthen in der Nähe der Quadraturen und von ihren Zwischenzeiten.

38. Verwandelt man in der Gleichung

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi - \lambda) = \frac{\frac{L'}{r'^3} . \cos \nu'^2 . \sin 2(\psi' - \psi)}{\frac{L}{r^3} . \cos \nu^2 + \frac{L'}{r'^3} . \cos \nu'^2 . \cos 2(\psi' - \psi)}$$

ψ' in $100^\circ + \psi'$ oder in $300^\circ + \psi'$, je nachdem der Mond in der Nähe seines ersten oder seines letzten Viertels ist; vernachlässigt man überdies die dritten Potenzen von $\psi' - \psi$, weil es in diesen Punkten wenig beträchtlich ist, so erhält man

$$nt + \varpi - \psi - \lambda = \frac{\frac{L'}{r'^3} . \cos \nu'^2 . (\psi' - \psi)}{\frac{L'}{r'^3} . \cos \nu'^2 - \frac{L}{r^3} . \cos \nu^2}.$$

Nennt man dann T die wahre Zeit des Minimums der ganzen Fluthhöhe, so wird die wahre Zeit einer Fluth in der Nähe der Quadraturen

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3} . \cos \nu'^2 . (\psi' - \psi)}{\frac{L'}{r'^3} . \cos \nu'^2 - \frac{L}{r^3} . \cos \nu^2}$$

seyn, wo ψ und ψ' von der Quadratur an gezählt werden.

$\psi' . \cos \nu'$ ist die Bewegung des Mondes in seiner Bahn in der Nähe der Quadraturen der Nachtgleichen; es sey Γ' diese Bewegung während des Zeitraums zweyer auf einander folgenden Morgen- oder Abendfluthen in der Nähe der Quadraturen, welchen Zeitraum wir hier zur Einheit annehmen; es sey t die Anzahl dieser Zeiträume vom Minimum der ganzen Fluthhöhe bis zu der ganzen Fluthhöhe, die man betrachtet, so hat man $\psi' . \cos \nu' = \Gamma' . t$. Nennt man nun Γ die Bewegung der Sonne während des zur Einheit angenommenen Zeitraums, so hat man $\psi = \Gamma . t . \cos \epsilon$; die wahre Zeit der ganzen Fluthhöhe ist also in der Nähe der Quadraturen der Nachtgleichen

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot \left(\frac{\Gamma'}{\cos v'} - \Gamma \cdot \cos \varepsilon\right) \cdot t}{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 - \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2}.$$

In den Quadraturen der Sonnenwenden hat man $\psi' = \Gamma' . t . \cos \varepsilon'$; $\psi = \frac{\Gamma . t}{\cos v}$; die Zeit der ganzen Fluthhöhe ist also dann

$$T + \frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot \left(\Gamma' \cdot \cos \varepsilon' - \frac{\Gamma}{\cos v}\right) \cdot t}{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 - \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2}.$$

Wir wollen nun diese Resultate mit den Beobachtungen vergleichen.

39. Ich habe hierzu die Zeiten der ganzen Fluthhöhen der vierten Tafel, die zu Nro. 0, 1, 2 und 3 gehören, bestimmt, indem ich das Mittel zwischen den Zeiten der beiden hohen Wasser, die sich auf dieselbe Nro. beziehen, genommen habe, welche Zeiten von der wahren vorhergehenden Mitternacht gezählt worden sind. Ich habe die folgenden Resultate gefunden:

Siebente Tafel.

Quadraturen der Nachtgleichen.

Nro. der ganzen Fluthhöhen.	*Wahre Zeiten der ganzen Fluthhöhen zu Brest.*
0	0^{tag},60566
1	0,66125
2	0,72411
3	0,77815.

Quadraturen der Sonnenwenden.

0	0^{tag},61863
1	0,66311
2	0,70933
3	0,75856.

Wir wollen zuerst diese Beobachtungen zusammen betrachten. Nimmt man ein Mittel zwischen den Zeiten der ganzen Fluthhöhen dieser Tafel, die zu derselben Nro. in den Quadraturen der Nachtgleichen und in den Quadraturen der Sonnenwenden gehören, so findet man 0^{tag},61215; 0^{tag},66218; 0^{tag},71672; 0^{tag},76835 für

für die wahren Zeiten der ganzen Fluthhöhen die zu Nro. 0, 1, 2, 3 gehören. Wendet man nun hier die Methode des 35sten Satzes an, so erhält man für den Ausdruck dieser Zeiten

$$0^{tag},61175 + 0^{tag},052067 \,.\, t',$$

wo t' die Anzahl der zur Einheit angenommenen Zeiträume ist, die vom Augenblick der ganzen Fluthhöhe am Tage der Quadratur gezählt werden müssen. Wir bemerken, um hieraus die beständige Gröſse T der Formeln des vorhergehenden Satzes zu finden, daſs die Zeit der Fluth um $0^{tag},052067$ zunimmt, wenn sie sich von der Quadratur um $1^{tag},052067$ entfernt. Nun war aber in den Quadraturen der siebenten Tafel die Zeit der Quadratur zu Brest im Mittel $0^{tag},46828$; nimmt man daher an, daſs diese Zeit $0^{tag},46828 - x$ ist, so wird die Zeit der ganzen Fluthhöhe $0^{tag},61175 + 0,052067 \,.\, x$ seyn, und diese letztere Zeit wird auf die Quadratur um $1^{tag},052067 \,.\, x + 0^{tag},14347$ folgen. Nun ist T die Zeit der ganzen Fluthhöhe, die zum Minimum gehört, und diese Zeit folgt nach Satz 24. um $1^{tag},50724$ auf die Quadratur; setzt man daher die Funktion $0^{tag},61175 + 0^{tag},052067 \,.\, x$ dieser Gröſse gleich, so wird man x bestimmen und man wird

$$0^{tag},61175 + 0^{tag},052067 \,.\, x = 0^{tag},67924$$

finden. Dies ist die Zeit des Minimums der ganzen Fluthhöhen zu Brest in den Quadraturen. Diese Zeit muſs die Zeit des Maximums der ganzen Fluthhöhe um $\frac{1}{4}$ Tag übertreffen, welche Zeit wir im 35sten Satz gleich $0^{tag},43793$ gefunden haben. Der Unterschied dieser Zeiten ist jedoch nur $0^{tag},24131$, ungefähr um $8\frac{1}{2}$ Minute kleiner als ein Viertelstag. Dies scheint anzuzeigen, daſs die Zeit der Fluth zu Brest voreilt, so wie die Fluth kleiner wird. Wir haben schon eine ähnliche Wirkung bey der Höhe des Nullpunktes der Beobachtungsscala über den Meereshorizont bemerkt, als wir sie aus den Fluthen der Syzygien und aus den Fluthen der Quadraturen bestimmten. Dies sind wahrscheinlich geringe Abweichungen von der Hypothese, von welcher wir ausgegangen sind, daſs nämlich die beiden partiellen Fluthen, die Sonnen- und Mondfluth sich so über einander legen, wie sie sich einzeln auf der Horizontalfläche des Meeres geordnet haben würden, welches nur bey kleinen wellenförmigen Bewegungen Statt findet.

Wir wollen nun den Werth des Koeffizienten von t' bestimmen, der aus dem Gesetz der Schwere flieſst. Man hat im vorhergehenden Satz gesehen, daſs

dieser Koeffizient in den Quadraturen der Nachtgleichen gleich

$$\frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot \left(\frac{\Gamma'}{\cos v'} - \Gamma \cdot \cos \varepsilon\right)}{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 - \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2}$$

ist. Man kann $\cos v'^2 = \frac{1}{24} p'$ setzen, und nach Satz 31 ist $p' = 20,69652$. Man hat eben so $\cos v^2 = \frac{1}{24} p$ und nach demselben Satz $p = 23,68841$; ferner in den Quadraturen $\frac{L'}{r'^3} = \frac{117}{40} \cdot \frac{L}{r^3}$, welcher Werth um $\frac{1}{30}$ vermindert werden muſs; Γ' ist die mittlere Bewegung des Mondes in den Quadraturen während des Zeitraums, der zwischen zwey Fluthen von einem Tag zum andern in der Nähe der Quadraturen der Nachtgleichen enthalten ist, welcher Zeitraum gleich $1^{tag},05750$ ist; und diese Bewegung muſs wegen des Arguments der Variation vermindert werden: Γ ist die entsprechende mittlere Bewegung der Sonne; man kann endlich $\cos \varepsilon^2 = \frac{1}{24} q$ und nach Satz 31 $q = 20,47926$ setzen. Man findet so $0^{tag},06425$ für den Koeffizienten von t, welchen die Theorie in den Quadraturen der Nachtgleichen giebt.

In den Quadraturen der Sonnenwenden ist der Koeffizient von t gleich

$$\frac{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 \cdot \left(\Gamma' \cdot \cos \varepsilon' - \frac{\Gamma}{\cos v}\right)}{\frac{L'}{r'^3} \cdot \cos v'^2 - \frac{L}{r^3} \cdot \cos v^2}.$$

Hier ist $\cos v'^2 = \frac{1}{24} q'$ und $q' = 23,75422$; $\cos v^2 = \frac{1}{24} q$ und $q = 20,47926$; Γ und Γ' sind die Bewegungen der Sonne und des Mondes im Zeitraum, der zwischen zwey Fluthen von einem Tag zum andern in der Nähe der Quadraturen der Sonnenwenden enthalten ist, welcher Zeitraum gleich $1^{tag},04664$ ist, wo die Bewegung des Mondes wegen des Arguments der Variation vermindert werden muſs; ferner $\frac{L'}{r'^3} = \frac{117}{40} \cdot \frac{L}{r^3}$; da es aber 18 Quadraturen im Sommer gegen 6 im Winter giebt, so muſs man in den Beobachtungen der siebenten Tafel den Werth von $\frac{L}{r^3}$ um $\frac{1}{40}$ vermindern; man muſs endlich $\frac{L'}{r'^3}$ um $\frac{1}{30}$ vermindern; man findet so $0^{tag},04528$ für den Koeffizienten von t, den die Theorie in den Quadraturen der Sonnenwenden giebt. Vereinigt man die beiden Koeffizienten

für die Nachtgleichen und für die Sonnenwenden, so wird die Hälfte ihrer Summe, nämlich $0^{tag},05476$, der Koeffizient von t in allen Beobachtungen der siebenten Tafel seyn. Dieser Koeffizient ist nach den Beobachtungen $0^{tag},052067$; der Unterschied ist innerhalb der Grenzen der Fehler der Beobachtungen und der in der Berechnung gebrauchten Elemente.

Man betrachte nun die Beobachtungen der Quadraturen der Nachtgleichen und die der Sonnenwenden in der siebenten Tafel besonders. Wendet man auf sie die vorhergehende Methode an, so findet man für die Zeit der ganzen Fluthhöhen in den Quadraturen der Nachtgleichen

$$0^{tag},60605 + 0^{tag},057493 \cdot t',$$

und für die Zeit der ganzen Fluthhöhen in den Quadraturen der Sonnenwenden

$$0^{tag},61744 + 0^{tag},046643 \cdot t'.$$

Die Zeit der Quadratur zu Brest war im Mittel $0^{tag},44418$ in den ersten Quadraturen, und $0^{tag},49239$ in den letztern; hieraus findet man T gleich $0^{tag},67919$ aus den Beobachtungen der Quadraturen der Nachtgleichen, und T gleich $0^{tag},67905$ aus den Beobachtungen der Quadraturen der Sonnenwenden. Der Unterschied dieser Werthe von $0^{tag},67924$, welchen Werth die Quadraturen der Nachtgleichen und der Sonnenwenden zusammengenommen geben, ist innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Es folgt aus den vorhergehenden Ausdrücken, daſs die Koeffizienten von t', oder welches dasselbe ist, die tägliche Verspätung der Fluthen in der Nähe der Quadraturen der Nachtgleichen gröſser ist, als in denen der Sonnenwenden. Dies Resultat der Beobachtung ist der Theorie gemäſs, welche uns $0^{tag},06425$ und $0^{tag},04528$ gegeben hat, welches sich sehr wenig von den aus den Beobachtungen bestimmten Koeffizienten $0^{tag},057493$ und $0^{tag},046643$ entfernt. Der Unterschied würde noch kleiner seyn, wenn man auf die dritten Potenzen von $(\psi' - \psi)$ Rücksicht nähme, die wir vernachlässigt haben, und welche vorzüglich in den Quadraturen der Nachtgleichen beträchtlich werden.

40. Die tägliche Verspätung der Fluthen in den Quadraturen nimmt bey den Fluthen in der Erdnähe zu, bey den Fluthen in der Erdferne hingegen ab; dies Phänomen, welches aus der Aenderung der Entfernung des Mondes entsteht, ist bey den Fluthen in den Quadraturen kleiner, als bey den Fluthen in den Syzygien. Ich habe, um die Theorie hierüber mit den Beobachtungen zu vergleichen, die Verspätungen der Morgen- und Abendfluthen des Tages der

Syzygie bis zum dritten auf sie folgenden Paar correspondirender Fluthen in 11 Quadraturen addirt, wo der Halbmesser des Mondes unter 28 Minuten war; und ich habe für die Summe dieser Verspätungen dieser Fluthen $3^{tag},26667$ gefunden. Ich habe eben so die Verspätungen der Morgen- und Abendfluthen vom Tage der Quadratur selbst bis zum dritten auf ihn folgenden Paar Fluthen in 11 entsprechenden Quadraturen addirt, wo der Halbmesser des Mondes gröſser als $29\frac{1}{2}$ Minuten war; und ich habe für die Summe dieser Verspätungen $3^{tag},39306$ gefunden. Die Summe der Mondshalbmesser war in den 11 ersten Quadraturen 30222″, und in den 11 letztern 32728″; eine Zunahme der Summe dieser Halbmesser von 2506″ hat folglich eine Zunahme von $0^{tag},12639$ in der Summe dieser Verspätungen hervorgebracht. Es folgt hieraus, daſs eine Minute Zunahme im Halbmesser des Mondes eine Zunahme von 84″ in der täglichen Verspätung der Fluthen in der Nähe der Quadraturen hervorbringt, welche Zunahme sehr nahe $\frac{1}{3}$ derjenigen ist, welche dieselbe Aenderung des Mondshalbmessers in den Syzygien hervorbringt, welche nämlich nach Satz 37, 258″ ist.

Die tägliche Verspätung der Fluthen in den Syzygien ist nach dem angeführten Satz

$$\frac{\frac{L'}{r'^3_{\prime}} \cdot \left(\frac{r'_{\prime}}{r'}\right)^5 \cdot v'_{\prime}}{\frac{L'}{r'^3_{\prime}} \cdot \left(\frac{r'_{\prime}}{r'}\right)^3 + \frac{L}{r^3}}.$$

Setzt man $r' = r'_{\prime} - \delta r'$, so wird die Zunahme der Verspätung der Fluthen, welche der Abnahme $-\delta r'$ entspricht, gleich

$$\frac{\delta r'}{r'_{\prime}} \cdot \frac{R \cdot \left(\frac{2\,L'}{r'^3_{\prime}} + \frac{5\,L}{r^3}\right)}{\frac{L'}{r'^3_{\prime}} + \frac{L}{r^3}}$$

seyn, wo R die mittlere tägliche Verspätung der Fluthen in den Syzygien ist. Man findet auf dieselbe Art nach Satz 37 für die Verspätung der Fluthen in den Quadraturen, welche $-\delta r$ entspricht,

$$\frac{\delta r'}{r'_{\prime}} \cdot \frac{R' \cdot \left(\frac{2\,L'}{r'^3_{\prime}} - \frac{5\,L}{r^3}\right)}{\frac{L'}{r'^3_{\prime}} - \frac{L}{r^3}},$$

wo R' die mittlere tägliche Verspätung der Fluthen in den Quadraturen ist. Man kann ohne merklichen Irrthum in diesen Ausdrücken $\frac{L'}{r'^3} = 3 \cdot \frac{L}{r^3}$ setzen; sie verwandeln sich dadurch in $\frac{11}{4} R \cdot \frac{\delta r'}{r_{,}'}$ und in $\frac{1}{2} R' \cdot \frac{\delta r'}{r_{,}'}$. Man hat aber nach dem Vorhergehenden $R = 2705''$, $R' = 5207''$; nimmt man daher für die erste Verspätung $258''$ an, so wird die zweyte $90''$ seyn; die Beobachtungen geben $84''$, und die Theorie stimmt also in diesem Punkt mit ihnen überein.

41. Wir können nun den im 20sten Satz gegebenen Ausdruck für αy, oder für die Höhe des Meeres zu irgend einer Zeit über seine Gleichgewichtsfläche in Zahlen ausdrücken. Man hat im Vorhergehenden gesehen, daſs die in B und Q multiplicirten Glieder zu Brest unmerklich sind. Man kann überdies wegen der Kleinheit von A in dem Gliede, dessen Factor es ist, ohne merklichen Irrthum $\gamma = \lambda$ setzen. Die beständige Gröſse λ ist der Zeitraum, nach welchem die Sonnenfluth zu Brest auf den Durchgang der Sonne durch den Mittag folgt, wenn man diesen Zeitraum in Grade verwandelt, im Verhältniſs von 400^G für einen Tag. Nun haben uns alle Beobachtungen der Fluthen in den Syzygien zusammen für diesen Zeitraum $0^{tag},18793$ gegeben, und alle Beobachtungen der Fluthen in den Quadraturen geben uns für denselben Zeitraum $0^{tag},17924$; das Mittel zwischen diesen beiden Resultaten ist $0^{tag},18358$, oder in Grade verwandelt $73^G,432$ ($66^\circ.5'.20''$); dies ist der Werth, welchen wir der Gröſse λ geben. Dies festgesetzt, wird der Werth von αy für Brest folgender seyn:

$$\alpha y = -0^{me},02745\ (= 0^F,08450)\ [i^3.(1 - 3.\sin v^2) + 3 i'^3.(1 - 3.\sin v'^2)]$$
$$+ 0^{me},07179\ (= 0^F,22100) \begin{bmatrix} i^3.\sin v.\cos v.\cos(\text{ɼ} - 73^G,432) \\ + 3 i'^3.\sin v'.\cos v'.\cos(\text{ɼ} + \psi - \psi' - 73^G,432) \end{bmatrix}$$
$$+ 0^{me},78112\ (= 2^F,40463) \begin{bmatrix} i^3.\cos v^2.\cos 2(\text{ɼ} - 73^G,432) \\ + 3 i'^3.\cos v'^2.\cos 2(\text{ɼ} + \psi - \psi' - 73^G,432) \end{bmatrix}.$$

In dieser Formel ist erstens ɼ der Stundenwinkel der Sonne, das heiſst, der Winkel, welchen sie durch ihre tägliche Bewegung seit ihrem Durchgang durch den Mittagskreis zu Brest bis zum Augenblick, für welchen man rechnet, beschrieben hat; zweytens v und v' sind die Abweichungen der Sonne und des Mondes, wo die nördlichen Abweichungen positiv, und die südlichen negativ genommen werden müssen; drittens ψ und ψ' sind die geraden Aufsteigungen

der Sonne und des Mondes; viertens i ist das Verhältniſs der mittlern Entfernung der Sonne zu ihrer wirklichen Entfernung, und i' ist die wirkliche Parallaxe des Mondes, durch die beständige Gröſse dieser Parallaxe dividirt; fünftens die Gröſsen v, v', ψ, ψ', i und i' beziehen sich endlich auf einen Augenblick, der um $1^{tag},50724$ vor dem Augenblick, welchen man betrachtet, vorhergeht.

Die verschiedenen Ursachen, welche auf die Schwankungen des Meeres an unsern Küsten Einfluſs haben, und wahrscheinlich auch der Fehler der von uns gebrauchten Hypothese der unendlich kleinen Schwingungen, verursachen, daſs die vorhergehende Formel sich ein wenig von den Beobachtungen entfernt; so ist z. B. der Augenblick der Ebbe, welchen diese Formel giebt, um einige Minuten von dem beobachteten Augenblick verschieden, weil das Meer zu Brest ein wenig mehr Zeit zum Steigen als zum Fallen braucht. Man hat ferner gesehen, daſs aus denselben Gründen die Horizontalfläche des Meeres in den Syzygien ein wenig höher ist, als in den Quadraturen; es scheint auch noch, daſs diese Ursachen die Fluthen im Verhältniſs ihrer Gröſsen verspäten; man kann aber doch ungeachtet dieser geringen Abweichungen die vorhergehende Formel zu der Berechnung der Fluthen gebrauchen, welche die Winde weit beträchtlicher ändern können.

Diese Formel bietet ein sehr einfaches Mittel dar zur Bestimmung der gröſsten Fluthen, die auf jede Syzygie folgen müssen. Die Kenntniſs dieser Phänomene ist für die Arbeiten in den Häfen wichtig; sie ist noch nützlich um den Unglücksfällen zuvorzukommen, die aus den Ueberschwemmungen, welche groſse Fluthen hervorbringen, entstehen können. Es ist daher wichtig, sie im voraus zu bestimmen; man wird hierzu auf folgende Art gelangen. Die gröſste Fluth folgt, wie wir gesehen haben, ungefähr $1\frac{1}{2}$ Tag auf den Augenblick des Neu- oder Vollmondes, und die Winkel $v - 73^\circ,432$ und $v + \psi - \psi' - 73^\circ,432$ sind im Augenblick, wo sie sich ereignet, gleich Null oder gleich zwey rechten Winkeln; man hat folglich dann:

$$
\begin{aligned}
ay = & - 0^{me},02745\,[i^3.(1 - 3\sin v^2) + 3\,i'^3\,(1 - 3\sin v'^2)] \\
& + 0^{me},07179\,(\pm\, i^3.\sin v.\cos v \pm 3\,i'^3.\sin v'.\cos v') \\
& + 0^{me},78112\,(i^3.\cos v^2 + 3\,i'^3.\cos v'^2).
\end{aligned}
$$

Man kann in diesem Ausdruck die beiden ersten Glieder vernachlässigen, welche in Vergleichung mit dem letzten sehr klein sind, und welche überdies keinen merklichen Einfluſs, als in der Nähe der Sonnenwenden haben, wo die Fluthen

durch die Abweichungen der Gestirne schon merklich geschwächt sind. Man hat dann

$$ay = 0^{me},78112\,(i^3.\cos v^2 + 3\,i'^3.\cos v'^2).$$

In den Syzygien der Nachtgleichen ist i sehr nahe gleich 1; v und v' sind gleich Null, und der mittlere Werth von i' ist $\frac{41}{40}$. Nimmt man also den mittlern Werth, welchen ay in den Syzygien der Nachtgleichen hat, zur Einheit an, so ist sein Werth für jede andere Syzygie

$$ay = \frac{40}{163}.(i^3.\cos v^2 + 3\,i'^3.\cos v'^2).$$

Man erhält so durch diese sehr einfache Formel die Höhe der gröfsten Fluth, welche ein oder zwey Tage auf jeden Neu- oder Vollmond folgt, wo die Gröfsen i, i', v, v' sich auf den Augenblick der Syzygie beziehen. Diese Formel wird auch noch die gröfste Vertiefung des Meeres unter seine Gleichgewichtsfläche bestimmen; denn es erhellet aus dem allgemeinen Ausdruck von ay, dafs das Meer in der Ebbe sich beynahe um eben so viel unter diese Fläche vertieft, als es sich über dieselbe in der zugehörenden Fluth erhebt. Was die zur Einheit angenommene Fluthhöhe betrifft, so wird man sie durch eine grofse Anzahl von Unterschieden des hohen und des tiefen Wassers bestimmen, welche einen oder zwey Tage nach den Syzygien in der Nähe der Nachtgleichen beobachtet worden sind; die Hälfte des mittlern Werthes dieser Unterschiede wird sehr nahe die zur Einheit angenommene Fluthhöhe seyn.

42. Wir haben nur noch zur Vollendung dieser Theorie die Zeit des hohen Wassers durch eine Formel zu bestimmen, welche einfach ist, und sich leicht in Tafeln darstellen läfst. Wir nehmen die Gleichung des 21sten Satzes wieder vor

$$\operatorname{tang} 2(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\frac{L}{r^3}.\cos v^2.\sin 2(\psi - \psi')}{\frac{L'}{r'^3}.\cos v'^2 + \frac{L}{r^3}.\cos v^2.\cos 2(\psi - \psi')}.$$

Diese Gleichung enthält 7 veränderliche Gröfsen r, r', v, v', nt, ψ und ψ'; es würde daher sehr schwer seyn, sie unter dieser Gestalt in Tafeln darzustellen. Man kann sie aber durch die Betrachtung des geringen Unterschiedes, der zwischen den scheinbaren Sonnen- und Mondsdurchmessern vorhanden ist, einfacher machen. Es seyen H und H' die scheinbaren Halbmesser dieser Gestirne

in ihren mittlern Entfernungen von der Erde, wo wir $\frac{L'}{r'^3} = \frac{3L}{r^3}$ festgesetzt haben; es seyen h und h' ihre wirklichen Halbmesser, so erhält man, wenn man noch bemerkt, daſs $\frac{L'}{r'^3}$ in der vorhergehenden Formel ungefähr um $\frac{1}{30}$, oder genauer im Verhältniſs 2,89841 : 3 vermindert werden muſs,

$$\text{tang}\, 2\,(nt + \varpi - \psi' - \lambda) = \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^3 .\cos v^2 .\sin 2\,(\psi - \psi')}{2,89841 .\left(\frac{h'}{H'}\right)^3 .\cos v'^2 + \left(\frac{h}{H}\right)^3 .\cos v^2 .\cos 2(\psi - \psi')}.$$

Man wird zum Gebrauch dieser Gleichung erstlich eine Tafel der Werthe der Funktion

$$\left(\frac{2,89841 . H' + H}{3,89841}\right) . \left(1 - \sqrt[3]{\cos v^2}\right)$$

für alle Grade von $v = 0$ bis $v = 32°$ verfertigen. Man wird die durch die Ephemeriden gegebenen Halbmesser der Sonne und des Mondes h und h' verbessern, indem man die Gröſsen, welche in dieser Tafel zu den Abweichungen dieser Gestirne gehören, von ihnen abzieht. Man erhält *so sehr* nahe

$$nt + \varpi - \psi' - \lambda = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc . tang} \left\{\frac{\left(\frac{h}{H}\right)^3 .\sin 2\,(\psi - \psi')}{2,89841 .\left(\frac{h'}{H'}\right)^3 + \left(\frac{h}{H}\right)^3 .\cos 2\,(\psi - \psi')}\right\},$$

wo h und h' die nach dem Vorhergehenden verbesserten Halbmesser der Sonne und des Mondes sind. Durch dieses Mittel werden die Abweichungen der Sonne und des Mondes aus dem Ausdruck von $nt + \varpi - \psi' - \lambda$ verschwinden. Genau genommen müſste man vom Halbmesser der Sonne die Gröſse $h . \left(1 - \sqrt[3]{\cos v^2}\right)$ abziehen; da aber diese Gröſse sehr klein ist, und da der Werth von h wenig von $\frac{2,89841 . H' + H}{3,89841}$ verschieden ist, so kann man diese letztere Gröſse statt h in dem obigen Ausdruck substituiren. Dieselbe Bemerkung gilt von der Verbesserung des Halbmessers des Mondes, und da der Einfluſs

fluſs dieses Gestirns auf die Zeit der Fluth sich zum Einfluſs der Sonne wie 2,89841 zu 1 verhält, so befinden sich die Halbmesser H' und H in der Funktion $\frac{2,89841\, H' + H}{3,89841}$ in diesem Verhältniſs. Betrachtet man nun ferner, daſs der Unterschied von $\frac{h' . H}{h . H'}$ zu $\frac{H + h' - h}{H'}$ gleich $\frac{(H - h)\,(h' - h)}{h . H'}$ ist, und daſs man ihn wegen der Kleinheit der beiden Factoren $(H - h)$ und $(h' - h)$ vernachlässigen kann, so erhält man

$$nt + \varpi - \psi' - \lambda = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc . tang .} \left\{ \frac{\sin 2(\psi - \psi')}{2,89841 . \left(\frac{H + h' - h}{H'}\right)^2 + \cos 2(\psi' - \psi)} \right\}.$$

Man kann diesen Ausdruck von $nt + \varpi - \psi' - \lambda$ leicht in Tafeln darstellen, und wenn man die Bogen in Zeit verwandelt, im Verhältniſs des ganzen Umkreises für einen Tag, so wird man das Gesetz der Verspätungen der Fluthen hinter dem Augenblick des Durchgangs des Mondes durch den obern oder untern Theil des Meridians erhalten, welcher Augenblick durch die Bedingung bestimmt wird, daſs $nt + \varpi - \psi' = 0$, oder $nt + \varpi - \psi' = 200^\circ$ ist. Man muſs aber zum Gebrauch dieser Tafel in jedem Hafen die Zeit kennen, um welche das Maximum der Syzygie auf die Fluth folgt. Man hat gesehen, daſs diese Zeit zu Brest $1^{\text{tag}},50724$ ist, und sie ist nach den Beobachtungen in allen unsern Häfen des Oceans ungefähr beynahe eben so groſs, so daſs die Werthe von $nt + \varpi - \psi' - \lambda$ den Werthen von $\psi - \psi'$ entsprechen, welche um $1^{\text{tag}},50724$ vor dem Augenblick, für welchen man rechnet, vorhergehen. Man muſs ferner die beständige Gröſse λ kennen; verwandelt man diese beständige Gröſse in Zeit, so ist sie die Zeit der Fluth, welche $1^{\text{tag}},50724$ auf die Syzygie folgt; man wird sie so durch eine groſse Anzahl Beobachtungen der Zeiten des hohen Wassers am zweyten Tage nach der Syzygie bestimmen können.

43. Wir wollen nun in wenig Worten die vorzüglichsten Erscheinungen der Fluthen und ihre Beziehungen auf das Gesetz der allgemeinen Schwere ins Gedächtniſs zurückrufen. Wir haben diese Erscheinungen vorzüglich bey ihrem Maximum und Minimum betrachtet, und wir haben sie in zwey Klassen getheilt, wovon die eine sich auf die Fluthhöhen, die andere auf

die Zeiten der Fluthen und auf ihre Zwischenzeiten bezieht; wir wollen diese beiden Klassen von Phänomenen einzeln betrachten [97]).

97) Folgende Tafel enthält die vorzüglichsten Erscheinungen der Ebbe und Fluth im Hafen von Brest, so wie sie vom Hrn. Verfasser aus den Beobachtungen hergeleitet worden sind:

Für die mittleren absoluten Fluthhöhen

		Mètres.		Fuſs.
war das Maximum in 24 Syzygien der Nachtgleichen im Mittel		5,851	oder	18,013
- - - - Sonnenwenden - -		5,514	-	16,973
	Mittel	5,6825	-	17,493
Das Minimum in 24 Quadraturen der Nachtgleichen im Mittel		3,918	-	12,062
- - - - Solstizien - -		4,274	-	13,150
	Mittel	4,096	-	12,606

Für die ganzen Fluthhöhen

war das Maximum in 24 Syzygien der Nachtgleichen im Mittel		6,260	-	19,270
- - - - Sonnenwenden - -		5,516	-	16,979
	Mittel	5,888	-	18,125
Das Minimum in 24 Quadraturen der Nachtgleichen im Mittel		2,432	-	7,487
- - - - Sonnenwenden - -		3,146	-	9,686
	Mittel	2,789	-	8,587

Unter den 24 Syzygien der Sonnenwenden die Hälfte in der Nähe der Sommersonnenwenden, die andere Hälfte in der Nähe der Wintersonnenwenden; bey den Quadraturen war man aber genöthigt 18 in der Nähe der Sommersonnenwenden zu nehmen.

Tägliche Verspätung der Fluthen.

In den Syzygien der Nachtgleichen		0 tag,025503	oder	36′. 43″,5
- - - Sonnenwenden		0,028600	-	40 . 11, 0
	Mittel	0,0270515	-	38 . 57, 2.
In den Quadraturen der Nachtgleichen		0 tag,057493	oder	1 st. 22′. 47″,4
- - - Sonnenwenden		0,046643	-	1 . 7 . 9, 8
	Mittel	0,052068	-	1 . 14 . 58, 6.

Die Fluthhöhen bey ihrem Maximum in den Syzygien und bey ihrem Minimum in den Quadraturen sind in jedem Hafen die Data der Beobachtungen, welche das Verhältniſs der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die Fluthen am besten zu erkennen geben, und vermittelst dieses Verhältnisses die verschiedenen Erscheinungen der Fluthen, die aus der Theorie der allgemeinen Schwere folgen. Unter diesen Erscheinungen ist das Gesetz der Abnahme der Fluthhöhen, wenn man von ihrem Maximum ausgeht, und das Gesetz ihrer Zunahme, wenn man von ihrem Minimum ausgeht, zur Prüfung dieser Theorie am schicklichsten. Man hat im 25sten und 31sten Satz gesehen, daſs die Theorie der Schwere in diesem Punkt vollkommen mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Diese Gesetze der Abnahme und Zunahme der Fluthhöhen ändern sich mit den Abweichungen der Sonne und des Mondes: man hat im 26sten Satz gesehen, daſs ihre Abnahme in den Syzygien der Nachtgleichen sich zur entsprechenden Abnahme in den Syzygien der Sonnenwenden wie 13 zu 8 verhält, und dies Resultat ist vollkommen der Theorie der Schwere gemäſs. Man hat eben so im 32sten Satz gesehen, daſs die Zunahme der Fluthhöhen, wenn man von ihrem Minimum in den Quadraturen der Nachtgleichen ausgeht, sich zur entsprechenden Zunahme in den Quadraturen der Sonnenwenden wie 2 zu 1 verhält, und daſs die Theorie der Schwere sehr nahe dasselbe Verhältniſs giebt.

Die ganze Fluthhöhe bey ihrem Maximum in den Syzygien der Nachtgleichen verhält sich nach dieser Theorie zur entsprechenden Fluthhöhe in den Syzygien der Sonnenwenden nahe wie das Quadrat des Halbmessers zum Quadrat der Abweichung dieser Gestirne in den Sonnenwenden, und man hat im 26sten Satz gesehen, daſs dies wenig vom Resultat der Beobachtungen verschieden ist. Der Ueberschuſs der ganzen Fluthhöhen bey ihrem Minimum in den

Die Höhe des Nullpunkts der Beobachtungsscala zu Brest über die Horizontalfläche des Gleichgewichts, welche das Meer ohne die Wirkung der Sonne und des Mondes annehmen würde, ist in den Syzygien 2^{me},827 oder 8^{Fuſs} · 8^{Zoll},43; in den Quadraturen 2^{me},778 oder 8^{F} · 6^{Z},62; im Mittel 2^{me},8025 oder 8^{F} · 7^{Z},53.

Quadraturen der Sonnenwenden über die zugehörenden Fluthhöhen in den Quadraturen der Nachtgleichen ist nach dieser Theorie eben so groſs, als der Ueberschuſs der ganzen Fluthhöhen bey ihrem Maximum in den Syzygien der Nachtgleichen über die entsprechenden Fluthhöhen in den Syzygien der Sonnenwenden; und man sieht aus Satz 26. und 32., daſs dies genau den Beobachtungen gemäſs ist.

Der Einfluſs des Mondes auf die Fluthen wächst nach dem Grundsatz der Schwere wie der Cubus seiner Parallaxe; und dies stimmt nach Satz 28. so genau mit den Beobachtungen überein, daſs man hieraus das Gesetz dieses Einflusses genau hätte herleiten können.

Die Phänomene der Zwischenzeiten der Fluthen stimmen nicht weniger mit der Theorie überein, als die ihrer Höhen. Die tägliche Verspätung der Fluthen ist nach dieser Theorie ungefähr zweymal geringer bey ihrem Maximum in den Syzygien, als bey ihrem Minimum in den Quadraturen; sie ist ungefähr 27′ im ersten Fall und 55′ im zweyten. Man hat im 35sten und 39sten Satz gesehen, daſs die Beobachtungen sich sehr wenig von diesen Resultaten der Theorie entfernen.

Die Verspätung der Fluthen ändert sich mit den Abweichungen der Gestirne; sie muſs in den Syzygien der Sonnenwenden gröſser seyn, als in denen der Nachtgleichen, und zwar im Verhältniſs von 8 zu 7; und sie muſs in den Quadraturen der Nachtgleichen gröſser seyn, als in den Quadraturen der Sonnenwenden im Verhältniſs von 13 zu 9. Man hat im 36sten und 39sten Satz gesehen, daſs die Beobachtungen nahe dieselben Verhältnisse geben.

Die Entfernungen des Mondes von der Erde haben auf die Verspätung der Fluthen einen Einfluſs. Eine Minute Zunahme im Mondshalbmesser giebt nach der Theorie 251″ Zunahme dieser Verspätung in den Syzygien und bloſs 90″ in den Quadraturen; und man hat im 37sten und 40sten Satz gesehen, daſs dies mit den Beobachtungen übereinstimmt, welche also das Gesetz der allgemeinen Schwere in allen Rücksichten bestätigen.

Ich habe bey der Ebbe und Fluth des Meeres verweilt, weil sie unter allen Resultaten der himmlischen Anziehungen uns am nächsten ist, und weil wir ihre Gesetze in jedem Augenblick erkennen können. Ich hoffe, dafs die Theorie, welche ich von diesen Erscheinungen vorgelegt habe, die Beobachter bestimmen wird, sie in den Häfen, welche dieser Gattung von Beobachtungen günstig sind, wie z. B. zu Brest, zu verfolgen. Genaue und während einer Periode der Bewegung der Mondsknoten festgesetzte Beobachtungen werden die Elemente der Theorie der Ebbe und Fluth des Meeres mit Genauigkeit bestimmen, und vielleicht die kleinen partiellen Fluthen zu erkennen geben, die von der negativen vierten Potenz der Entfernung des Mondes von der Erde abhängen, welche Phänomene bis jetzt in den Beobachtungsfehlern verhüllt sind.

Fünftes Kapitel.

Von den Schwankungen der Atmosphäre.

44. Da es unmöglich ist, die Bewegungen der Atmosphäre, welche aus den Aenderungen der Wärme der Sonne und aus allen Umständen, die auf diese Bewegungen Einfluſs haben, entstehen, der Analysis zu unterwerfen; so werden wir uns darauf einschränken, die Schwankungen zu betrachten, die von den Anziehungen der Sonne und des Mondes abhängen, wobey wir annehmen werden, daſs die Atmosphäre eine gleichförmige Temperatur und eine veränderliche Dichte hat, welche nämlich in jedem Punkt der zusammendrückenden Kraft proportional ist. Wir sind bey diesen Voraussetzungen im 37sten Satz des ersten Buches, wovon ich hier alle Benennungen beybehalte, auf folgende zwey Gleichungen gekommen:

$$r^2.\delta\theta.\left[\left(\frac{d^2u'}{dt^2}\right) - 2n\sin\theta.\cos\theta.\left(\frac{dv'}{dt}\right)\right]$$

$$+ r^2.\delta\varpi.\left[\sin\theta^2.\left(\frac{d^2v'}{dt^2}\right) + 2n\sin\theta.\cos\theta.\left(\frac{du'}{dt}\right)\right] = \delta V' - g.\delta y' - g.\delta y;$$

$$y' = -l.\left[\left(\frac{du'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv'}{d\varpi}\right) + \frac{u'.\cos\theta}{\sin\theta}\right].$$

Setzt man die Tiefe des Meeres beständig und gleich l', und nimmt man auf seine Dichte nicht Rücksicht, wie wir im 10ten und folgenden Satz gethan haben, so findet man nach Satz 36. des ersten Buches

$$r^2.\delta\theta.\left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n\sin\theta.\cos\theta.\left(\frac{dv}{dt}\right)\right]$$

$$+ r^2.\delta\varpi.\left[\sin\theta^2.\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n.\sin\theta.\cos\theta.\left(\frac{du}{dt}\right)\right] = \delta V' - g.\delta y;$$

$$y = -l'.\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u.\cos\theta}{\sin\theta}\right];$$

wo der Werth von V' hier und in den vorhergehenden Gleichungen derselbe ist. Setzt man dann

$$(l - l').u' + l'u = lu'';$$
$$(l - l').v' + l'v = lv'';$$
$$(l - l').y' + l'y = ly'';$$

so geben die vorhergehenden vier Gleichungen die folgenden:

$$r^2.\delta\theta.\left[\left(\frac{d^2u''}{dt^2}\right) - 2n.\sin\theta.\cos\theta.\left(\frac{dv''}{dt}\right)\right]$$

$$+ r^2.\delta\varpi.\left[\sin\theta^2.\left(\frac{d^2v''}{dt^2}\right) + 2n.\sin\theta.\cos\theta.\left(\frac{du''}{dt}\right)\right] = \delta V' - g.\delta y'';$$

$$y'' = -l.\left[\left(\frac{du''}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv''}{d\varpi}\right) + \frac{u''.\cos\theta}{\sin\theta}\right].$$

Diese beiden Gleichungen sind offenbar die Gleichungen der Schwankungen des Meeres, wenn man seine Tiefe gleich l setzt, und man kann in diesem Fall den Werth von y'' eben so wie den Werth von y im ersten Kapitel dieses Buches bestimmen; man wird folglich den Werth von y' durch die in diesem Kapitel gegebene Analysis erhalten.

Wir haben im 37sten Satz des ersten Buchs bemerkt, daſs die Schwankungen der Barometerhöhe durch die Formel $\frac{\alpha k.(y + y')}{l}$, und folglich durch die folgende

$$\frac{\alpha k.(ly'' - l'y)}{l.(l - l')}$$

vorgestellt werden, wenn k die Barometerhöhe im Zustand des Gleichgewichts ist. Man sieht leicht aus dem 37sten Satz des ersten Buchs, daſs l das Verhältniſs der Höhe der Atmosphäre zum Erdhalbmesser ist, wenn man annimmt, daſs die Dichte der Luft und ihre Temperatur überall gleich groſs sind. Die Erfahrung giebt aber, daſs die Dichte des Quecksilbers zur Dichte der Luft

sich nahe wie 10320 zu 1 bey der Temperatur des schmelzenden Eises verhält; und da die mittlere Barometerhöhe ungefähr $0^{me},76$ ($28^{z}.0^{l},9$) ist, so folgt daraus, daſs $l = \frac{1}{812}$ ist. Bey höhern Temperaturen wird l zunehmen. Wir wollen, um eine Idee von den Schwankungen des Barometers zu haben, die Temperatur so annehmen, daſs $l = \frac{1}{722,5}$ ist, welches eine der Tiefen des Meeres ist, für welche wir im 11ten Satz den Werth von αy bestimmt haben, welcher in diesem Fall der Werth von $\alpha y''$ seyn wird. Wir werden ferner $l' = 2l$ setzen, welches auch eine der Tiefen des Meeres ist, die wir betrachtet haben; der Werth von αy wird derjenige seyn, welchen wir für diese Tiefe gefunden haben. Substituirt man dann statt l, l' diese Werthe und statt αy und $\alpha y''$ die Gröſsen, welche wir im 11ten Satz gefunden haben; betrachtet man ferner, daſs $k = 0^{me},76$ und daſs der Erdhalbmesser gleich 6366200 Mètres ist, so erhält man zur Bestimmung der Schwankungen des Barometers

$$\frac{\alpha k.(ly''-l'y)}{l.(l-l')} = \frac{\alpha k}{l}.(2y-y'')$$

$$= \begin{matrix} 0^{me},000010623 \\ (=0^{l},0047091) \end{matrix} \left(\frac{1+3\cos 2\theta}{3}\right)(\sin v^2 - \tfrac{1}{2}\cos v^2 + e.\sin v'^2 - \tfrac{1}{2}e.\cos v'^2)$$

$$+\, 0^{me},000010623.\left\{\begin{matrix} 1,0000 \\ -4,6952.\sin\theta^2 \\ -2,9342.\sin\theta^4 \\ -0,6922.\sin\theta^6 \\ -0,0899.\sin\theta^8 \\ -0,0076.\sin\theta^{10} \end{matrix}\right\}.\sin\theta^2.\left\{\begin{matrix} \cos v^2.\cos 2(nt+\varpi-\psi) \\ +\; e.\cos v'^2 \\ .\cos 2(nt+\varpi-\psi') \end{matrix}\right\}.$$

Nimmt man an, daſs die Sonne und der Mond in Conjunction oder in Opposition, und daſs sie in der Ebene des Aequators und in ihren mittlern Entfernungen sind, wo e sehr nahe gleich 3 ist; so findet man unter der Linie $0^{me},0006305$ ($0^{l},2795$) für den Unterschied der gröſsten Erhöhung zur gröſsten Vertiefung des Quecksilbers in dem Barometer. Diese, obschon sehr kleine, Gröſse könnte durch eine lange Reihe Beobachtungen der Barometerhöhen bestimmt werden, welche zwischen den Wendekreisen angestellt worden wären, wo die Aenderungen des Barometers wenig beträchtlich sind: dies Phänomen ist der Aufmerksamkeit der Beobachter würdig.

Die

Die Wirkung der Sonne und des Mondes erregt einen Wind, welcher der Ebbe und Fluth des Meeres entspricht; wir wollen die Kraft dieses Windes unter der Linie bey den vorhergehenden Voraussetzungen bestimmen. Wir nehmen hierzu die erste Gleichung dieses Satzes wieder vor, in welcher wir $\cos\theta = 0$ setzen; sie giebt dann

$$\left(\frac{d^2v'}{dt^2}\right) = -g \cdot \left(\frac{dy'}{d\varpi}\right) - g \cdot \left(\frac{dy}{d\varpi}\right) + \left(\frac{dV'}{d\varpi}\right).$$

Man hat aber $y' + y = 2y - y''$; ferner nach Satz 4 und 11.

$$\left(\frac{dV'}{d\varpi}\right) = -2g \cdot 0^{me},12316 \cdot [\cos v^2 . \sin 2(nt + \varpi - \psi) + e . \cos v'^2 . \sin 2(nt + \varpi - \psi')];$$

substituirt man statt y und y'' ihre Werthe, so erhält man

$$\frac{d^2v'}{dt^2} = -2g \cdot 1^{me},0369 \cdot [\cos v^2 . \sin 2(nt + \varpi - \psi) + e . \cos v'^2 . \sin 2(nt + \varpi - \psi')];$$

dies giebt, wenn man integrirt, sehr nahe

$$dv' = H.dt + \frac{g}{n^2} . ndt . 1^{me},0369 . [\cos v^2 . \cos 2(nt + \varpi - \psi) + e . \cos v'^2 . \cos 2(nt + \varpi - \psi')].$$

Nimmt man an, daſs dt eine Sekunde vorstellt, so wird ndt nahe der 100000 ste Theil des Umkreises seyn; $\frac{n^2}{g}$ ist ferner $\frac{1}{289}$ des Erdhalbmessers, den wir mit r bezeichnen; man erhält so

$$rdv' = rH.dt + 0^{me},01883 . [\cos v^2 . \cos 2(nt + \varpi - \psi) + e . \cos v'^2 . \cos 2(nt + \varpi - \psi')].$$

Wäre die beständige Gröſse H nicht gleich Null, so würde daraus unter dem Aequator ein beständiger Wind entstehen, und man würde so die Passatwinde erklären können. Der Werth dieser beständigen Gröſse hängt aber von der ursprünglichen Bewegung der Atmosphäre ab, und wir haben schon im 6ten Satz bemerkt, daſs alles was von dieser Bewegung abhängt, schon längst durch den Widerstand aller Art, welchen die Theilchen der Luft bey ihren Schwankungen erfahren, hat vernichtet werden müssen. Man kann hieraus im Allgemeinen schlieſsen, daſs die Passatwinde nicht aus der Anziehung der Sonne und des Mondes auf die Atmosphäre entstehen.

Nimmt man an, daſs diese beiden Gestirne in Conjunction oder in Opposition und im Aequator sind, und daſs $e = 3$ ist, so erhält man $0^{me},07532$ für den gröſsten ~~Zeitraum~~, den ein Lufttheilchen während des Zeitraums von einer Sekunde vermöge dieser vereinigten Wirkungen durchläuft. Es scheint aber

unmöglich, daſs man sich durch die Beobachtung vom Daseyn eines so wenig beträchtlichen Windes in einer übrigens sehr bewegten Atmosphäre versichern kann: dieses ist aber nicht der Fall bey den Aenderungen der Barometerhöhen, vorzüglich wegen der sehr groſsen Genauigkeit, deren die Beobachtungen des Barometers fähig sind: diese Aenderungen, welche durch Lokalumstände beträchtlich vergröſsert werden können, so wie wir dies bey den Fluthhöhen bemerkt haben, verdienen alle Aufmerksamkeit der Beobachter.

Wir wissen nicht, bis auf welchen Grad die kleinen Schwankungen, welche die Wirkung der Sonne und des Mondes in der Atmosphäre erregen, auf die Bewegungen Einfluſs haben können, welche durch die verschiedenen Ursachen hervorgebracht werden, die auf ein so bewegliches Flüssige wirken, und in welchem wegen dieser groſsen Bewegbarkeit eine sehr geringe Ursache die Quelle beträchtlicher Aenderungen werden kann. Die Beobachtungen können uns hierüber allein unterrichten: wir werden bloſs bemerken, daſs die Differenzialgleichungen der Bewegung der Atmosphäre, wenn sie unmittelbar den festen Kern der Erde bedeckte, nach dem Vorhergehenden mit den Gleichungen des Meeres übereinstimmen würden, wenn man ihm überall dieselbe Tieſe giebt. Man hat aber im 8ten Satz gesehen, daſs die Schwankungen der zweyten Art, welche allein vom Unterschied zwischen den nördlichen und südlichen Abweichungen der Sonne und des Mondes abhängen, verschwinden: diese Schwankungen verschwinden auch noch, oder sind wenigstens fast unmerklich, wenn die Atmosphäre ein Meer bedeckt, in welchem diese Schwankungen Null oder sehr klein sind, so wie dies in unsern Häfen der Fall ist; das Zeichen der Abweichung der beiden Gestirne hat also keinen merklichen Einfluſs auf die Aenderungen der Atmosphäre.

Fünftes Buch.

Von den Bewegungen der himmlischen Körper um ihre eigenen Schwerpunkte.

Die Bewegungen der himmlischen Körper um ihre eigenen Schwerpunkte haben einen so genauen Zusammenhang mit ihren Gestalten und mit den Schwankungen der Flüssigen, von welchen sie bedeckt werden, daſs wir glauben, die Analysis derselben unmittelbar nach den in den vorhergehenden zwey Büchern erklärten Theorien vorlegen zu müssen. Wir werden unter den Körpern des Sonnensystems nur die Erde, den Mond und die Ringe des Saturns betrachten, bey welchen man allein die Theorie der Schwere in dieser Rücksicht mit den Beobachtungen vergleichen kann; die folgende Analysis kann aber allgemein auf alle himmlische Körper erstreckt werden.

Erstes Kapitel.

Von den Bewegungen der Erde um ihren Schwerpunkt.

1. Wir wollen hier die allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines festen Körpers von irgend einer Figur ins Gedächtniſs zurückrufen, welche wir im siebenten Kapitel des ersten Buchs bewiesen haben. Behält man alle Benennungen dieses Kapitels bey, so verwandeln sich die Gleichungen (D) des 26sten Satzes des ersten Buchs, wenn man in ihnen statt p', q', r' ihre Werthe $C.p$, $A.q$, $B.r$ setzt,

$$
\left.\begin{aligned}
dp + \left(\frac{B-A}{C}\right).qr.dt &= \frac{dN}{C}.\cos\theta - \frac{dN'}{C}.\sin\theta;\\
dq + \left(\frac{C-B}{A}\right).rp.dt &= -\frac{(dN.\sin\theta + dN'.\cos\theta)}{A}.\sin\phi + \frac{dN''}{A}.\cos\phi;\\
dr + \left(\frac{A-C}{B}\right).pq.dt &= -\frac{(dN.\sin\theta + dN'.\cos\theta)}{B}.\cos\phi - \frac{dN''}{B}.\sin\phi;
\end{aligned}\right\} \quad (D')
$$

Jetzt muſs man die Momente der Trägheit A, B, C und die Werthe von dN, dN' und dN'' bestimmen.

2. Man betrachte zuerst die Momente der Trägheit. Es sey R der vom Schwerpunkt der Erde zum Theilchen dm gezogene Halbmesser; es sey μ der Kosinus des Winkels, welchen R mit der Axe des Aequators macht; es sey endlich ϖ der Winkel, welchen die durch diese Axe und durch den Halbmesser R gehende Ebene mit der Ebene macht, die durch dieselbe Axe und durch die erste Hauptaxe geht: so wird $R.\sqrt{1-(1-\mu^2).\cos\varpi^2}$ der Abstand des Theilchens von der ersten Hauptaxe seyn; $R.\sqrt{1-(1-\mu^2).\sin\varpi^2}$ wird der Abstand des Theilchens von der zweyten Hauptaxe seyn; und $R.\sqrt{1-\mu^2}$ wird sein Abstand von der dritten Hauptaxe, oder von der Axe des Aequators seyn. Da nun das Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf eine seiner Axen, die Summe der Producte jedes Theilchens des Körpers in das Quadrat seines Abstands von dieser Axe ist, und da A, B und C nach Satz 26 des ersten Buchs die Momente der Trägheit der Erde in Beziehung auf die erste, zweyte und dritte Hauptaxe sind, so hat man

$$
\begin{aligned}
A &= S.R^2.dm.[1-(1-\mu^2).\cos\varpi^2];\\
B &= S.R^2.dm.[1-(1-\mu^2).\sin\varpi^2];\\
C &= S.R^2.dm.(1-\mu^2);
\end{aligned}
$$

wo die Integrale auf die ganze Masse der Erde erstreckt werden müssen.

Nun ist aber

$$dm = R^2.dR.d\mu.d\varpi.$$

Bemerkt man ferner, daſs die Integrale von $R=0$ bis zum Werth von R an der Oberfläche genommen werden müssen, welchen Werth wir durch R' bezeichnen werden, so findet man

$$A = \tfrac{1}{5} S \,.\, R'^5 \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, [1 - (1 - \mu^2) \,.\, \cos \varpi^2];$$
$$B = \tfrac{1}{5} S \,.\, R'^5 \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, [1 - (1 - \mu^2) \,.\, \sin \varpi^2];$$
$$C = \tfrac{1}{5} S \,.\, R'^5 \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, (1 - \mu^2).$$

Man nehme an, daſs R'^5 in eine Reihe von folgender Form entwickelt sey:

$$R'^5 = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \text{etc.}$$

wo $U^{(i)}$ eine rationale und ganze Funktion von μ, $\sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \sin \varpi$ und $\sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \cos \varpi$ ist, und der folgenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thut:

$$0 = \left\{ \frac{d \,.\, \left[(1 - \mu^2) \,.\, \left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu} \right) \right]}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{d^2 U^{(i)}}{d\varpi^2} \right)}{1 - \mu^2} + i \,.\, (i + 1) \,.\, U^{(i)}.$$

Die Funktion $1 - (1 - \mu^2) \,.\, \cos \varpi^2$ ist gleich $\frac{2}{3} + [\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) \,.\, \cos \varpi^2]$; die beständige Gröſse $\frac{2}{3}$ ist in der Form $U^{(0)}$ enthalten, und die Funktion $\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) \,.\, \cos \varpi^2$ ist von der Form $U^{(2)}$, weil sie statt $U^{(2)}$ der vorhergehenden partiellen Differenzialgleichung Genüge thut. Eben so ist $1 - (1 - \mu^2) \,.\, \sin \varpi^2$ gleich $\frac{2}{3} + [\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) \,.\, \sin \varpi^2]$, und das zweyte Glied dieses Ausdrucks ist von der Form $U^{(2)}$. Die Funktion $1 - \mu^2$ ist gleich $\frac{2}{3} + (\frac{1}{3} - \mu^2)$, und der Theil $\frac{1}{3} - \mu^2$ ist von der Form $U^{(2)}$; man erhält folglich vermöge des Lehrsatzes, den wir im 12ten Satz des dritten Buchs bewiesen haben,

$$A = \tfrac{1}{5} S \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \left[\tfrac{2}{3} U^{(0)} + [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) \,.\, \cos \varpi^2] \,.\, U^{(2)}\right];$$
$$B = \tfrac{1}{5} S \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \left[\tfrac{2}{3} U^{(0)} + [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) \,.\, \sin \varpi^2] \,.\, U^{(2)}\right];$$
$$C = \tfrac{1}{5} S \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \left[\tfrac{2}{3} U^{(0)} + (\tfrac{1}{3} - \mu^2) \,.\, U^{(2)}\right],$$

wo die Integrale von $\mu = 1$ bis $\mu = -1$, und von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 2\pi$ genommen werden müssen; dies giebt

$$A = \tfrac{8}{15} \pi \,.\, U^{(0)} + \tfrac{1}{5} S \,.\, U^{(2)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) \,.\, \cos \varpi^2];$$
$$B = \tfrac{8}{15} \pi \,.\, U^{(0)} + \tfrac{1}{5} S \,.\, U^{(2)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) \,.\, \sin \varpi^2];$$
$$C = \tfrac{8}{15} \pi \,.\, U^{(0)} + \tfrac{1}{5} S \,.\, U^{(2)} \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, (\tfrac{1}{3} - \mu^2).$$

Die Funktion $U^{(2)}$ ist von folgender Gestalt:

$$H \,.\, (\tfrac{1}{3} - \mu^2) + H' \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \sin \varpi + H'' \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \cos \varpi$$
$$+ H''' \,.\, (1 - \mu^2) \,.\, \sin 2\varpi + H'''' \,.\, (1 - \mu^2) \,.\, \cos 2\varpi.$$

Die Betrachtung der Hauptaxen giebt nach Satz 31 des dritten Buches

$$H' = 0; \quad H'' = 0; \quad H''' = 0.$$

Diese drey Gleichungen enthalten alle Bedingungen, welche nothwendig sind,

wenn die drey Axen Hauptaxen seyn sollen. Man erhält so [98])

98) Setzt man $\cos \varpi^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varpi)$ und $\sin \varpi^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varpi)$, so wird

$$\tfrac{1}{5} S . U^{(2)} . d\mu . d\varpi \left[\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2) . \cos \varpi^2\right] = \tfrac{1}{5} S . U^{(2)} . d\mu . d\varpi . \left[-\left(\frac{\frac{1}{3}-\mu^2}{2}\right) - \left(\frac{1-\mu^2}{2}\right) . \cos 2\varpi\right]$$

$$\tfrac{1}{5} S . U^{(2)} . d\mu . d\varpi \left[\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2) . \sin \varpi^2\right] = \tfrac{1}{5} S . U^{(2)} . d\mu . d\varpi . \left[-\left(\frac{\frac{1}{3}-\mu^2}{2}\right) + \left(\frac{1-\mu^2}{2}\right) . \cos 2\varpi\right].$$

Substituirt man statt $U^{(2)}$ sein erstes Glied $H(\frac{1}{3} - \mu^2)$, so erhält man

$$\frac{H}{5} S . d\mu . d\varpi . \left[-\frac{(\frac{1}{3}-\mu^2)^2}{2} - (\tfrac{1}{3}-\mu^2) . \left(\frac{1-\mu^2}{2}\right) \cos 2\varpi\right] \text{ und}$$

$$\frac{H}{5} S . d\mu . d\varpi . \left[-\frac{(\frac{1}{3}-\mu^2)^2}{2} + (\tfrac{1}{3}-\mu^2) . \left(\frac{1-\mu^2}{2}\right) \cos 2\varpi\right].$$

Integrirt man in Beziehung auf ϖ, so findet man fur diese beiden Integrale

$$\frac{H}{5} S . d\mu . \left[-\frac{(\frac{1}{3}-\mu^2)^2}{2} \varpi \mp \left(\frac{\frac{1}{3}-\mu^2}{2}\right)\left(\frac{1-\mu^2}{2}\right) \sin 2\varpi\right].$$

Beide Integrale sind für $\varpi = 0$ auch gleich Null, und für $\varpi = 2\pi$ oder 180° gleich $-\frac{H}{5} S . d\mu . (\frac{1}{3} - \mu^2)^2 . \pi$. Integrirt man diesen Werth in Beziehung auf μ, so erhält man $-\frac{H}{5} . \pi . (\frac{1}{9}\mu - \frac{2}{9}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5)$; dies Integral ist für $\mu = +1$, gleich $-H . \frac{\pi}{5} . (\frac{1}{5} - \frac{1}{9})$, oder $-\frac{4\pi}{3^2 . 5^2} . H$, und für $\mu = -1$, gleich $+\frac{4\pi}{3^2 . 5^2} H$. Der Unterschied dieser beiden Werthe giebt das Integral von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$, nämlich $-\frac{8\pi}{3^2 . 5^2} H$. Dies ist der Werth des von H abhängenden Gliedes in den Gleichungen für A und B. Man sieht auch ohne alle Rechnung, daſs dies Glied in C doppelt so groſs seyn und ein entgegengesetztes Zeichen haben muſs, weil

$$\tfrac{1}{5} S . U^{(2)} . d\mu . d\varpi . (\tfrac{1}{3} - \mu^2) = \frac{H}{5} . S . d\mu . d\varpi . (\tfrac{1}{3} - \mu^2)^2 = \frac{H}{5} S . d\mu . (\tfrac{1}{3} - \mu)^2 . 2\pi.$$

Das zweyte Glied von $U^{(2)}$, nämlich $H''''. (1 - \mu^2) . \cos 2\varpi$ bringt in C kein Glied hervor, weil es nach der Integration in Beziehung auf ϖ den Factor $\sin 2\varpi$ enthält, welcher an den beiden Grenzen $\varpi = 0$ und $\varpi = 2\pi$ gleich Null ist, so daſs das Integral selbst innerhalb dieser Grenzen gleich Null ist. In A und B giebt aber dies zweyte Glied

$$\frac{H''''}{5} S . d\mu . d\varpi . \left[-\left(\frac{\frac{1}{3}-\mu^2}{2}\right)(1-\mu^2) \cos 2\varpi \mp \frac{(1-\mu^2)^2}{2} \cos 2\varpi^2\right] \text{ oder}$$

$$\frac{H''''}{5} S . d\mu . d\varpi . \left[\mp \frac{(1-\mu^2)^2}{4} - \left(\frac{\frac{1}{3}-\mu^2}{2}\right)(1-\mu^2) \cos 2\varpi \mp \frac{(1-\mu^2)^2}{4} \cos 4\varpi\right],$$

welches nach der Integration in Beziehung auf ϖ gleich $\frac{H''''}{5} S . d\mu . \left[\mp \frac{(1-\mu^2)^2}{2}\right] . \pi$ wird, und wenn man von neuem in Beziehung auf μ integrirt $\mp \frac{H''''}{5 . 2} (\mu - \frac{2}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5)\pi$, welches für $\mu = +1$ gleich $\mp \frac{4\pi}{3 . 25} H''''$, und für $\mu = -1$ gleich $\pm \frac{4\pi H''''}{3 . 25}$ ist.

$$A = \frac{8\pi}{15} \cdot U^{(0)} - \frac{8\pi}{9 \cdot 5^2} \cdot H - \frac{8\pi}{3 \cdot 5^2} \cdot H''''$$

$$B = \frac{8\pi}{15} \cdot U^{(0)} - \frac{8\pi}{9 \cdot 5^2} \cdot H + \frac{8\pi}{3 \cdot 5^2} \cdot H''''$$

$$C = \frac{8\pi}{15} \cdot U^{(0)} + \frac{16\pi}{9 \cdot 5^2} \cdot H.$$

Will man, daſs die drey Momente der Trägheit A, B, C, einander gleich seyn sollen, so hat man $H = 0$, $H'''' = 0$, und folglich $U^{(2)} = 0$; diese letztere Gleichung thut daher sowohl den Bedingungen der drey Hauptaxen, als auch der Gleichheit der drey Momente der Trägheit Genüge. Man hat aber im 27sten Satz des ersten Buchs gesehen, daſs alsdann die Momente der Trägheit für alle Axen gleich groſs sind; die Kugel ist also nicht der einzige feste Körper, welcher diese Eigenschaft besitzt. Die vorhergehende Analysis giebt die allgemeine Gleichung aller festen Körper, denen sie zukömmt, welche Gleichung wir im angeführten Satz des ersten Buchs angekündigt haben. Man muſs hier bemerken, daſs diese Resultate von der Voraussetzung unabhängig sind, daſs nämlich der Anfangspunkt R' im Schwerpunkt des Sphäroids ist, und daſs sie folglich Statt haben, in welchem Punkt man immer diesen Anfangspunkt innerhalb des Sphäroids annehmen mag.

Nimmt man an, daſs die Erde aus einer unendlichen Menge Lagen besteht, die sich vom Mittelpunkt zur Oberfläche ändern, so kann der Halbmesser R einer dieser Lagen beständig auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$R = a + \alpha a \,.\, (Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \text{etc.}),$$

wo α ein sehr kleiner Koeffizient ist, und wo $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ etc. Funktionen von derselben Natur wie $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ etc. sind, das heiſst, solche, die derselben partiellen Differenzialgleichung Genüge thun, und überdies a auf irgend eine Art enthalten können. Vernachlässigt man die Gröſsen von der Ordnung α^2, so findet man

$$R^5 = a^5 + 5\,\alpha\, a^5 \,.\, (Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + \text{etc.}).$$

Gedenkt man sich einen gleichartigen festen Körper, dessen Dichte wir zur Einheit annehmen, und dessen Halbmesser der Oberfläche der Halbmesser der Lage ist, von der die Rede ist, so erhält man für diesen festen Körper

$$A = \frac{8\pi . a^5}{15} + \alpha . S . a^5 . Y^{(2)} . d\mu . d\varpi . [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) . \cos \varpi^2];$$

$$B = \frac{8\pi . a^5}{15} + \alpha . S . a^5 . Y^{(2)} . d\mu . d\varpi . [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) . \sin \varpi^2];$$

$$C = \frac{8\pi . a^5}{15} + \alpha . S . a^5 . Y^{(2)} . d\mu . d\varpi . (\tfrac{1}{3} - \mu^2).$$

Differenziirt man diese Werthe in Beziehung auf a, und multiplicirt man sie hernach in die Dichte der Lage, deren Halbmesser R ist, welche Dichte wir durch ϱ bezeichnen werden, wo ϱ irgend eine Funktion von a ist, so wird man die Momente der Trägheit dieser Lage erhalten, und es wird hinreichend seyn, um sie für die ganze Erde zu erhalten, die Momente der Lage in Beziehung auf a von $a = 0$ bis zum Werth von a an der Oberfläche der Erde zu integriren, welchen Werth wir durch die Einheit bezeichnen werden. Man erhält so

$$A = \frac{8\pi}{15} . S . \varrho . d . a^5 + \alpha . S . \varrho . d(a^5 Y^{(2)}) . d\mu . d\varpi . [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) . \cos \varpi^2];$$

$$B = \frac{8\pi}{15} . S . \varrho . d . a^5 + \alpha . S . \varrho . d(a^5 Y^{(2)}) . d\mu . d\varpi . [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) . \sin \varpi^2];$$

$$C = \frac{8\pi}{15} . S . \varrho . d . a^5 + \alpha . S . \varrho . d(a^5 Y^{(2)}) . d\mu . d\varpi . (\tfrac{1}{3} - \mu^2),$$

wo das Differenzial $d(a^5 Y^{(2)})$ sich bloſs auf die veränderliche Gröſse a bezieht.

Bezeichnet man das Verhältniſs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator durch $\alpha\phi$, so folgt aus den Gleichungen (2) des 29sten Satzes des dritten Buchs, daſs man durch die Bedingung des Gleichgewichts der auf der Erde verbreiteten Flüssigen

$$S . \varrho . d . (a^5 Y^{(2)}) = \tfrac{5}{3} . [Y^{(2)} + \tfrac{1}{2}\phi . (\mu^2 - \tfrac{1}{3})] . S . \varrho . d : a^3$$

hat, wo der Werth von $Y^{(2)}$ im zweyten Theil dieser Gleichung sich auf die Oberfläche der Erde bezieht, und wo die Integrale von $a = 0$ bis $a = 1$ genommen werden müssen; man erhält folglich [99]):

$A =$

99) Das zweyte Integral in den Werthen von A, B, C, ist ein dreyfaches Integral. Integrirt man in Beziehung auf a, so erhält man vermöge der im Text angeführten Gleichung

$$\alpha S . \varrho . d(a^5 Y^{(2)}) d\mu . d\varpi . [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) \cos \varpi^2] = \frac{5\alpha}{3} S . Y^{(2)} . d\mu . d\varpi [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) \cos \varpi^2] S . \varrho . d . a^3$$
$$+ \tfrac{5}{6} \alpha\varphi . S . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) [\tfrac{1}{3} - (1 - \mu^2) \cos \varpi^2] d\mu . d\varpi . S . \varrho . d . a^3.$$

Das

$$A = \frac{8\pi}{15}.S.\varrho.d.a^5 + \frac{4\alpha\pi}{27}.\phi.S.\varrho.d.a^3 + \frac{5\alpha}{3}.S.Y^{(2)}.d\mu.d\varpi.[\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2).\cos\varpi^2].S.\varrho.d.a^3;$$

$$B = \frac{8\pi}{15}.S.\varrho\, d\, a^5 + \frac{4\alpha\pi}{27}.\phi.S.\varrho.d.a^3 + \frac{5\alpha}{3}.S.Y^{(2)}.d\mu.d\varpi.[\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2)\sin\varpi^2].S.\varrho.d\, a^3;$$

$$C = \frac{8\pi}{15}.S.\varrho.d.a^5 - \frac{8\alpha\pi}{27}.\phi.S.\varrho.d.a^3 + \frac{5\alpha}{3}.S.Y^{(2)}.d\mu.d\varpi.(\tfrac{1}{3} - \mu^2).S.\varrho.d.a^3.$$

Die Funktion $Y^{(2)}$ ist von folgender Form:

$$h.(\tfrac{1}{3} - \mu^2) + h'.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi + h''.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi$$
$$+ h'''.(1-\mu^2).\sin 2\varpi + h''''.(1-\mu^2).\cos 2\varpi.$$

Die Betrachtung der Hauptaxen giebt nach Satz 32 des dritten Buchs

$$h' = 0; \quad h'' = 0; \quad h''' = 0,$$

und folglich

$$Y^{(2)} = h.(\tfrac{1}{3} - \mu^2) + h''''.(1-\mu^2).\cos 2\varpi.$$

Man hat im dritten Buch gesehen, daſs die Aenderung der Schwere sehr nahe dem Quadrat des Sinus der Breite proportional ist; der Werth von h'''' muſs daher sehr klein seyn; er würde in der That gleich Null seyn, wenn die Erde ein durch Umdrehung entstandener Körper wäre; wir werden aber um gröſserer Allgemeinheit willen diese Gröſse in den folgenden Untersuchungen beybehalten; wir erhalten so [100])

$$A = \frac{8\pi}{15}.S.\varrho.d.a^5 - \tfrac{8}{27}\alpha\pi(h - \tfrac{1}{2}\phi).S.\varrho.d.a^3 - \tfrac{8}{9}\alpha\pi.h''''.S.\varrho.d.a^3;$$

$$B = \frac{8\pi}{15}.S.\varrho.d.a^5 - \tfrac{8}{27}\alpha\pi(h - \tfrac{1}{2}\phi).S.\varrho.d.a^3 + \tfrac{8}{9}\alpha\pi.h''''.S.\varrho.d.a^3;$$

$$C = \frac{8\pi}{15}.S.\varrho.d.a^5 + \tfrac{16}{27}\alpha\pi(h - \tfrac{1}{2}\phi).S.\varrho.d.a^3.$$

Das letzte Integral ist gleich $\tfrac{5}{12}\alpha\varphi.S.[(\tfrac{1}{3} - \mu^2)^2 - (1-\mu^2)\cos 2\varpi]\, d\mu.d\varpi.S.\rho.d.a^3$, und wenn man in Beziehung auf ϖ integrirt, $\tfrac{5}{12}\alpha\varphi.S.[(\tfrac{1}{3} - \mu^2)^2\,\varpi - (1-\mu^2)\sin 2\varpi].d\mu.S.\rho.d.a^3$. Nimmt man dies Integral von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 2\pi$, so erhält man $\tfrac{5}{6}\alpha\varphi\pi S.(\tfrac{1}{3} - \mu^2)^2.d\mu.S.\rho.d.a^3$. Integrirt man von neuem in Beziehung auf μ, so findet man $\tfrac{5}{6}\alpha\varphi\pi.(\tfrac{1}{9}\mu - \tfrac{2}{9}\mu^3 + \tfrac{1}{5}\mu^5).S.\rho.d.a^3$, welches innerhalb der Grenzen $\mu = 1$ und $\mu = -1$ genommen, $\tfrac{4}{27}\alpha\varphi\pi.S\rho d.a^3$ wird. Dies giebt den Werth von A, aus welchem man leicht die Werthe von B und C schlieſsen kann, da die Koeffizienten von $S.\rho.d.a^3$ dasselbe Verhältniſs gegen einander haben, welches die in der vorhergehenden Anmerkung gefundenen Koeffizienten von H gegen einander haben.

100) Vermittelst der in der 98sten Anmerkung gefundenen Gleichungen. Dort ward nämlich $H(\tfrac{1}{3} - \mu^2) + H''''(1-\mu^2).\cos 2\varpi$ statt $U^{(2)}$ in die Gröſse $\tfrac{1}{3}S.U^{(2)}.d\mu.d\varpi.[\tfrac{1}{3} - (1-\mu^2).\cos 2\varpi]$ substi-

3. Wir wollen nun die Werthe von dN, dN', dN'' betrachten, die sich in den Differenzialgleichungen (D′) des ersten Satzes befinden. Es sey L die Masse eines Gestirns, welches auf die Erde wirkt; x, y, z die Koordinaten seines Mittelpunkts auf den Schwerpunkt der Erde bezogen, und $r_{,} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; man nenne x', y', z' die Koordinaten eines Theilchens dm des Erdsphäroids; man setze endlich

$$V = -L . \frac{(xx' + yy' + zz')}{r_{,}^{3}} + \frac{L}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}};$$

so werden $\left(\frac{dV}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy'}\right)$, $\left(\frac{dV}{dz'}\right)$ die anziehenden Kräfte von L auf das Theilchen dm seyn, wenn man sie parallel mit den Axen der x, der y und der z zerlegt, in entgegengesetzter Richtung ihres Anfangspunkts nimmt und um die anziehenden Kräfte vermindert, welche dasselbe Gestirn auf den Schwerpunkt der Erde ausübt, den man hier als unbeweglich ansieht. Dies sind die Kräfte, die wir im 25sten Satz des ersten Buchs mit P, Q, R bezeichnet haben; man erhält folglich durch denselben Satz

$$\frac{dN}{dt} = S . dm . \left[x' . \left(\frac{dV}{dy'}\right) - y' . \left(\frac{dV}{dx'}\right)\right];$$

$$\frac{dN'}{dt} = S . dm . \left[x' . \left(\frac{dV}{dz'}\right) - z' . \left(\frac{dV}{dx'}\right)\right];$$

$$\frac{dN''}{dt} = S . dm . \left[y' . \left(\frac{dV}{dz'}\right) - z' . \left(\frac{dV}{dy'}\right)\right].$$

Bemerkt man ferner, daſs man [101])

tuirt, und man fand $-\frac{8}{9 \cdot 5^2} . \pi H - \frac{8\pi}{3 \cdot 5^2} . H''''$. Jetzt soll $h(\frac{1}{3} - \mu^2) + h''''(1 - \mu^2) . \cos 2\varpi$ statt $Y^{(2)}$ in $\frac{5\alpha}{3} . S . Y^2 . d\mu . d\varpi . [\frac{1}{3} - (1 - \mu^2) . \cos \varpi^2]$ $S . \rho . d . a^3$ substituirt werden; man muſs also $-\frac{5}{3}\alpha . \frac{8\pi}{9 \cdot 5} . h . S\rho . d . a^3 - \frac{5\alpha}{3} . \frac{8\pi}{3 \cdot 5} . h'''' . S\rho . d . a^3$ erhalten.

101) Man suche die partiellen Differenziale von V für jedes der beiden Stücke des Werthes von V besonders, weil man leicht vermuthen kann, daſs die gegebene Gleichung für jedes Stück einzeln gelten muſs, da das zweyte Stück und seine Differenziale eine Wurzelgröſse enthalten, welche sich im ersten nicht findet. Man hat nun für das erste Stück des Werthes von V, nämlich für $-\frac{L}{r_{,}^{3}} . (xx' + yy' + zz')$,

$$x' \cdot \left(\frac{dV}{dy'}\right) - y' \cdot \left(\frac{dV}{dx'}\right) = y \cdot \left(\frac{dV}{dx}\right) - x \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right)$$

hat, so erhält man

$$\frac{dN}{dt} = S \,.\, dm \,.\left[y \cdot \left(\frac{dV}{dx}\right) - x \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right)\right];$$

$$\frac{dN'}{dt} = S \,.\, dm \,.\left[z \cdot \left(\frac{dV}{dx}\right) - x \cdot \left(\frac{dV}{dz}\right)\right];$$

$$\frac{dN''}{dt} = S \,.\, dm \,.\left[z \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right) - y \cdot \left(\frac{dV}{dz}\right)\right].$$

Nimmt man an, daſs die Koordinaten x', y', z' in Vergleichung mit dem Abstand r des Gestirns L vom Schwerpunkt der Erde sehr klein sind, so kann man V in eine Reihe entwickeln, welche durch die negativen Potenzen von r'

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right) = -\frac{Lx}{r_{\prime}^{3}};\quad \left(\frac{dV}{dy'}\right) = -\frac{Ly}{r_{\prime}^{3}};\quad \left(\frac{dV}{dz'}\right) = -\frac{Lz}{r_{\prime}^{3}};\quad \text{ferner}$$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{Lx'}{r_{\prime}^{3}} + \frac{3L}{r_{\prime}^{4}} \cdot \left(\frac{dr_{\prime}}{dx}\right);\quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = -\frac{Ly'}{r_{\prime}^{3}} + \frac{3L}{r_{\prime}^{4}} \cdot \left(\frac{dr_{\prime}}{dy}\right);$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right) = -\frac{Lz'}{r_{\prime}^{3}} + \frac{3L}{r_{\prime}^{4}} \cdot \left(\frac{dr_{\prime}}{dz}\right);\quad \text{endlich}\ \left(\frac{dr_{\prime}}{dx}\right) = \frac{x}{r_{\prime}};\quad \left(\frac{dr_{\prime}}{dy}\right) = \frac{y}{r_{\prime}};\quad \left(\frac{dr_{\prime}}{dz}\right) = \frac{z}{r_{\prime}};$$

woraus man ohne Schwierigkeit findet, daſs für das erste Stück von V die folgenden Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} x' \cdot \left(\frac{dV}{dy'}\right) - y' \cdot \left(\frac{dV}{dx'}\right) &= y \cdot \left(\frac{dV}{dx}\right) - x \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right) \\ x' \cdot \left(\frac{dV}{dz'}\right) - z' \cdot \left(\frac{dV}{dx'}\right) &= z \cdot \left(\frac{dV}{dx}\right) - x \cdot \left(\frac{dV}{dz}\right) \\ y' \cdot \left(\frac{dV}{dz'}\right) - z' \cdot \left(\frac{dV}{dy'}\right) &= z \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right) - y \cdot \left(\frac{dV}{dz}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Für das zweyte Stück von V, nämlich für $\frac{L}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}}$ findet man, wenn man die Wurzelgröſse der Kürze wegen mit Q bezeichnet:

$$\left(\frac{dV}{dx'}\right) = -(x'-x)\ L \,.\, Q^{-3};\quad \left(\frac{dV}{dx}\right) = (x'-x) \,.\, L \,.\, Q^{-3};$$

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right) = -(y'-y)\ L \,.\, Q^{-3};\quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = (y'-y) \,.\, L \,.\, Q^{-3};$$

$$\left(\frac{dV}{dz'}\right) = -(z'-z)\ L \,.\, Q^{-3};\quad \left(\frac{dV}{dz}\right) = (z'-z) \,.\, L \,.\, Q^{-3};$$

wodurch man sogleich die Gleichungen (1) erhalten wird.

sehr convergirt. Man erhält so sehr nahe [102])

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^{5}} \,.\, S \,.\, dm \,.\, (xx' + yy' + zz') \,.\, (yx' - xy');$$

$$\frac{dN'}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^{5}} \,.\, S \,.\, dm \,.\, (xx' + yy' + zz') \,.\, (zx' - xz');$$

$$\frac{dN''}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^{5}} \,.\, S \,.\, dm \,.\, (xx' + yy' + zz') \,.\, (zy' - yz').$$

Man hat im 28sten Satz des ersten Buchs gesehen, dafs die Werthe von p, q, r von der Lage der Ebene der x und der y unabhängig sind; nimmt man nun für diese Ebene den Aequator der Erde selbst an, so hat man $\theta = 0$; und nimmt man die Axe der x als erste Hauptaxe an, so hat man $\phi = 0$; man hat ferner nach dem 26sten Satz des ersten Buchs

$$S.dm.(y'^2 + z'^2) = A; \quad S.dm.(x'^2 + z'^2) = B; \quad S.dm.(x'^2 + y'^2) = C;$$

$$S.x'y'.dm = 0; \quad S.x'z'.dm = 0; \quad S.y'z'.dm = 0,$$

folglich

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^{5}}.(B-A).xy; \quad \frac{dN'}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^{5}}.(C-A).xz; \quad \frac{dN''}{dt} = \frac{3L}{r_{,}^{5}}.(C-B).yz.$$

Die Gleichungen (D') des ersten Satzes verwandeln sich so in folgende:

102) Die in der vorhergehenden Anmerkung gefundenen Werthe der partiellen Differenziale von V geben

$$y.\left(\frac{dV}{dx}\right) - x.\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{-L}{r^3} \,.\, (x'y - y'x) + \frac{L}{Q^3} \,.\, (x'y - y'x), \text{ wo}$$

$$\frac{1}{Q^3} = [(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{-\frac{3}{2}} = [r_{,}^2 - 2\,(x'x + y'y + z'z)]^{-\frac{3}{2}}$$ ist, wenn man die Quadrate von x', y', z' wegen ihrer Kleinheit in Vergleichung mit den übrigen Gliedern dieser Wurzelgröfse vernachlässigt. Der binomische Lehrsatz giebt aber

$$[r_{,}^2 - 2\,(xx' + yy' + zz')]^{-\frac{3}{2}} = r_{,}^{-3} + 3\,r_{,}^{-5} \,.\, (xx' + yy' + zz') + \text{etc.}$$

Substituirt man diesen Werth von Q^{-3} in die obige Gleichung, so erhält man

$$y \,.\, \left(\frac{dV}{dx}\right) - x \,.\, \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{L}{r_{,}^{5}} \,.\, (xx' + yy' + zz')\,(x'y - y'x),$$

und hieraus, wenn man x in z und z in x verwandelt,

$$y \,.\, \left(\frac{dV}{dz}\right) - z \,.\, \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{L}{r_{,}^{5}} \,.\, (xx' + yy' + zz').(z'y - y'z),$$

und wenn man hierin y in x und x in y verwandelt,

$$x \,.\, \left(\frac{dV}{dz}\right) - z \,.\, \left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{L}{r_{,}^{5}} \,.\, (xx' + yy' + zz').(z'x - x'z),$$

wodurch man unmittelbar die Werthe von dN, dN', dN'' erhalten wird.

$$\left.\begin{aligned} dp + \left(\frac{B-A}{C}\right).qr.dt &= \frac{3L.dt}{r_{,}^{5}}.\left(\frac{B-A}{C}\right).xy; \\ dq + \left(\frac{C-B}{A}\right).rp.dt &= \frac{3L.dt}{r_{,}^{5}}.\left(\frac{C-B}{A}\right).yz; \\ dr + \left(\frac{A-C}{B}\right).pq.dt &= \frac{3L.dt}{r_{,}^{5}}.\left(\frac{A-C}{B}\right).xz; \end{aligned}\right\} . \quad (F)$$

Diese Gleichungen setzen voraus, daſs $r_{,}$ in Vergleichung mit dem Halbmesser des Erdsphäroids sehr groſs ist, welches für die Sonne und den Mond wahr ist; es ist aber merkwürdig, daſs sie auch noch dann sehr genähert seyn würden, wenn das anziehende Gestirn sehr nahe bey der Erde, und die Gestalt dieses Planeten elliptisch wäre. Wir bemerken, um dies zu zeigen, daſs man nach Satz 2.

$$x' = R.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi; \quad y' = R.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi; \quad z = R.\mu$$

hat; nennt man ν und λ die Werthe, welche die auf das Theilchen dm des Erdsphäroids sich beziehenden Gröſsen μ und ϖ in Rücksicht auf das Gestirn L erhalten, so findet man

$$x = r_{,}.\sqrt{1-\nu^2}.\cos\lambda; \quad y = r_{,}.\sqrt{1-\nu^2}.\sin\lambda; \quad z = r_{,}.\nu.$$

Substituirt man diese Werthe in die Funktion V, und entwickelt man sie hernach nach den Potenzen von $\frac{R}{r_{,}}$, so erhält man eine Reihe von folgender Form:

$$\frac{L}{r_{,}} + \frac{L.R^2}{r_{,}^3}.U^{(2)} + \frac{L.R^3}{r_{,}^4}.U^{(3)} + \text{etc.},$$

und man kann sich leicht durch den 23sten Satz des dritten Buchs versichern, daſs die Funktionen $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ etc. so beschaffen sind, daſs man allgemein

$$0 = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dU^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2U^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).U^{(i)}$$

hat. Man nehme nun die Gleichung

$$\frac{dN}{dt} = S.dm.\left[y.\left(\frac{dV}{dx}\right) - x.\left(\frac{dV}{dy}\right)\right]$$

wieder vor, so erhält man

$$y.\left(\frac{dV}{dx}\right) - x.\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{L.R^2}{r_{\prime}^3}.\left[y.\left(\frac{dU^{(2)}}{dx}\right) - x.\left(\frac{dU^{(2)}}{dy}\right)\right]$$
$$+ \frac{L.R^3}{r_{\prime}^4}.\left[y.\left(\frac{dU^{(3)}}{dx}\right) - x.\left(\frac{dU^{(3)}}{dy}\right)\right]$$
$$+ \text{ etc.}$$

Da die partiellen Differenziale des zweyten Theils dieser Gleichung in Beziehung auf veränderliche Gröſsen genommen werden, welche von μ und von ϖ unabhängig sind: so hat man, wenn man die Funktion $y.\left(\frac{dU^{(i)}}{dx}\right) - x.\left(\frac{dU^{(i)}}{dy}\right)$ allgemein durch $U'^{(i)}$ bezeichnet

$$0 = \left\{\frac{d.\left[(1-\mu^2).\left(\frac{dU'^{(i)}}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2U'^{(i)}}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu^2} + i.(i+1).U'^{(i)},$$

so daſs die Funktion $U'^{(i)}$ von derselben Natur ist, wie die Funktionen $Y^{(i)}$ und $U^{(i)}$; der vorhergehende Ausdruck von $\frac{dN}{dt}$ verwandelt sich so vermöge des 2ten Satzes, und wenn man statt dm seinen Werth $\varrho.R^2.dR.d\mu.d\varpi$, und statt R seinen Werth $a + \alpha a.[Y^{(1)} + Y^{(2)} + \text{etc.}]$ substituirt, in folgenden:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\alpha L}{r_{\prime}^3}.S.\varrho.d.(a^5.Y^{(2)}).U'^{(2)}.d\mu.d\varpi$$
$$+ \frac{\alpha L}{r_{\prime}^4}.S.\varrho.d.(a^6.Y^{(3)}).U'^{(3)}.d\mu.d\varpi$$
$$+ \text{ etc.};$$

wo die Differenziale $d.(a^5.Y^{(2)})$, $d.(a^6.Y^{(2)})$ etc. sich auf die veränderliche Gröſse a beziehen. Nun giebt aber die Gleichung (2) des 29sten Satzes des dritten Buchs im Allgemeinen an der Oberfläche der Erde, und wenn i gröſser als 2 ist

$$S.\varrho.d.(a^{i+3}.Y^{(i)}) = \frac{2i+1}{3}.Y^{(i)}.S.\varrho.d.a^3,$$

wo die Integrale von $a = 0$ bis $a = 1$ genommen werden müssen, und wo $Y^{(i)}$ im zweyten Theil dieser Gleichung sich auf die Oberfläche der Erde bezieht; man hat folglich

$$\frac{\alpha L}{r_{\prime}^4}.S.\varrho.d.(a^6.Y^{(3)}).U'^{(3)}.d\mu.d\varpi = \frac{7\alpha L}{3r_{\prime}^4}.S.Y^{(3)}.U'^{(3)}.d\mu.d\varpi.S.\varrho.d.a^3.$$

Hat die Erde die Gestalt eines Ellipsoids, so ist $Y^{(3)}$ gleich Null, und alsdann bleibt vom Ausdruck von $\frac{dN}{dt}$ nur das erste Glied übrig, nicht bloſs wegen der Gröſse von $r_{,}$, sondern weil die Werthe von $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$ etc. gleich Null sind. Ob nun schon die elliptische Figur den gemessenen Meridiangraden nicht genau Genüge thut, so zeigt doch die Uebereinstimmung der Aenderungen der Schwere mit dieser Figur, daſs die Gröſsen $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$ etc. in Vergleichung mit $Y^{(2)}$ wenig beträchtlich sind. Man kann daher bey der Berechnung der Bewegungen der Axe der Erde annehmen, daſs die Gestalt der Erde elliptisch ist, ohne einen merklichen Irrthum befürchten zu dürfen.

4. Wir wollen nun die Koordinaten des Gestirns L auf eine feste Ebene beziehen, für welche wir die Ebene der Ekliptik zu einer gegebenen Epoche annehmen. Es seyen X, Y, Z diese neuen Koordinaten, wo die Axe der X die Linie ist, welche vom Mittelpunkt der Erde zum Frühlingsnachtgleichepunkt gezogen worden ist; die Axe der Y, die von demselben Mittelpunkt zum ersten Punkt des Krebses gezogene Linie, und die Axe der Z, die von demselben Mittelpunkt zum Nordpol der Ekliptik gezogene Linie, so hat man nach dem 21 sten Satz des ersten Buchs

$$x = X \,.\, \cos\phi + Y \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\phi - Z \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\phi;$$
$$y = Y \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\phi - X \,.\, \sin\phi - Z \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\phi;$$
$$z = Y \,.\, \sin\theta + Z \,.\, \cos\theta.$$

Die Differenzialgleichungen (F) des vorhergehenden Satzes verwandeln sich dann in folgende [103]);

$$dp + \left(\frac{B-A}{C}\right).qr.dt = \frac{3L.dt.(B-A)}{2\,r_{,}^{5}\,.\,C} \,.\, \left[\begin{matrix}(Y^2.\cos\theta^2 + Z^2.\sin\theta^2 - X^2 - 2\,YZ.\sin\theta.\cos\theta).\sin 2\phi \\ +\ (2\,XY.\cos\theta - 2\,XZ.\sin\theta).\cos 2\phi\end{matrix}\right];$$

$$dq + \left(\frac{C-B}{A}\right).rp.dt = \frac{3L.dt.(C-B)}{r_{,}^{5}\,.\,A} \,.\, \left[\begin{matrix}[(Y^2 - Z^2)\sin\theta.\cos\theta + YZ.(\cos\theta^2 - \sin\theta^2)].\cos\phi \\ -\ (XY.\sin\theta + XZ.\cos\theta).\sin\phi\end{matrix}\right];\ \text{(G)}$$

$$dr + \left(\frac{A-C}{B}\right).pq.dt = \frac{3L.dt.(A-C)}{r_{,}^{5}\,.\,B} \,.\, \left[\begin{matrix}(XY.\sin\theta + XZ.\cos\theta).\cos\phi \\ +[(Y^2 - Z^2).\sin\theta.\cos\theta + YZ.(\cos\theta^2 - \sin\theta^2)].\sin\phi\end{matrix}\right].$$

103) Man setze der Kürze wegen $Y \,.\, \cos\theta - Z \,.\, \sin\theta = W$, so ist $x = W \,.\, \sin\varphi + X \,.\, \cos\varphi$; $y = W \,.\, \cos\varphi - X \,.\, \sin\varphi$, und $xy = WX \,.\, (\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) + (W^2 - X^2) \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi = WX.\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(W^2 - X^2) \,.\, \sin 2\varphi$, wo $W^2 = Y^2 \,.\, \cos\theta^2 + Z^2.\sin\theta^2 - 2\,YZ.\sin\theta.\cos\theta$; folglich $xy = \frac{1}{2}[2\,XY.\cos\theta - 2\,XZ.\sin\theta].\cos 2\varphi + \frac{1}{2}[Y^2.\cos\theta^2 + Z^2.\sin\theta^2 - X^2 - 2\,YZ.\sin\theta.\cos\theta].\sin 2\varphi$. Man findet eben so xz und yz.

Wir wollen nun diese Gleichungen integriren. Wären die beiden Momente der Trägheit A und B einander gleich, welches dann Statt haben würde, wenn die Erde ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid wäre, so würde die erste dieser Gleichungen $dp = 0$, und folglich p beständig geben; giebt es einen geringen Unterschied zwischen diesen beiden Momenten der Trägheit, so enthält der Werth von p periodische Ungleichheiten; sie sind aber unmerklich. Da sich nämlich die augenblickliche Umdrehungsaxe immer sehr wenig von der ersten Hauptaxe entfernt, so sind q und r sehr kleine Gröſsen, und man kann ohne merklichen Irrthum das Glied $\left(\frac{B-A}{C}\right).rq.dt$ in der ersten der Gleichungen (G) vernachlässigen. Der zweyte Theil derselben Gleichung läſst sich in Sinus und Kosinus sehr schnell wachsender Winkel verwandeln, weil seine Glieder in den Sinus und Kosinus des Winkels 2ϕ multiplicirt sind; diese Glieder müssen folglich ebenfalls nach den Integrationen unmerklich seyn. Man kann daher in den beiden letztern der Gleichungen (G), $p = n$ setzen, wo n die mittlere Winkelgeschwindigkeit ist, welche die Erde bey der Umdrehung um ihre dritte Hauptaxe hat. Da aber die Untersuchung des Werthes von p wegen seines Einflusses auf die Dauer des Tages sehr wichtig ist, so werden wir zu diesem Gegenstand zurückkehren, nachdem wir die Werthe von q und von r bestimmt haben werden.

Man setze der Kürze wegen

$$\frac{3L}{r_{,}^{5}}.[(Y^2-Z^2).\sin\theta.\cos\theta+Y.Z.(\cos\theta^2-\sin\theta^2)]=P,$$

$$\frac{3L}{r_{,}^{5}}.(XY.\sin\theta+XZ.\cos\theta)=P',$$

so werden die beiden letztern Gleichungen (G)

$$dq+\left(\frac{C-B}{A}\right).rp.dt=\left(\frac{C-B}{A}\right).dt.(P.\cos\phi-P'.\sin\phi);$$

$$dr+\left(\frac{A-C}{B}\right).pq.dt=\left(\frac{A-C}{B}\right).dt.(P'.\cos\phi+P.\sin\phi).$$

P und P' können in Sinus und Kosinus von Winkeln entwickelt werden, welche proportional mit der Zeit wachsen. Es sey $k.\cos(it+\varepsilon)$ irgend ein Glied von P, und $k'.\sin(it+\varepsilon)$ das entsprechende Glied von P', so erhält man, wenn man nur auf diese Glieder Rücksicht nimmt,

$dq +$

$$dq+\left(\frac{C-B}{A}\right).rp.dt=\left(\frac{C-B}{2A}\right).dt.[(k+k').\cos(\phi+it+\epsilon)+(k-k').\cos(\phi-it-\epsilon)];$$

$$dr+\left(\frac{A-C}{B}\right).pq.dt=\left(\frac{A-C}{2B}\right).dt.[(k+k').\sin(\phi+it+\epsilon)+(k-k').\sin(\phi-it-\epsilon)].$$

Setzt man in diesen Gleichungen

$$q = M\,.\,\sin(\phi+it+\epsilon)+N\,.\,\sin(\phi-it-\epsilon);$$
$$r = M'\,.\cos(\phi+it+\epsilon)+N'\,.\cos(\phi-it-\epsilon);$$

so erhält man, wenn man bemerkt, daſs $d\phi$ sehr nahe gleich ndt ist [104]),

$$M = \frac{\tfrac{1}{2}(k+k').(C-B)\,.\,[n(A+B-C)+iB]}{(n+i)^2\,.\,AB-n^2.(A-C)\,.\,(B-C)};$$

$$M' = \frac{\tfrac{1}{2}(k+k').(C-A)\,.\,[n(A+B-C)+iA]}{(n+i)^2\,.\,AB-n^2.(A-C)\,.\,(B-C)};$$

$$N = \frac{\tfrac{1}{2}(k-k').(C-B)\,.\,[n(A+B-C)-iB]}{(n-i)^2\,.\,AB-n^2.(A-C)\,.\,(B-C)};$$

$$N' = \frac{\tfrac{1}{2}(k-k').(C-A)\,.\,[n.(A+B-C)-iA]}{(n-i)^2\,.\,AB-n^2.(A-C)\,.\,(B-C)}.$$

104) Differenziirt man die Differenzialgleichungen für dq und dr, so erhält man, wenn man $d\varphi = ndt$ setzt,

$$d^2q+\left(\frac{C-B}{A}\right).p.dr.dt=\left(\frac{C-B}{2A}\right).dt^2.[-(k+k').(n+i).\sin(\varphi+it+\epsilon)-(k-k').(n-i).\sin(\varphi-it-\epsilon)];$$

$$d^2r+\left(\frac{A-C}{B}\right).p.dq.dt=\left(\frac{A-C}{2B}\right).dt^2.[(k+k').(n+i).\cos(\varphi+it+\epsilon)+(k-k').(n-i).\cos(\varphi-it-\epsilon)].$$

Substituirt man statt dr und dq ihre Werthe und setzt man statt p seinen Werth n, so findet man

$$d^2q-n^2.\left(\frac{C-B}{A}\right).dt^2.\left(\frac{A-C}{B}\right)q+n.\left(\frac{C-B}{A}\right).dt^2.\left(\frac{A-C}{2B}\right).[(k+k').\sin(\varphi+it+\epsilon)+(k-k').\sin(\varphi-it-\epsilon)]$$
$$=\left(\frac{C-B}{2A}\right).dt^2.[-(k+k').(n+i).\sin(\varphi+it+\epsilon)-(k-k').(n-i).\sin(\varphi-it-\epsilon)]; \quad (1)$$

$$d^2r-n^2.\left(\frac{A-C}{B}\right).dt^2.\left(\frac{C-B}{A}\right)r+n.\left(\frac{A-C}{B}\right).dt^2.\left(\frac{C-B}{2A}\right).[(k+k').\cos(\varphi+it+\epsilon)+(k-k').\cos(\varphi-it-\epsilon)]$$
$$=\left(\frac{A-C}{2B}\right).dt^2.[(k+k').(n+i).\cos(\varphi+it+\epsilon)+(k-k').(n-i).\cos(\varphi-it-\epsilon)]. \quad (2)$$

Die Gleichung $q = M.\sin(\varphi+it+\epsilon)+N.\sin(\varphi-it-\epsilon)$ giebt

$$d^2q = -M.(n+i)^2.dt^2.\sin(\varphi+it+\epsilon)-N.(n-i)^2.dt^2.\sin(\varphi-it-\epsilon);$$

und $r = M'.\cos(\varphi+it+\epsilon)+N'.\cos(\varphi-it-\epsilon)$ giebt

$$d^2r = -M'.(n+i)^2.dt^2.\cos(\varphi+it+\epsilon)-N'.(n-i)^2.dt^2.\cos(\varphi-it-\epsilon).$$

Wir wollen nun die Gleichungen des 26sten Satzes des ersten Buchs wieder vornehmen

$$d\phi - d\psi \,.\, \cos\theta = p\,dt;$$
$$d\psi \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\phi - d\theta \,.\, \cos\phi = q\,dt;$$
$$d\psi \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\phi + d\theta \,.\, \sin\phi = r\,dt.$$

Diese Gleichungen geben

$$d\theta = r \,.\, dt \,.\, \sin\phi - q \,.\, dt \,.\, \cos\phi;$$

man hat folglich

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{M' - M}{2}\right) . \sin(2\phi + it + \varepsilon) + \left(\frac{N' - N}{2}\right) . \sin(2\phi - it - \varepsilon)$$
$$+ \left(\frac{N + N' - M - M'}{2}\right) . \sin(it + \varepsilon).$$

Wir können die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks von $\frac{d\theta}{dt}$ vernachlässigen, weil sie an sich selbst unmerklich sind, und weil sie außerdem durch die Integration nicht zunehmen. Dies ist aber nicht der Fall beym dritten Glied, welches durch die Integration merklich werden kann, wenn i sehr klein ist [105]). Man kann in diesem Fall i in Vergleichung mit n vernachlässigen, und man hat sehr nahe [106])

Substituirt man diese Werthe von q, d^2q, r, d^2r in die Gleichungen (1) und (2), so erhält man zwey identische Gleichungen; in der Gleichung (1) wird der Koeffizient von $\sin(\varphi + it + \iota)$ gleich Null seyn, so wie der Koeffizient von $\sin(\varphi - it - \iota)$; und in der Gleichung (2) werden die Koeffizienten der beiden Kosinus gleich Null seyn. Diese vier Gleichungen werden die Werthe von M, M', N und N' geben.

105) Dies Glied hat dann im Integral den sehr kleinen Divisor i, und kann dadurch beträchtlich werden.

106) Die vorhergehenden Werthe von M, M', N, N' geben, wenn man die in i multiplicirten Glieder vernachlässigt,

$$\frac{M + M}{2} = \frac{\frac{1}{4}(k + k') \,.\, n \,.\, (A + B - C) \,.\, (2C - A - B)}{(n - i)^2 . AB - n^2 . (A - C) \,.\, (B - C)}$$
$$\frac{N + N'}{2} = \frac{\frac{1}{4}(k - k') \,.\, n \,.\, (A + B - C) \,.\, (2C - A - B)}{(n + i)^2 . AB - n^2 . (A - C) \,.\, (B - C)}.$$

Vernachlässigt man die in i multiplicirten Glieder, so haben beide Brüche einerley Nenner, nämlich $n^2 . AB - n^2 . (A - C) . (B - C)$ oder $n^2 C \,.\, (B + A - C)$; dividirt man den Zähler und Nenner durch $(A + B - C) . n$, so findet man

$$\frac{M + M'}{2} = \frac{\frac{1}{4}(k + k') . (2C - A - B)}{nC} \text{ und } \frac{N + N'}{2} = \frac{\frac{1}{4}(k - k') \,.\, (2C - A - B)}{nC},$$

folglich $$\frac{N + N' - M - M'}{2} = \frac{k' . (A + B - 2C)}{2nC}.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{A + B - 2C}{2nC}\right) . k' . \sin(it + \varepsilon).$$

Die vorhergehenden Ausdrücke von $q\,dt$ und von $r\,dt$ geben

$$d\psi . \sin\theta = r . dt . \cos\phi + q . dt . \sin\phi;$$

hieraus findet man

$$d\psi . \sin\theta = \left(\frac{M' - M}{2}\right) . \cos(2\phi + it + \varepsilon) + \left(\frac{N' - N}{2}\right) . \cos(2\phi - it - \varepsilon)$$
$$+ \left(\frac{M + M' + N + N'}{2}\right) . \cos(it + \varepsilon).$$

Vernachlässigt man die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks, welche immer unmerklich sind, und setzt man i sehr klein, so hat man sehr nahe [107])

$$d\psi . \sin\theta = \left(\frac{2C - A - B}{2nC}\right) . k . \cos(it + \varepsilon).$$

Bezeichnet man durch $\Sigma . k . \cos(it + \varepsilon)$ die Summe der Glieder, in welche P entwickelt werden kann, und durch $\Sigma . k' . \sin(it + \varepsilon)$ die Summe der Glieder, in welche P' entwickelt werden kann, wo Σ die Karakteristik der endlichen Integrale ist, so findet man

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{A + B - 2C}{2n . C}\right) . \Sigma . k' . \sin(it + \varepsilon);$$
$$\frac{d\psi}{dt} . \sin\theta = \left(\frac{2C - A - B}{2n . C}\right) . \Sigma . k . \cos(it + \varepsilon). \qquad \text{(H)}$$

Integrirt man diese Gleichungen, ohne auf die willkührlichen beständigen Gröſsen Rücksicht zu nehmen, so erhält man die Theile von θ und von ψ, welche von der Wirkung des Gestirns L abhängen. Man muſs zu diesen veränderlichen Gröſsen die Gröſsen addiren, welche vom ursprünglichen Zustand der Bewegung abhangen, um ihre vollständigen Werthe zu haben. Nimmt man nur auf diesen Zustand Rücksicht, so verwandeln sich die beiden letzten der Gleichungen (G) in folgende:

107) Wir fanden in der vorhergehenden Anmerkung $\frac{1}{2}(M + M') = \frac{1}{4}(k - k') . \frac{2C - A - B}{nC}$, und $\frac{1}{2}(N + N') = \frac{1}{4}(k + k') . \frac{2C - A - B}{nC}$; die Summe beider Gleichungen giebt

$$\frac{M + M' + N + N'}{2} = \frac{k . (2C - A - B)}{2nC}.$$

$$dq + \left(\frac{C-B}{A}\right).nr.dt = 0; \quad dr + \left(\frac{A-C}{B}\right).nq.dt = 0.$$

Hieraus erhält man durch Integriren [108])

$$q = G.\sin(\lambda t + \beta); \quad r = \frac{\lambda A}{n.(B-C)}.G.\cos(\lambda t + \beta);$$

wo G und β zwey willkührliche beständige Gröſsen und λ gleich $n.\sqrt{\frac{(C-A).(C-B)}{A.B}}$ ist. Substituirt man statt q und r diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{d\theta}{dt} = r.\sin\phi - q.\cos\phi,$$

so erhält man, wenn man integrirt [109])

$$\theta = h + \frac{[n.(B-C)-\lambda A]}{2n.(n+\lambda).(B-C)}.G.\cos(\phi+\lambda t+\beta) - \left[\frac{\lambda A + n.(B-C)}{2n.(n-\lambda).(B-C)}\right].G.\cos(\phi-\lambda t-\beta);$$

wo h eine neue willkührliche Gröſse ist. Wäre der Werth von G merklich, so würde man ihn durch die täglichen Aenderungen der Polhöhe erkennen; da

108) Um r und q zu eliminiren, muſs man die gegebenen Gleichungen von neuem differenziiren; dies giebt $d^2q + \left(\frac{C-B}{A}\right).n.dr.dt = 0$ und $d^2r + \left(\frac{A-C}{B}\right).n\,dq.dt = 0$. Aus den ursprünglichen Gleichungen findet man $dq = -\left(\frac{C-B}{A}\right).nr\,dt$ und $dr = -\left(\frac{A-C}{B}\right).nq\,dt$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$d^2q - \frac{(C-B).(A-C)}{AB}.n^2dt.q = 0; \text{ und}$$

$$d^2r - \frac{(C-B).(A-C)}{AB}.n^2dt.r = 0.$$

Die Integrale finden sich nun ohne Schwierigkeit, und sind schon mehrmals in diesem Werk vorgekommen.

109) Es ist $r.\sin\varphi = \frac{\lambda A.G}{2n(B-C)}.\sin(\varphi+\lambda t+\beta) + \frac{\lambda A.G}{2n(B-C)}.\sin(\varphi-\lambda t-\beta)$, und $-q.\cos\varphi = -G.\sin(\varphi+\lambda t+\beta) + G.\sin(\varphi-\lambda t-\beta)$; folglich

$$(r.\sin\varphi - q.\cos\varphi) = \frac{\lambda A - 2n(B-C)}{2n(B-C)}.G.\sin(\varphi+\lambda t+\beta) + \frac{\lambda A + 2n(B-C)}{2n(B-C)}.G.\sin(\varphi-\lambda t-\beta).$$

Nun ist $dt = \frac{(n+\lambda)\,dt}{n+\lambda} = \frac{d\varphi + \lambda dt}{n+\lambda}$ und auch $dt = \frac{d\varphi - \lambda t}{n-\lambda}$; folglich

$$\int(r.\sin\varphi - q.\cos\varphi).dt = \frac{-\lambda A + 2n(B-C)}{2n(n+\lambda).(B-C)}.G.\cos(\varphi+\lambda t+\beta) - \frac{\lambda A + 2n(B-C)}{2n(n-\lambda).(B-C)}.G.\cos(\varphi-\lambda t-\beta).$$

aber die genauesten Beobachtungen keine Aenderung dieser Art zu erkennen geben, so folgt hieraus, dafs G unmerklich ist, und dafs man daher die Theile von θ und von ψ vernachlässigen kann, welche vom ursprünglichen Zustand der Bewegung der Erde abhängen.

5. Wir wollen nun die Gleichungen (H) des vorhergehenden Satzes wieder vornehmen. Die erste giebt, wenn man integrirt, und wenn man bemerkt, dafs $\Sigma . k' . \sin(it + \varepsilon)$ die Entwickelung der Funktion P' ist,

$$\theta = h + \left(\frac{A + B - 2C}{2n.C}\right) . \int P' . dt.$$

Die Sonne und der Mond sind die beiden Gestirne, welche einen merklichen Einflufs auf die Bewegungen der Axe der Erde haben: wir betrachten zuerst die Wirkung der Sonne. Es sey v die Länge dieses Gestirns vom beweglichen Frühlingsnachtgleichepunkt gezählt; es sey ferner γ die Neigung seiner Bahn gegen die feste Ebene und Λ die Länge seines aufsteigenden Knotens, wo die Längen v und Λ sich auf die Bahn der Sonne selbst beziehen, so hat man

$$X = r_{,} . \cos \tfrac{1}{2}\gamma^2 . \cos v + r_{,} . \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 . \cos(v - 2\Lambda);$$
$$Y = r_{,} . \cos \tfrac{1}{2}\gamma^2 . \sin v - r_{,} . \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 . \sin(v - 2\Lambda);$$
$$Z = r_{,} . \sin\gamma . \sin(v - \Lambda).$$

Hieraus findet man

$$XY = \tfrac{1}{2}r_{,}^2 . \cos \tfrac{1}{2}\gamma^4 . \sin 2v + \tfrac{1}{4}r_{,}^2 . \sin\gamma^2 . \sin 2\Lambda - \frac{r_{,}^2}{2} . \sin\tfrac{1}{2}\gamma^4 . \sin(2v - 4\Lambda);$$

$$XZ = \tfrac{1}{2}r_{,}^2 \sin\gamma . \cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 . \sin(2v - \Lambda) - \tfrac{1}{4}r_{,}^2 . \sin 2\gamma . \sin\Lambda + \tfrac{1}{2}r_{,}^2 . \sin\gamma . \sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 . \sin(2v - 3\Lambda).$$

Man kann wegen der äufserst grofsen Langsamkeit der Bewegung der Nachtgleichepunkte, dv der Winkelbewegung der Sonne während des Augenblicks dt gleich setzen, und man hat nach Satz 19 und 20. des zweyten Buchs

$$r_{,}^2 dv = a^2 m\, dt . \sqrt{1 - e^2},$$

wo mt die mittlere Bewegung der Sonne, a ihre mittlere Entfernung von der Erde, und e das Verhältnifs der Eccentricität ihrer Bahn zu dieser mittlern Entfernung ist. Man hat ferner nach dem 20sten Satz desselben Buchs $\frac{L}{a^3} = m^2$, wenn man die Massen der Planeten in Vergleichung mit der Masse der Sonne vernachlässigt, und die Gleichung der Ellipse giebt

$$\frac{a}{r_{,}} = \frac{1 + e . \cos(v - \Gamma)}{1 - e^2},$$

wo Γ die mittlere Länge der Erdnähe der Sonne ist; man erhält folglich für die Sonne

$$P'.dt = \frac{3L.dt}{r_,^5}.(XY.\sin\theta + XZ.\cos\theta)$$

$$= \frac{3m\,dv.[1+e.\cos(v-\Gamma)]}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.\left(\frac{XY}{r_,^2}.\sin\theta + \frac{XZ}{r_,^2}.\cos\theta\right).$$

Substituirt man statt $\frac{XY}{r_,^2}$ und $\frac{XZ}{r_,^2}$ ihre vorhergehenden durch v gegebenen Werthe, so sieht man, nachdem man $P'.dt$ in Sinus des Winkels v und seiner Vielfachen entwickelt hat, erstlich, daſs die von der Länge der Erdferne der Sonne Γ abhängenden Glieder den Winkel v enthalten, und daſs sie daher durch die Integration nicht beträchtlich werden können. Dies ist aber nicht der Fall bey den Gliedern, welche von der Länge des Knotens abhängen: die Funktion $\frac{XZ}{r_,^2}$ giebt in $P'.dt$ das Glied $-\frac{3m\,dv}{4}.\sin 2\gamma.\cos\theta.\sin\Lambda$, und dies Glied kann wegen der Langsamkeit der Aenderungen von γ und von Λ in dem Werth von θ durch die Integration sehr beträchtlich werden. Man findet so sehr nahe, wenn man bemerkt, daſs e und γ sehr klein sind, und wenn man unter den in diese Gröſsen multiplicirten Gliedern nur diejenigen behält, welche durch die Integrationen beträchtlich wachsen können,

$$\int P'.dt = -\frac{3m}{4}.\sin\theta.\cos 2v - \tfrac{3}{2}m^2.\cos\theta.\int\gamma\,dt.\sin\Lambda.$$

$\gamma.\sin\Lambda$ ist das Product der Neigung der Sonnenbahn in den Sinus der Länge ihres aufsteigenden Knotens, welche vom beweglichen Frühlingsnachtgleichepunkt gezählt wird; und da diese Neigung sehr klein ist, so kann man statt γ entweder seinen Sinus oder seine Tangente nehmen. Bezeichnet man aber durch Γ die Länge des aufsteigenden Knotens dieser Bahn, von einem unbeweglichen Nachtgleichepunkt gezählt, so ist, wie man im 59sten Satz des dritten Buchs gesehen hat, $\tang\gamma.\sin\Gamma$ durch eine endliche Anzahl Glieder von der Form $c.\sin(gt+\beta)$ gegeben, und $\tang\gamma.\cos\Gamma$ durch dieselbe Anzahl entsprechender Glieder $c.\cos(gt+\beta)$; ist ferner ψ die rückgängige Bewegung der Nachtgleichepunkte vom festen Nachtgleichepunkt an gerechnet, so hat man $\Lambda = \Gamma + \psi$; dies giebt

$$\tang\gamma.\sin\Lambda = \tang\gamma.\sin\Gamma.\cos\psi + \tang\gamma.\cos\Gamma.\sin\psi.$$

Substituirt man $c \,.\, \sin(gt + \beta)$ statt $\tang \gamma \,.\, \sin \Gamma$ und $c \,.\, \cos(gt + \beta)$ statt $\tang \gamma \,.\, \cos \Gamma$, so findet man

$$\tang \gamma \,.\, \sin \Lambda = c \,.\, \sin(gt + \beta + \psi).$$

Man sieht hieraus, daſs es um $\tang \gamma \,.\, \sin \Lambda$ zu erhalten hinreichend ist, die Winkel der verschiedenen Glieder des Ausdrucks von $\tang \gamma \,.\, \sin \Gamma$ um die Gröſse ψ zu vermehren. Man kann sogar, wenn man die Gröſsen von der Ordnung c^2 vernachlässigt, statt ψ die mittlere Bewegung der Nachtgleichen setzen; und alsdann wird $\tang \gamma \,.\, \sin \Lambda$ aus einer endlichen Anzahl Glieder von der Form $c \,.\, \sin(ft + \beta)$ bestehen, welche von den Gliedern des Ausdrucks von $\tang \gamma \,.\, \sin \Gamma$ nur dadurch verschieden sind, daſs die Winkel gt um die mittlere Bewegung der Nachtgleichen vermehrt sind. Man wird auf dieselbe Art finden, daſs $\tang \gamma \,.\, \cos \Lambda$ aus der entsprechenden Anzahl Glieder von der Form $c \,.\, \cos(ft + \beta)$ besteht. Bezeichnet man daher die Summe aller Glieder des Ausdrucks von $\tang \gamma \,.\, \sin \Lambda$ durch $\Sigma \,.\, c \,.\, \sin(ft + \beta)$, so wird der Ausdruck von $\tang \gamma \,.\, \cos \Lambda$ gleich $\Sigma \,.\, c \,.\, \cos(ft + \beta)$ seyn; und diese Gröſsen werden auch noch die Ausdrücke von $\gamma \,.\, \sin \Lambda$ und $\gamma \,.\, \cos \Lambda$ seyn. Man erhält so für den Theil von $\int P' dt$, welcher von der Wirkung der Sonne abhängt,

$$\int P' dt = -\tfrac{3}{4} m \,.\, \sin \theta \,.\, \cos 2v + \tfrac{3}{2} m^2 \,.\, \cos \theta \,.\, \Sigma \,.\, \frac{c}{f} \,.\, \cos(ft + \beta).$$

Wir wollen nun die Wirkung des Mondes betrachten. Bezeichnet man seine Masse durch L', und seine mittlere Entfernung von der Erde durch a'; nennt man ferner in Beziehung auf dieses Gestirn m', v', Γ', e', Λ' und γ' die Gröſsen, welche wir in Beziehung auf die Sonne m, v, Γ, e, Λ und γ genannt haben; und setzt man

$$\frac{L'}{a'^3} = \lambda \,.\, m^2,$$

so findet man durch die vorhergehende Analysis [110]):

110) Man hat für die Sonne

$$\int P' dt = -m^2 \,.\, \left(+\frac{3}{4m} \,.\, \sin \theta \,.\, \cos 2v + \tfrac{3}{2} \cos \theta \,.\, \int \gamma \, dt \, \sin \Lambda\right)$$

gefunden, wo m^2 der Kraft der Sonne proportional ist. Für den Mond muſs man statt dieser Kraft die Kraft des Mondes nämlich λm^2 setzen, und im übrigen Theil dieses Integrals m in m', v in v', γ in γ', Λ in Λ' verwandeln, wodurch man den im Text gegebenen Ausdruck erhalten wird.

$$\int P' dt = -\frac{3\lambda . m^2}{4 m'} . \sin\theta . \cos 2v' - \tfrac{3}{2}\lambda m^2 . \cos\theta . \int \gamma' dt . \sin \Lambda'.$$

Die Funktion $\frac{XY}{r^2}$ bringt noch im Integral $\int P' dt$ das Glied

$$\frac{3 m^2 \lambda}{4} . \sin\theta . \int \gamma'^2 dt . \sin 2\Lambda'$$

hervor. Dieses Glied wächst durch die Integration sehr; man sieht aber leicht, daſs es ungeachtet dieses Zuwachses noch unmerklich bleibt, so daſs die merklichen Glieder, welche die Wirkung des Mondes im Integral $\int . P' . dt$ und folglich im Werth von θ hervorbringt, bloſs diejenigen sind, auf welche wir Rücksicht genommen haben. Einige Astronomen haben in diesem Werth eine kleine Ungleichheit eingeführt, welche von der Länge der Erdnähe der Mondsbahn abhängt; man sieht aber aus der vorhergehenden Analysis, daſs diese Ungleichheit nicht Statt findet. Da die mittlere Bewegung der Mondserdnähe ungefähr doppelt so groſs ist, als die Bewegung der Mondsknoten, so könnte ein vom Winkel $2\Lambda' + \Gamma'$ abhängendes Glied, merklich werden, ob es schon in $e'\gamma'^2$ multiplicirt ist; die vorhergehende Analysis zeigt uns aber, daſs es kein ähnliches Glied im Integral $\int . P' . dt$ giebt.

Wir bemerken zur Bestimmung der Funktion $\int \gamma' dt . \sin \Lambda'$, daſs die mittlere Neigung der Mondsbahn gegen die Ebene der Sonnenbahn bey allen Aenderungen der Lage der letztern immer dieselbe bleibt, wie man in der Theorie des Mondes sehen wird; nimmt man aber an, daſs dieser Satellit sich in der Ebene der Sonnenbahn selbst bewegt, so hat man $\gamma' = \gamma$ und $\Lambda' = \Lambda$; man hat folglich in Rücksicht auf die Aenderungen der Sonnenbahn

$$\int \gamma' dt . \sin \Lambda' = -\Sigma . \frac{c}{f} . \cos(ft + \beta).$$

Es sey ferner c' die Tangente der mittlern Neigung der Mondsbahn gegen die Sonnenbahn, und $-f t' - \beta'$ die Länge ihres aufsteigenden Knotens, auf dieser Bahn vom beweglichen Frühlingsnachtgleichepunkt gezählt, so hat man wegen dieser Neigung

$$\int \gamma' dt . \sin \Lambda' = \frac{c'}{f'} . \cos(f't + \beta').$$

Vereinigt man beide Glieder, so erhält man in Beziehung auf den Mond

$\int \gamma' dt$

$$\int \gamma' dt \,.\, \sin \Lambda' = \frac{c'}{f'} \,.\, \cos (f't + \beta') - \Sigma \,.\, \frac{c}{f} \,.\, \cos (ft + \beta),$$

und man erhält durch die vereinigte Wirkung der Sonne und des Mondes

$$\theta = h + \frac{3m}{4n} \,.\, \left(\frac{2C - A - B}{C}\right) \,.\, \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin \theta \,.\, \left(\cos 2v + \frac{\lambda m}{m'} \,.\, \cos 2v'\right) \\ -(1 + \lambda)\, m \,.\, \cos \theta \,.\, \Sigma \,.\, \frac{c}{f} \,.\, \cos (ft + \beta) \\ + \frac{\lambda \,.\, mc'}{f'} \,.\, \cos \theta \,.\, \cos (f't + \beta') \end{array} \right\}.$$

6. Wir wollen nun den Werth von ψ bestimmen, und hierzu die zweyte der Gleichungen (H) des 4ten Satzes vornehmen, nachdem wir ihr folgende Form gegeben haben:

$$d\psi \,.\, \sin \theta = \left(\frac{2C - A - B}{2nC}\right) \,.\, P \,.\, dt.$$

Man hat nach dem vorhergehenden Satz in Beziehung auf die Sonne,

$$Y^2 - Z^2 = \tfrac{1}{2} r_{\prime}^2 \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\gamma^4 \,.\, (1 - \cos 2v) - \tfrac{1}{4} r_{\prime}^2 \,.\, \sin \gamma^2 \,.\, [\cos 2\Lambda - \cos (2v - 2\Lambda)]$$
$$- \tfrac{1}{2} r_{\prime}^2 \,.\, \sin \gamma^2 \,.\, [1 - \cos (2v - 2\Lambda)] + \tfrac{1}{2} r_{\prime}^2 \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\gamma^4 \,.\, [1 - \cos (2v - 4\Lambda)];$$
$$YZ = \tfrac{1}{4} r_{\prime}^2 \,.\, \sin 2\gamma \,.\, \cos \Lambda - \tfrac{1}{2} r_{\prime}^2 \,.\, \sin \gamma \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\gamma^2 \,.\, \cos (2v - \Lambda)$$
$$+ \tfrac{1}{2} r_{\prime}^2 \,.\, \sin \gamma \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 \,.\, \cos (2v - 3\Lambda);$$

man erhält folglich durch die Analysis desselben Satzes, wenn man die Quadrate von c und von γ, und die Gröfsen vernachlässigt, welche nach der Integration unmerklich bleiben,

$$P \,.\, dt = \tfrac{3}{2} m^2 \,.\, dt \,.\, \sin \theta \,.\, \cos \theta - \tfrac{3}{4} m \,.\, \sin \theta \,.\, \cos \theta \,.\, d \,.\, \sin 2v$$
$$+ \tfrac{3}{2} m^2 \,.\, \gamma\, dt \,.\, \cos \Lambda \,.\, (\cos \theta^2 - \sin \theta^2);$$

in welchem Ausdruck man statt $\gamma \,.\, \cos \Lambda$ seinen Werth $\Sigma \,.\, c \,.\, \cos (ft + \beta)$ setzen mufs.

Man wird durch dieselbe Analysis finden, dafs man in Beziehung auf den Mond folgende Gleichung hat:

$$P \,.\, dt = \frac{3\lambda \,.\, m^2 \,.\, dt}{2} \,.\, \sin \theta \,.\, \cos \theta - \frac{3\lambda m^2}{4m'} \,.\, \sin \theta \,.\, \cos \theta \,.\, d \,.\, \sin 2v'$$
$$+ \tfrac{3}{2} \lambda \,.\, m^2 \,.\, (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) \,.\, \Sigma \,.\, c \,.\, \cos (ft + \beta)$$
$$+ \tfrac{3}{2} \lambda \,.\, m^2 \,.\, (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) \,.\, c' \,.\, \cos (f't + \beta');$$

man hat folglich

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3m}{4n}\cdot\left(\frac{2C-A-B}{C}\right)\cdot\left\{\begin{array}{l}(1+\lambda).m.\cos\theta - \frac{\cos\theta}{2.dt}.\left(d.\sin 2v + \frac{\lambda m}{m'}.d.\sin 2v'\right)\\ + (1+\lambda).m.\left(\frac{\cos\theta^2 - \sin\theta^2}{\sin\theta}\right).\Sigma.c.\cos(ft+\beta)\\ + \lambda m.\left(\frac{\cos\theta^2 - \sin\theta^2}{\sin\theta}\right).c'.\cos(f't+\beta')\end{array}\right\}.$$

Wir bemerken, um diese Gleichung zu integriren, daſs der Werth von θ nicht beständig ist, und daſs seine Sekularänderungen im ersten Glied dieses Ausdrucks von $\frac{d\psi}{dt}$ durch die Integration bemerklich werden; nun ist aber der einzige Theil des Werths von θ, der einen etwas groſsen Werth durch eine Reihe von Jahrhunderten erhalten kann, folgender:

$$-\frac{3m^2}{4n}.\left(\frac{2C-A-B}{C}\right).(1+\lambda).\cos\theta.\Sigma.\frac{c}{f}.\cos(ft+\beta);$$

dies ist also der einzige, auf welchen man Rücksicht nehmen muſs. Setzt man daher der Kürze wegen

$$\frac{3m^2}{4n}.\left(\frac{2C-A-B}{C}\right).(1+\lambda).\cos h = l,$$

so verwandelt sich das erste Glied des Ausdrucks von $\frac{d\psi}{dt}$, wenn man die Gröſsen von der Ordnung c^2 vernachlässigt, in [111])

$$l + l^2.\tang h.\Sigma.\frac{c}{f}.\cos(ft+\beta).$$

Es ist unnütz, in den übrigen Gliedern dieses Ausdrucks auf die Veränderlich-

111) Es sey h der Werth, welchen θ ohne die Sekularänderungen beständig haben würde, so ist l der Werth des ersten Gliedes des Ausdrucks von $\frac{d\psi}{dt}$ in der Voraussetzung, daſs sich h oder θ nicht ändert. Die Aenderung von h ist gleich $-l.\Sigma.\frac{c}{f}.\cos(ft+\beta)$, weil man $\cos\theta$ gleich $\cos h$ setzen kann, da beide nur um Gröſsen von der Ordnung c^2 verschieden sind. Der Taylorsche Lehrsatz giebt den Werth von l, wenn sich h in $h - l.\Sigma.\frac{c}{f}.\cos(ft+\beta)$ verwandelt, gleich $l - \left(\frac{dl}{dh}\right).l.\Sigma.\frac{c}{f}.\cos(ft+\beta)$, wo $\left(\frac{dl}{dh}\right) = -l.\tang h$ ist.

keit von θ Rücksicht zu nehmen. Er giebt, wenn man ihn integrirt,

$$\psi = lt + \zeta + \Sigma . \left[\left(\frac{l}{f} - 1\right) . \tang h + \cot h\right] . \frac{lc}{f} . \sin(ft + \beta) - \frac{l}{2m.(1+\lambda)} . \sin 2\nu$$
$$- \frac{l\lambda}{2m'.(1+\lambda)} . \sin 2\nu' + \frac{l\lambda}{(1+\lambda).f'} . \left(\frac{\cos h^2 - \sin h^2}{\sin h . \cos h}\right) . c' . \sin(f't + \beta');$$

wo ζ eine willkührliche beständige Gröſse ist.

Man kann dem Ausdruck von θ des vorhergehenden Satzes folgende Form geben:

$$\theta = h - \Sigma . \frac{lc}{f} . \cos(ft + \beta) + \frac{l\lambda}{(1+\lambda).f'} . c' . \cos(f't + \beta')$$
$$+ \frac{l . \tang h}{2m.(1+\lambda)} . \left(\cos 2\nu + \frac{m}{m'} . \lambda . \cos 2\nu'\right).$$

Vereinigt man diese Werthe von ψ und von θ mit dem folgenden $p = n$, so wird man alles haben, was zur Bestimmung der Bewegungen der Erde um ihren Schwerpunkt nothwendig ist.

7. Die Werthe von ψ und von θ beziehen sich auf eine feste Ebene; wir werden, um diese Werthe in Beziehung auf die wahre Ekliptik zu erhalten, das sphärische Dreyeck betrachten, welches durch die feste Ekliptik, durch die wahre Ekliptik und durch den Aequator gebildet wird. Man sieht leicht, daſs der Unterschied der beiden Bogen, die zwischen dem Aequator und dem aufsteigenden Knoten der Sonnenbahn in diesem Dreyeck enthalten sind, sehr nahe dem Produkt von $\cot \theta$ in die Neigung der Sonnenbahn gegen die feste Ekliptik und in den Sinus der Länge ihres Knotens gleich ist; dieser Unterschied ist folglich gleich $\cot \theta . \Sigma . c . \sin(ft + \beta)$. Nennt man aber ψ' den Abstand des Durchschnitspunkts der wahren Ekliptik und des Aequators vom veränderlichen Anfangspunkt, von welchem man den Winkel ψ auf der festen Ebene zählt: so erhält man sehr nahe $\psi - \psi'$ für diesen Unterschied; man hat folglich

$$\psi - \psi' = \cot \theta . \Sigma . c . \sin(ft + \beta).$$

Hieraus findet man

$$\psi' = lt + \zeta + \Sigma . \left(1 + \frac{l}{f} . \tang h^2\right) . \left(\frac{l-f}{f}\right) . \cot h . c . \sin(ft + \beta)$$
$$+ \frac{l\lambda}{(1+\lambda).f'} . \left(\frac{\cos h^2 - \sin h^2}{\sin h . \cos h}\right) . c' . \sin(f't + \beta') - \frac{l}{2m(1+\lambda)} . \sin 2\nu$$
$$- \frac{l\lambda}{2m'.(1+\lambda)} . \sin 2\nu'.$$

Nennt man ferner θ' die Neigung der wahren Ekliptik gegen den Aequator, so findet man leicht, wenn man das vorhergehende sphärische Dreyeck betrachtet und bemerkt, daſs $\theta' - \theta$ sehr klein ist,

$$\theta' - \theta = \Sigma \, . \, c \, . \cos(ft + \beta);$$

man hat folglich

$$\theta' = h + \Sigma \, . \left(\frac{f-l}{f}\right) . \, c \, . \cos(ft + \beta) + \frac{l\lambda}{(1+\lambda) \, . \, f'} \, . \, c' . \cos(f't + \beta')$$

$$+ \frac{l \, . \operatorname{tang} h}{2m \, . \, (1+\lambda)} \, . \left(\cos 2v + \frac{m}{m'} \, . \, \lambda \, . \cos 2v'\right).$$

Der Theil $\Sigma \, . \left(\frac{f-l}{f}\right) . \, c \, . \cos(ft + \beta)$ dieses Ausdrucks giebt die Sekularänderung der Schiefe der wahren Ekliptik gegen den Aequator. Wäre die Erde sphärisch, so würde die Wirkung der Sonne und des Mondes keine Präcession hervorbringen; man würde folglich $l = 0$ haben, und die Sekularänderung der Schiefe der wahren Ekliptik würde $\Sigma \, . \, c \, . \cos(ft + \beta)$ seyn. Man sieht hieraus, daſs die Wirkung der Sonne und des Mondes auf das Erdsphäroid die Gesetze dieser Aenderung beträchtlich ändert, welche fast Null werden würde, wenn die Bewegung der aus dieser Wirkung entstehenden Präcession sehr schnell in Vergleichung mit der Bewegung der Sonnenbahn wäre; denn diese letztere Bewegung hängt nach Satz 5 von den Winkeln $(f - l) . t$ ab, in welchen der Koeffizient $(f - l)$ in Vergleichung mit f und mit l dann sehr klein seyn würde, so daſs die Funktion $\Sigma \, . \left(\frac{f-l}{f}\right) . c . \cos(ft + \beta)$ fast unmerklich werden würde. Nimmt man für die Massen der Planeten die wahrscheinlichsten Voraussetzungen an, so wird die ganze Gröſse der Aenderung der Schiefe der Ekliptik durch die Wirkung der Sonne und des Mondes auf ein Viertel des Werthes gebracht, welchen sie ohne diese Wirkung haben würde; dieser Unterschied zeigt sich aber erst nach zwey oder drey Jahrhunderten.

Wir wollen, um dies zu zeigen, die Funktion $\Sigma . \left(\frac{f-l}{f}\right) . \, c \, . \cos(ft + \beta)$ nach den Potenzen der Zeit entwickeln. Sie verwandelt sich, wenn man die Glieder, welche eine höhere Potenz der Zeit als die erste enthalten, wegläſst, in

folgende [112]):

$$\Sigma \, . \left(\frac{f-l}{f}\right) . \, c \, . \cos\beta - t \, . \, \Sigma \, . \, (f-l) \, . \, c \, . \sin\beta.$$

Man hat gesehen, daſs der Koeffizient $(f-l)$ für die als sphärisch angenommene Erde und für den Fall, wo sie von der Kugel verschieden ist, derselbe ist; die Sekularänderung der Schiefe der Ekliptik ist also in diesen zwey Fällen für Zeiten in der Nähe der Epoche gleich groſs.

Die Funktion $\Sigma \, . \left(1 + \frac{l}{f} \, . \, \text{tang}\, h^2\right) . \, (l-f) \, . \cot h \, . \, c \, . \cos(ft+\beta)$ des Ausdrucks von $\frac{d\psi'}{dt}$ giebt die Verminderung des mittlern Jahres, wenn man diese Funktion so in Zeit verwandelt, daſs man den ganzen Umkreis für ein Jahr nimmt. Die Abnahme, welche durch die bloſse Bewegung der Ekliptik und dann Statt haben würde, wenn man die Wirkung der Sonne und des Mondes auf das Erdsphäroid auſser Acht läſst, würde

$$\Sigma \, . \, (l-f) \, . \cot h \, . \, c \, . \cos(ft+\beta)$$

seyn; diese Wirkung ändert folglich auch die Gröſse der Abnahme des Jahres, und bringt sie auf ungefähr $\frac{1}{4}$ des Werthes, welchen sie ohne diese Wirkung haben würde.

8. Man betrachte nun den Einfluſs dieser Wirkung auf die Dauer des mittlern Tages. Wir bemerken zuerst, daſs die augenblickliche Umdrehungsaxe sich immer von der dritten Hauptaxe nur um eine unmerkliche Gröſse entfernt. Man hat im 28sten Satz des ersten Buchs gesehen, daſs der Sinus des von diesen beiden Axen eingeschlossenen Winkels gleich $\frac{\sqrt{q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ ist; es ist aber aus dem Vorhergehenden sichtbar, daſs q und r unmerklich sind, und daſs sie nur durch die Integrationen einen merklichen Einfluſs auf die Werthe von θ und von ψ erhalten. Man kann daher stets die augenblickliche

112) Man hat nämlich $\cos(ft+\beta) = \cos\beta \, . \cos ft - \sin\beta \, . \sin ft = \cos\beta\,(1 - \frac{1}{2}f^2t^2 + \ldots) - \sin\beta \, . \, (ft - \frac{1}{6}f^3t^3 \ldots) = \cos\beta - ft \, . \sin\beta$, wenn man die höhern Potenzen von t vernachlässigt.

Umdrehungsaxe der Erde mit ihrer dritten Hauptaxe verwechseln, und ihre Pole der Umwälzung befinden sich immer auf denselben Punkten ihrer Oberfläche.

Wir wollen nun die Umwälzungsbewegung der Erde um ihre dritte Hauptaxe bestimmen. Man sieht leicht, daſs p diese Bewegung ausdrückt, weil es gleich $\frac{d\phi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} \cdot \cos\theta$ ist. Setzt man in den Gleichungen (G) des 4ten Satzes $A = B$, welches dann Statt hat, wenn die Erde ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid ist, so giebt die erste dieser Gleichungen $dp = 0$, und folglich p gleich einer beständigen Gröſse n. Da aber diese Gleichungen in Rücksicht auf die Wirkung des Gestirns L nur Näherungsweise wahr sind, so wollen wir beweisen, daſs die Gleichung $p = n$ auch dann noch Statt hat, wenn man auf alle Glieder, die aus dieser Wirkung entspringen, Rücksicht nimmt.

Nimmt man wie im 2ten Satz die Ebene des Aequators für die Ebene der x und der y an, so verwandelt sich die erste der Gleichungen (D) des 1sten Satzes in

$$dp = \frac{dN}{c},$$

und man hat nach Satz 3.

$$\frac{dN}{dt} = S \cdot dm \cdot \left[y \cdot \left(\frac{dV}{dx}\right) - x \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right)\right].$$

Es sey

$$V' = S \cdot \frac{L \cdot dm}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}},$$

so erhält man nach dem 3ten Satz, und wenn man bemerkt, daſs man durch die Natur des Schwerpunkts $S \cdot x' dm = 0$, $S \cdot y' dm = 0$, $S \cdot z' dm = 0$ hat,

$$\frac{dN}{dt} = y \cdot \left(\frac{dV'}{dx}\right) - x \cdot \left(\frac{dV'}{dy}\right).$$

Da V' das Product von L in die Summe aller Theilchen des Erdsphäroids ist, jedes Theilchen respective durch seinen Abstand von L dividirt; so ist klar, daſs V' für ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid unverändert bleiben wird, wenn z und $\sqrt{x^2 + y^2}$ es sind; dies giebt $\frac{dN}{dt} = 0$, und folglich

$dp = 0$ oder $p = n$. Dies ist also ein sehr weit sich erstreckender Fall, wo die Umdrehungsbewegung der Erde um ihre dritte Hauptaxe genau gleichförmig ist.

Das Glied $\left(\frac{B-A}{C}\right) . qr\,dt$ der ersten der Gleichungen (G) des 4ten Satzes ist im allgemeinen Fall, wenn die drey Hauptmomente der Trägheit ungleich sind, unmerklich, selbst nach der doppelten Integration im Ausdruck von $\int p\,dt$, welcher die Umwälzungsbewegung der Erde nach irgend einer Zeit darstellt. Man hat nämlich im 4ten Satz gesehen, daſs die Werthe von q und r keine sehr kleinen Divisoren enthalten, die nur durch die Integrationen in den Ausdrücken von θ und von ψ eingeführt werden; q und r sind folglich von der Ordnung lc, wenn man nur auf die sehr kleinen Winkel Rücksicht nimmt, die von den Sekularänderungen der Erdbahn abhängen; und das Glied $\left(\frac{B-A}{C}\right) . qr$ ist von der Ordnung $l^2 c^2 . \left(\frac{B-A}{C}\right)$. Die doppelte Integration kann ihm einen Theiler von der Ordnung l^2 geben; es wird alsdann von der Ordnung $\left(\frac{B-A}{C}\right) . c^2$, und folglich unmerklich seyn.

Substituirt man im zweyten Theil der ersten der Gleichungen (G) statt θ, ϕ und ψ ihre durch eine erste Näherung gegebenen Werthe, so wird es hinreichend seyn, bloſs auf die Glieder dieser Werthe Rücksicht zu nehmen, welche sehr kleine Divisoren haben, und welche von der Form $\frac{H.lc}{f} . \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(ft+\beta)$ sind, wo f ein sehr kleiner Koeffizient und mit l von derselben Ordnung ist. Substituirt man aber diese Glieder in den zweyten Theil der ersten der Gleichungen (G), so werden sie daselbst in den Sinus und Kosinus von $2\,\phi$ und in l multiplicirt; sie bleiben folglich auch nach ihrer doppelten Integration im Ausdruck von $\int p\,dt$ unmerklich. Man sieht hieraus, daſs die Umwälzungsbewegung der Erde selbst in dem Fall, wenn die drey Momente A, B, C ungleich sind, immer als gleichförmig angenommen werden kann, oder, welches dasselbe ist, daſs man p immer einer beständigen Gröſse n gleich setzen kann.

9. Hier ist der Ort, die Aenderungen des Tages, welchen die Astronomen den **mittlern Tag** nennen, zu untersuchen. Die mittlere Syderal-Bewegung der Erde in ihrer Bahn ist gleichförmig, wie wir es im zweyten Buch Satz

54. bewiesen haben. Gedenkt man sich nun auf dieser Bahn eine zweyte Sonne, deren Bewegung und Epoche dieselben sind, wie die mittlere Bewegung und die Epoche der mittlern Bewegung der wahren Sonne; gedenkt man sich ferner in der Ebene des Aequators eine dritte Sonne, welche sich so bewegt, daſs sie mit der zweyten Sonne allemal zusammentrifft, wenn diese durch die Frühlingsnachtgleiche geht, und so daſs ihre Entfernung von dieser Nachtgleiche beständig der mittlern Länge der Sonne gleich ist: so wird der Zeitraum zwischen zwey auf einander folgenden Durchgängen dieser dritten Sonne durch den Mittagskreis das seyn, was man mittlern Tag nennt. Wäre die Bewegung der Nachtgleichen auf der wahren Ekliptik gleichförmig, und wäre die Neigung dieser Ekliptik gegen den Aequator beständig, so würde die dritte Sonne sich beständig gleichförmig auf dem Aequator bewegen; die Sekularänderungen der Bewegungen der Nachtgleichen und der Schiefe der Ekliptik bringen in der Bewegung dieser dritten Sonne kleine Sekularungleichheiten hervor, die wir bestimmen wollen.

Man hat im vorhergehenden Satz gesehen, daſs die Geschwindigkeit der Umdrehung der Erde einer beständigen Gröſse n gleich gesetzt werden kann, und daſs ihre augenblickliche Umdrehungsaxe sich immer von der dritten Hauptaxe nur um eine unmerkliche Gröſse entfernt. Es sey daher s die Winkelumdrehungsgeschwindigkeit der dritten Sonne, von welcher wir annehmen, daſs sie sich in der Ebene des Aequators bewegt, und es sey v ihre Entfernung von der Frühlingsnachtgleiche, auf die feste Ekliptik bezogen, so wird $n - s$ die Winkelgeschwindigkeit der ersten Hauptaxe der Erde in Beziehung auf diese Sonne, und man hat

$$d\varphi - dv = (n - s) \,.\, dt.$$

Man hat aber nach dem 4ten Satz

$$d\varphi = n\,dt + d\psi \,.\, \cos\theta,$$

folglich

$$dv = s\,dt + d\psi \,.\, \cos\theta.$$

Es sey v' der Winkelabstand der dritten Sonne von der wahren Nachtgleiche, das heiſst, vom Durchschnittspunkt des Aequators und der Ekliptik. Man sieht leicht aus Satz 7. daſs $v - v'$ gleich $\left(\frac{\psi - \psi'}{\cos\theta}\right)$, und folglich gleich $\frac{\Sigma . c . \sin(ft + \beta)}{\sin\theta}$ ist; dies giebt

dv'

$$dv' = s\,dt + d\psi . \cos\theta - dt . \frac{\Sigma . c . f . \cos(ft + \beta)}{\sin\theta}.$$

Es sey gt die Syderal-Bewegung der zweyten Sonne auf der wahren Ekliptik, so wird $g + \frac{d\psi'}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit in Beziehung auf die wahre Nachtgleiche seyn; man hat aber nach Satz 7.

$$\frac{d\psi'}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \cot\theta . \Sigma . c . f . \cos(ft + \beta);$$

diese Geschwindigkeit ist folglich

$$g + \frac{d\psi}{dt} - \cot\theta . \Sigma . c . f . \cos(ft + \beta);$$

sie muſs gleich $\frac{dv'}{dt}$ seyn; man wird vermittelst dieser Gleichheit s bestimmen können, nämlich

$$s = g + (1 - \cos\theta) . \frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right) . \Sigma . c . f . \cos(ft + \beta).$$

Substituirt man statt $d\psi$ und θ ihre vorhergehenden Werthe, so erhält man

$$s = g + l . (1 - \cos h) - \sin h . \Sigma . \frac{l^2 c}{f} . \cos(ft + \beta)$$
$$+ (1 - \cos h) . \Sigma . \left[\left(\frac{l^2}{f} - l\right) . \text{tang}\, h + l . \cot h\right] . c . \cos(ft + \beta)$$
$$+ \left(\frac{1 - \cos h}{\sin h}\right) . \Sigma . c . f . \cos(ft + \beta).$$

Die Zeit in mittlern Tagen ausgedrückt ist gleich $\int s\,dt$; man erhält folglich für die Gleichung dieser Zeit [113])

$$- \sin h . \Sigma . \frac{l^2 c}{f^2} . \sin(ft + \beta)$$
$$+ (1 - \cos h) . \Sigma . \left[\left(\frac{l^2}{f^2} - \frac{l}{f}\right) \text{tang}\, h + \frac{l}{f} . \cot h\right] . c . \sin(ft + \beta)$$
$$+ \left(\frac{1 - \cos h}{\sin h}\right) . \Sigma . c . \sin(ft + \beta).$$

113) Das Integral enthält auſser den im Text gegebenen Gliedern noch das folgende: $[g + l (1 - \cos h)]\, t$. Da dies Glied aber der Zeit proportional ist, so ändert es bloſs den Werth des mittlern Tages um eine

Da diese Gleichung, so in Zeit verwandelt, dafs man den ganzen Umkreis für einen Tag rechnet, nur einige Minuten in einer Periode von mehrern Millionen Jahren beträgt, so ist ihre Betrachtung den Astronomen unnütz.

10. Die Analysis der vorhergehenden Sätze setzt voraus, dafs die Erde ganz fest ist: sie ist aber gröfstentheils von einem Flüssigen bedeckt, dessen Schwankungen auf die Bewegungen der Erdaxe Einflufs haben können; es ist daher wichtig, diesen Einflufs zu untersuchen und zu sehen, ob die Resultate, welche wir gefunden haben, dadurch nicht geändert werden. Hierzu mufs man die Glieder bestimmen, welche die Wirkung des Meeres auf das von ihm bedeckte Sphäroid zu den Werthen von dN, dN' und dN'' des ersten Satzes hinzusetzt. Man hat im 25sten Satz des ersten Buchs gesehen, dafs man

$$\frac{dN}{dt} = S \,.\, (Q \,.\, x' - P \,.\, y') \,.\, dm;$$

$$\frac{dN'}{dt} = S \,.\, (R \,.\, x' - P \,.\, z') \,.\, dm;$$

$$\frac{dN''}{dt} = S \,.\, (R \,.\, y' - Q \,.\, z') \,.\, dm$$

hat, wo P, Q, R die Kräfte sind, welche auf das Theilchen dm des Erdsphäroids parallel mit den Axen der x', der y und der z und in entgegengesetzter Richtung von ihrem Anfangspunkt wirken. Wir wollen nun sehen, *was für* Gröfsen die Wirkung des Meeres in diesen Ausdrücken hervorbringt. Das Flüssige wirkt auf das Erdsphäroid durch seinen Druck und durch seine Anziehung; wir werden diese beiden Wirkungen einzeln betrachten. Wir werden um mehrerer Einfachheit willen annehmen, dafs die Ebene der x' und der y' die Ebene des Aequators selbst ist, so wie wir dies schon im 3ten Satz gethan haben.

Der Druck und die Anziehung des Meeres bringen im Zustand des Gleichgewichts keine Bewegung in der Umdrehungsaxe der Erde hervor; man mufs daher nur auf die Wirkung der Wasserlage Rücksicht nehmen, welche sich durch die Anziehungen der Sonne und des Mondes über die Fläche des Gleichgewichts erhebt, welche Fläche ohne diese Anziehungen das Meer begränzen

beständige Gröfse und mufs daher hier weggelassen werden, wo man die Ungleichheiten des mittlern Tages aufsucht.

würde. Wir bezeichnen die Dicke dieser Lage durch αy, und wir nehmen die Dichte des Meeres zur Einheit der Dichten, und den mittlern Halbmesser des Erdsphäroids zur Einheit der Entfernungen an: wir werden so die Wirkung einer Wasserlage zu betrachten haben, deren innerer Halbmesser 1, und deren äuſserer Halbmesser $1 + \alpha y$ ist. Nennt man g die Schwere, so wird der Druck einer Säule dieser Lage, das Product von $\alpha g y$ in die Grundfläche dieser Säule seyn; dies wird nach Satz 36. des ersten Buchs der Ueberschuſs des Drucks des Flüssigen im Zustand der Bewegung über seinen Druck im Zustand des Gleichgewichts seyn.

Es sey R der Halbmesser, welcher vom Schwerpunkt der Erde zu dem Punkt der Oberfläche des Sphäroids gezogen worden ist, auf welchen diese Säule drückt; es sey μ der Kosinus des Winkels, welchen der Halbmesser R mit der Umdrehungsaxe macht, und ϖ der Winkel, welchen die durch diese Axe und durch R gehende Ebene mit der Axe der x' macht. Es sey endlich $u = 0$ die Gleichung der Oberfläche des vom Meer bedeckten Sphäroids, wo u eine Funktion der Koordinaten x', y', z' ist, welche die Lage des Punktes, von dem die Rede ist, bestimmen, so hat man

$$x' = R \,.\, \sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \cos \varpi,$$
$$y' = R \,.\, \sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \sin \varpi,$$
$$z' = R \,.\, \mu.$$

Man kann die Grundfläche der kleinen Säule, die wir betrachten, gleich $R^2 \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$ setzen; der Druck dieser Säule ist folglich $\alpha g \,.\, y \,.\, R^2 \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$. Dieser Druck ist senkrecht auf die Oberfläche des Sphäroids; zerlegt man ihn in drey mit den Axen der x', der y' und der z' parallele Kräfte, und nimmt man an, daſs sie diese Koordinaten zu vermehren streben, so erhält man für diese Kräfte nach dem 3ten Satz des ersten Buchs

$$-\frac{\alpha g y \,.\, R^2 \,.\, d\mu \,.\, d\varpi}{f} \,.\, \left(\frac{du}{dx'}\right); \quad -\frac{\alpha g y \,.\, R^2 \,.\, d\mu \,.\, d\varpi}{f} \,.\, \left(\frac{du}{dy'}\right);$$
$$-\frac{\alpha g y \,.\, R^2 \,.\, d\mu \,.\, d\varpi}{f} \,.\, \left(\frac{du}{dz'}\right);$$

wo f gleich $\sqrt{\left(\frac{du}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz'}\right)^2}$ ist. Die Gleichung für die Oberfläche des Sphäroids ist von folgender Form:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + 2q,$$

wo q eine sehr kleine Funktion von x', y', z' ist, deren Quadrat wir vernachlässigen werden; man hat also

$$u = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 - 2q.$$

Dadurch verwandeln sich die Ausdrücke der drey vorhergehenden Kräfte in folgende:

$$-\frac{2\alpha g.\gamma.R^2.d\mu.d\varpi}{f}.\left[x' - \left(\frac{dq}{dx'}\right)\right]; \quad -\frac{2\alpha g.\gamma.R^2.d\mu.d\varpi}{f}.\left[y' - \left(\frac{dq}{dy'}\right)\right];$$

$$-\frac{2\alpha g.\gamma.R^2.d\mu.d\varpi}{f}.\left[z' - \left(\frac{dq}{dz'}\right)\right].$$

Man erhält folglich, wenn man nur auf diese Grössen Rücksicht nimmt:

$$\frac{dN}{dt} = S.\frac{2\alpha g.\gamma.R^2.d\mu.d\varpi}{f}.\left[x'.\left(\frac{dq}{dy'}\right) - y'.\left(\frac{dq}{dx'}\right)\right];$$

$$\frac{dN'}{dt} = S.\frac{2\alpha g.\gamma.R^2.d\mu.d\varpi}{f}.\left[x'.\left(\frac{dq}{dz'}\right) - z'.\left(\frac{dq}{dx'}\right)\right];$$

$$\frac{dN''}{dt} = S.\frac{2\alpha g.\gamma.R^2.d\mu.d\varpi}{f}.\left[y'.\left(\frac{dq}{dz'}\right) - z'.\left(\frac{dq}{dy'}\right)\right].$$

Wir wollen nun die partiellen Differenziale $\left(\frac{dq}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dq}{dy'}\right)$ und $\left(\frac{dq}{dz'}\right)$ auf die veränderlichen Grössen R, μ und ϖ beziehen. Hierzu bemerken wir, dass man

$$R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}; \quad \text{tang}\,\varpi = \frac{y'}{x'}; \quad \mu = \frac{z'}{R}$$

hat; hieraus findet man leicht [114])

114) Da q eine Funktion von x', y', z' und von R, ϖ und μ ist, so hat man folgende zwey Gleichungen

$$dq = \left(\frac{dq}{dx'}\right)dx' + \left(\frac{dq}{dy'}\right)dy' + \left(\frac{dq}{dz'}\right)dz';$$

$$dq = \left(\frac{dq}{dR}\right)dR + \left(\frac{dq}{d\varpi}\right)d\varpi + \left(\frac{dq}{d\mu}\right)d\mu.$$

Man substituire in der letztern statt dR, $d\varpi$, $d\mu$ ihre Werthe, nämlich

$$dR = \frac{x'}{R}dx' + \frac{y'}{R}dy' + \frac{z'}{R}dz'; \quad d\varpi = \frac{\cos\varpi^2}{x'}dy' - \frac{y'.\cos\varpi^2}{x'^2}dx';$$

$$d\mu = \frac{dz'}{R} - \frac{z}{R^2}dR.$$

$$\left(\frac{dq}{dx'}\right) = \sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi.\left(\frac{dq}{dR}\right) - \frac{\sin\varpi}{R.\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{dq}{d\varpi}\right) - \frac{\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi}{R}.\left(\frac{dq}{d\mu}\right);$$

$$\left(\frac{dq}{dy'}\right) = \sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.\left(\frac{dq}{dR}\right) + \frac{\cos\varpi}{R.\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{dq}{d\varpi}\right) - \frac{\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi}{R}.\left(\frac{dq}{d\mu}\right);$$

$$\left(\frac{dq}{dz'}\right) = \mu.\left(\frac{dq}{dR}\right) + \left(\frac{1-\mu^2}{R}\right).\left(\frac{dq}{d\mu}\right).$$

Man findet so folgende Gleichungen, wenn man bemerkt, daſs man in den Werthen von $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$, $R = 1$ und $f = 2$ setzen kann, weil man das Quadrat von q vernachläſsigt,

$$\frac{dN}{dt} = S.agy.d\mu.d\varpi.\left(\frac{dq}{d\varpi}\right);$$

$$\frac{dN'}{dt} = S.agy.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi.\left(\frac{dq}{d\mu}\right) + \frac{\mu.\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{dq}{d\varpi}\right)\right];$$

$$\frac{dN''}{dt} = S.agy.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.\left(\frac{dq}{d\mu}\right) - \frac{\mu.\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{dq}{d\varpi}\right)\right].$$

Wir werden nun die Werthe bestimmen, welche $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ und $\frac{dN''}{dt}$ in Beziehung auf die Anziehung einer Wasserlage auf das Erdsphäroid erhalten. Es ist klar, daſs wenn dies Sphäroid und das Meer, von welchem es bedeckt wird, eine feste Masse bildeten, daſs es in dieser Masse keine Bewegung, die aus der

Hier ist $\frac{x'}{R} = \sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi$ und $\frac{y'}{R} = \sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi$; $\frac{z'}{R} = \mu$, folglich

$$dR = \sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi.dx' + \sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.dy' + \mu.dz';$$

$$d\mu = -\frac{\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi}{R^2}.dx' - \frac{\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi}{R^2}.dy' + \left(\frac{1}{R} - \frac{\mu}{R^2}\right).dz';$$

$$d\varpi = \frac{\cos\varpi}{R.\sqrt{1-\mu^2}}.dy' - \frac{\sin\varpi}{R.\sqrt{1-\mu^2}}.dx'.$$

Durch diese Substitution wird die letztere der beiden obigen Gleichungen folgende Form erhalten:

$$dq = A'dx' + B'dy' + C'dz';$$

vergleicht man sie mit der erstern der beiden Gleichungen, so erhält man

$$\left(\frac{dq}{dx'}\right) = A'; \quad \left(\frac{dq}{dy'}\right) = B'; \quad \left(\frac{dq}{dz'}\right) = C'.$$

Anziehung aller ihrer Theile entsteht, geben würde. Addirt man daher die Wirkung der Anziehung der Wasserlage auf das Meer zur Wirkung ihrer Anziehung auf das Erdsphäroid, so wird diese Summe der Wirkung der Anziehung der ganzen Erde auf die Wasserlage gleich und entgegengesetzt seyn. Es folgt hieraus, daſs die Wirkung der Anziehung dieser Lage auf das Erdsphäroid, der Summe der Wirkungen der Anziehung der ganzen Erde auf die Lage und der Anziehung der Lage auf das Meer gleich ist, wenn man diese Summe mit entgegengesetzten Zeichen nimmt.

Die aus der Anziehung der ganzen Erde auf die kleine Säule $\alpha y . d\mu . d\varpi$ der Wasserlage, und aus der Mittelpunktsfliehkraft zusammengesetzte Kraft ist auf der Gleichgewichtsfläche des Meeres senkrecht; man erhält folglich die Anziehung der ganzen Erde auf diese Säule, wenn man sich vorstellt, daſs diese zusammengesetzte Kraft und die mit entgegengesetztem Zeichen genommene Mittelpunktsfliehkraft auf sie wirkt. Die erste dieser beiden Kräfte ist die Schwere g in die Masse des Theilchens $\alpha \gamma . d\mu . d\varpi$ multiplicirt; nimmt man daher an, daſs die Gleichung der Gleichgewichtsfläche des Meeres

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + 2q'$$

ist, so erhält man nach dem Vorhergehenden die aus dieser Kraft entstehenden Theile von $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ und $\frac{dN''}{dt}$, wenn man in den vorhergehenden Ausdrücken dieser Gröſsen q in q' verwandelt. Man muſs sie ferner, wie wir so eben gesagt haben, mit entgegengesetzten Zeichen nehmen; setzt man sie so zu den vorhergehenden Ausdrücken und bemerkt man, daſs $q' - q$ die Tiefe des Meeres ausdrückt, die wir sehr klein annehmen und durch γ bezeichnen werden, so erhält man

$$\frac{dN}{dt} = - S . \alpha g y . d\mu . d\varpi . \left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right);$$

$$\frac{dN'}{dt} = - S . \alpha g y . d\mu . d\varpi . \left[\sqrt{1-\mu^2} . \cos\varpi . \left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right) + \frac{\mu . \sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} . \left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\right];$$

$$\frac{dN''}{dt} = - S . \alpha g y . d\mu . d\varpi . \left[\sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi . \left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right) - \frac{\mu . \cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} . \left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\right].$$

Jetzt muſs man die Wirkung der mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Mittelpunktsfliehkraft betrachten und sie von diesen Werthen abziehen, welches eben

so viel ist, als die Wirkung der Mittelpunktsfliehkraft zu ihnen addiren. Bezeichnet man die Geschwindigkeit der Umwälzung der Erde mit n, so wird die Mittelpunktsfliehkraft der kleinen Wassersäule $\alpha y \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$ gleich $n^2 \,.\, \sqrt{1 - \mu^2}$ seyn; multiplicirt man sie durch die Masse der Säule, so erhält man $\alpha n^2 y \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1 - \mu^2}$ für die ganze Kraft. Diese Kraft ist nach dem Halbmesser des Erdparallelkreises gerichtet; zerlegt man sie in zwey, die eine parallel mit x', die andere mit y', so findet man $\alpha n^2 y \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \cos\varpi$ für die erste und $\alpha n^2 y \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \sin\varpi$ für die zweyte; man erhält folglich für die aus der Mittelpunktsfliehkraft entstehenden Theile von $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$,

$$\frac{dN}{dt} = 0;$$

$$\frac{dN'}{dt} = - S \,.\, \alpha n^2 y \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \cos\varpi;$$

$$\frac{dN''}{dt} = - S \,.\, \alpha n^2 y \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \mu \,.\, \sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \sin\varpi.$$

Wir haben nur noch die Wirkung der Anziehung der Wasserlage auf das Meer zu bestimmen. Wir bezeichnen hierzu die Summe der Theilchen dieser Lage, jedes durch seinen Abstand von einem Theilchen des Meeres dividirt, durch αU; man kann diesen Abstand sowohl durch die Gröfsen R, μ und ϖ, als auch durch die Koordinaten x', y', z' bestimmen; so werden $\alpha \,.\, \left(\frac{dU}{dx'}\right)$, $\alpha \,.\, \left(\frac{dU}{dy'}\right)$, $\alpha \,.\, \left(\frac{dU}{dz'}\right)$ die mit diesen Koordinaten parallelen Anziehungen der Lage auf dieses Theilchen seyn, und diese Anziehungen werden sie zu vergröfsern streben. Die Masse des Theilchens ist $R^2 \,.\, dR \,.\, d\mu \,.\, d\varpi$; man erhält folglich für die aus der Anziehung der Wasserlage auf das Meer entstehenden Theile von $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$,

$$S \,.\, \alpha R^2 \,.\, dR \,.\, d\mu \,.\, d\varpi \,.\, \left[x' \,.\, \left(\frac{dU}{dy'}\right) - y' \,.\, \left(\frac{dU}{dx'}\right) \right];$$

$$S.\alpha R^2.dR.d\mu.d\varpi.\left[x'.\left(\frac{dU}{dz'}\right)-z'.\left(\frac{dU}{dx'}\right)\right];$$

$$S.\alpha R^2.dR.d\mu.d\varpi.\left[y'.\left(\frac{dU}{dz'}\right)-z'.\left(\frac{dU}{dy'}\right)\right].$$

Wir bemerken, um diese Formeln in Beziehung auf R zu integriren, daſs man wegen der als sehr klein angenommenen Tiefe des Meeres, $R=1$ und $\int R^2.dR = \gamma$ setzen kann [115]). Verwandelt man ferner die partiellen Differenziale $\left(\frac{dU}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dU}{dy'}\right)$ und $\left(\frac{dU}{dz'}\right)$ in andere, welche auf die veränderlichen Gröſsen R, ϖ und μ sich beziehen, so werden die vorhergehenden mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Funktionen folgende geben

$$-S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\left(\frac{dU}{d\varpi}\right);$$

$$-S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi.\left(\frac{dU}{d\mu}\right)+\frac{\mu.\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{dU}{d\varpi}\right)\right];$$

$$-S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.\left(\frac{dU}{d\mu}\right)-\frac{\mu.\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{dU}{d\varpi}\right)\right].$$

Fügt man diese Werthe den oben gefundenen partiellen Ausdrücken von $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ und $\frac{dN''}{dt}$ bey, so erhält man für die ganzen Ausdrücke dieser Gröſsen in Beziehung auf die Anziehung und den Druck des Meeres auf das Erdsphäroid

$$\frac{dN}{dt}=-S.\alpha g\gamma.d\mu.d\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)-S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\left(\frac{dU}{d\varpi}\right);$$

$\frac{dN'}{dt}$

115) Es ist nämlich $\int R^2\,dR = \frac{1}{3}R^3$; und da man dies Integral von $R=1$ bis $R=1+\gamma$ nehmen muſs, so erhält man

$$\int R^2\,dR = \tfrac{1}{3}(1+\gamma)^3-\tfrac{1}{3}=\gamma,$$

weil man die höhern Potenzen von γ vernachlässigt.

$$\frac{dN'}{dt} = - S.\alpha g y.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right) + \frac{\mu.\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\right]$$

$$- S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi.\left(\frac{dU}{d\mu}\right) + \frac{\mu.\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{dU}{d\varpi}\right)\right]$$

$$- S.\alpha n^2\gamma.d\mu.d\varpi.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi;$$

$$\frac{dN''}{dt} = - S.\alpha g y.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right) - \frac{\mu.\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\right]$$

$$- S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.\left(\frac{dU}{d\mu}\right) - \frac{\mu.\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{dU}{d\varpi}\right)\right]$$

$$- S.\alpha n^2\gamma.d\mu.d\varpi.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.$$

Die vorhergehenden Integrale müssen von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$, und von $\varpi = 0$ bis ϖ gleich vier rechten Winkeln genommen werden. Integrirt man in Beziehung auf ϖ, so ist

$$S.\alpha g y.d\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right) = \alpha g.\gamma y - S.\alpha g\gamma.d\varpi.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right) + \text{Beständige Größe.}$$

Es ist aber klar, daſs die Funktion $\alpha g y\gamma$ an den beiden Grenzen des Integrals, wo $\varpi = 0$ und ϖ gleich vier rechten Winkeln ist, gleich groſs ist, weil diese beiden Grenzen zu demselben Punkt der Oberfläche des Sphäroids gehören; man hat daher $\alpha g.\gamma y$ + Best. Gröſse $= 0$, und folglich

$$S.\alpha g y.d\mu.d\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right) = - S.\alpha g\gamma.d\mu.d\varpi.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right).$$

Integrirt man in Beziehung auf μ, so erhält man

$$S.\alpha g y.d\mu.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi = \alpha g.y\gamma.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi + S.\alpha g.y\gamma.\frac{\mu.d\mu.\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

$$- S.\alpha g\gamma.d\mu.\left(\frac{dy}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi + \text{Best.Gr.}$$

Das Integral muſs von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$ genommen werden; nun sind aber y und γ nie unendlich, und da die Wurzelgröſse $\sqrt{1-\mu^2}$ an diesen Grenzen gleich Null ist, so hat man an denselben Grenzen

$$\alpha g y\gamma.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi + \text{Beständige Größe} = 0,$$

und folglich

$$S.\alpha g y.d\mu.d\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi = S.\alpha g.\gamma\gamma.\frac{\mu.d\mu.d\varpi \sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}$$
$$-S.\alpha g\gamma.d\mu.d\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right).\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.$$

Man findet ferner, wenn man in Beziehung auf ϖ integrirt

$$S.\alpha g\gamma.d\mu.d\varpi.\frac{\mu.\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right) = -S.\alpha g\gamma.d\mu.d\varpi.\frac{\mu.\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)$$
$$+S.\alpha g.\gamma\gamma.d\mu.d\varpi.\frac{\mu.\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Man hat folglich

$$S.\alpha g\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right)-\frac{\mu.\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\right]$$
$$=-S.\alpha g\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right)-\frac{\mu.\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\right].$$

Man findet eben so

$$S.\alpha g\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right)+\frac{\mu.\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\right]$$
$$=-S.\alpha g\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)+\frac{\mu.\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)\right].$$

Die vorhergehenden Ausdrücke von $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$, $\frac{dN''}{dt}$ verwandeln sich so in folgende:

$$\frac{dN}{dt} = S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\left[g.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)-\left(\frac{dU}{d\varpi}\right)\right];$$

$$\frac{dN'}{dt} = S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi.\left[g.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right)-\left(\frac{dU}{d\mu}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\mu.\sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left[g.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)-\left(\frac{dU}{d\varpi}\right)\right]\right]-S.\alpha n^2\gamma.d\mu.d\varpi.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\cos\varpi;$$

$$\frac{dN''}{dt} = S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\left[\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.\left[g.\left(\frac{d\gamma}{d\mu}\right)-\left(\frac{dU}{d\mu}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{\mu.\cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}}.\left[g.\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)-\left(\frac{dU}{d\varpi}\right)\right]\right]-S.\alpha n^2\gamma.d\mu.d\varpi.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin\varpi.$$

11. Wir wollen nun den Einfluſs dieser Gröſsen auf die Bewegungen des Erdsphäroids um seinen Schwerpunkt bestimmen. Wir nehmen hierzu die Gleichungen (D′) des ersten Satzes wieder vor. Vernachlässigt man die sehr kleinen Gröſsen $\left(\frac{B-A}{C}\right).q.r.dt$, $\left(\frac{C-B}{A}\right).rp.dt$ und $\left(\frac{A-C}{B}\right).pq.dt$; bemerkt man ferner daſs man $\phi = 0$ und $\theta = 0$ hat, weil man die Axen der x', der y' und der z' für die Hauptaxen angenommen hat, so findet man

$$dp = \frac{dN}{C}; \qquad dq = \frac{dN''}{A}; \qquad dr = -\frac{dN'}{B}.$$

Man sieht erstlich, daſs die von sehr kleinen Winkeln abhängenden Glieder, welche dN enthält, durch die Integration sehr groſse Glieder in dem Werth von p hervorbringen können; man muſs daher auf diese Glieder Rücksicht nehmen.

Man hat im 4ten Satz gesehen, daſs

$$\frac{d\theta}{dt} = r.\sin\phi - q.\cos\phi;$$

$$\frac{d\psi}{dt}.\sin\theta = r.\cos\phi + q.\sin\phi$$

ist; setzt man daher

$$\frac{d\theta}{dt} = x''; \qquad \frac{d\psi.\sin\theta}{dt} = y'',$$

und bemerkt man, daſs $d\phi$ sehr nahe gleich ndt ist, so erhält man

$$dx'' = dr.\sin\phi - dq.\cos\phi + ny''.dt;$$

$$dy'' = dr.\cos\phi + dq.\sin\phi - nx''.dt.$$

Substituirt man statt dq und dr ihre vorhergehenden Werthe, in welchen man A und B in C verwandeln kann, so findet man

$$dx'' = -\frac{dN'}{C}.\sin\phi - \frac{dN''}{C}.\cos\phi + ny''.dt;$$

$$dy'' = -\frac{dN'}{C}.\cos\phi + \frac{dN''}{C}.\sin\phi - nx''.dt.$$

Es sey $H.dt.\cos(it+\varepsilon)$ irgend ein Glied von $\frac{dN'.\sin\phi + dN''.\cos\phi}{C}$ und $H'.dt.\sin(it+\varepsilon)$ das entsprechende Glied von $\frac{dN'.\cos\phi - dN''.\sin\phi}{C}$; so

werden die entsprechenden zugehörenden Glieder von x'' und y'' folgende seyn [116]):

$$y'' = \left(\frac{iH' - nH}{i^2 - n^2}\right) . \cos(it + \varepsilon); \qquad x'' = \left(\frac{nH' - iH}{i^2 - n^2}\right) . \sin(it + \varepsilon).$$

Die Glieder, welche von sehr kleinen Winkeln abhängen oder diejenigen, in welchen i sehr klein ist, sind auch noch in den Werthen von x'' und von y'' wenig beträchtlich; die Integration macht sie aber in den Werthen von θ und von ψ sehr beträchtlich; und man hat im 4ten Satz gesehen, daſs die Präcession und Nutation von ähnlichen Gliedern abhängen; es ist daher wesentlich, auf sie Rücksicht zu nehmen. Diese Glieder werden durch diejenigen Glieder von dN' und dN'' hervorgebracht, welche von Winkeln abhängen, die sehr wenig von nt verschieden sind; denn wenn man sie in $\sin\Phi$ und in $\cos\Phi$ multiplicirt, so entspringen daraus Glieder, die von sehr kleinen Winkeln abhängen; man muſs daher eine vorzügliche Aufmerksamkeit auf diese Glieder verwenden.

Die Glieder, in welchen i sehr wenig von n verschieden ist, werden in den Werthen von x'' und von y'' sehr groſs, weil der Theiler $i^2 - n^2$ dann sehr klein ist. Diese Glieder entspringen aus den Gliedern von dN' und von dN'', die sehr kleine Winkel enthalten, und auf welche man deswegen Rücksicht nehmen muſs. Sie können auch noch durch die Glieder von dN' und von dN'' hervorgebracht werden, welche von Winkeln abhängen, die sehr wenig von $2nt$ verschieden sind. Denn wenn dN' z. B. das Glied $L . dt . \sin(2nt + \nu t + \varepsilon)$ enthält, wo ν sehr klein ist, so entsteht daraus in der Funktion

116) Die im Text angenommenen Voraussetzungen geben

$$dx'' = ny''dt - H dt . \cos(it + \varepsilon); \qquad dy'' = - n x'' dt - H' dt . \sin(it + \varepsilon).$$

Differenziirt man von neuem, so erhält man

$$d^2x'' = n dy'' dt + iH . dt^2 . \sin(it + \varepsilon); \qquad d^2y'' = - n dx'' dt - iH' dt^2 . \cos(it + \varepsilon).$$

Substituirt man hier statt dx'' und dy'' ihre Werthe, so findet man

$$d^2x'' = - n^2 x'' dt^2 - (nH' - iH)\, dt^2 . \sin(it + \varepsilon);$$
$$d^2y'' = - n^2 y'' dt^2 + (nH - iH')\, dt^2 . \cos(it + \varepsilon).$$

Man sieht hieraus, daſs x von der Form $W . \sin(it + \varepsilon)$ ist; dieser Werth von x'' in die obige Gleichung gesetzt, giebt, wenn man mit dt^2 dividirt,

$$- i^2 W . \sin(it + \varepsilon) = - n^2 W . \sin(it + \varepsilon) - (nH' - iH) . \sin(it + \varepsilon).$$

Hieraus folgt $W = \frac{nH' - iH}{i^2 - n^2}$ und $x'' = \frac{nH' - iH}{i^2 - n^2} . \sin(it + \varepsilon)$. Man findet eben so den Werth von y'' aus der Gleichung für d^2y''.

$\frac{dN'.\sin\Phi + dN''.\cos\Phi}{C}$ das Glied $\frac{L}{2C}.dt.\cos(2nt - \Phi + vt + \varepsilon)$ und in der Funktion $\frac{dN'.\cos\Phi - dN''.\sin\Phi}{C}$ das Glied $\frac{L}{2C}.dt.\sin(2nt - \Phi + vt + \varepsilon)$. Da aber in diesem Fall H' gleich H ist, so verliehren die entsprechenden Ausdrücke von x'' und y'' ihren sehr kleinen Theiler $i - n$ und werden folglich unmerklich. Man würde eben so sehen, daſs ein Glied in dN'' von der Form $L.dt.\cos(2nt + vt + \varepsilon)$ in x'' und y'' nur unmerkliche Gröſsen hervorbringen würde. Man muſs daher in den Werthen von dN, dN' und dN'' nur auf die Glieder Rücksicht nehmen, welche von sehr kleinen Winkeln oder von Winkeln abhängen, die sehr wenig von nt verschieden sind.

Wir müssen, um diese verschiedenen Glieder zu entwickeln, die Differenzialgleichungen der Bewegung des Meeres ins Gedächtniſs zurückrufen. Man betrachte ein Theilchen ihrer Oberfläche, das im Zustand des Gleichgewichts durch die Koordinaten μ und ϖ bestimmt wird; man gedenke sich, daſs es im Zustand der Bewegung um die Gröſse αy über die Fläche des Gleichgewichts erhoben ist, daſs seine Breite um die Gröſse αu vermindert wird, und daſs der Winkel ϖ um αv vermehrt wird. Man nenne ferner v die Abweichung des Gestirns L, Π seine gerade Aufsteigung, und $r_{\prime}$ seine Entfernung vom Schwerpunkt der Erde. Es sey

$$\alpha f = \frac{3L}{2r_{\prime}^3}.[\cos\theta.\sin v + \sin\theta.\cos v.\cos(\Pi - \Phi - \varpi)]^2,$$

so hat man nach dem 3ten und 4ten Satz des vierten Buchs die drey folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y &= \left[\frac{d.(\gamma u.\sqrt{1-\mu^2})}{d\mu}\right] - \left(\frac{d.\gamma v}{d\varpi}\right); \\ \frac{d^2u}{dt^2} - 2n.\left(\frac{dv}{dt}\right).\mu.\sqrt{1-\mu^2} &= \left[g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right) - \left(\frac{dU}{d\mu}\right) - \left(\frac{df}{d\mu}\right)\right].\sqrt{1-\mu^2} \\ \frac{d^2v}{dt^2} + 2n.\left(\frac{du}{dt}\right).\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} &= -\left\{\frac{\left[g.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right) - \left(\frac{dU}{d\varpi}\right) - \left(\frac{df}{d\varpi}\right)\right]}{1-\mu^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Betrachtet man nur die Winkel, die mit äuſserster Langsamkeit wachsen, oder die von Φ unabhängig sind; so ist sichtbar, daſs der Theil von f, welcher sich

auf diese Winkel bezieht, von ϖ unabhängig ist; die Theile von y und von U die sich auf dieselben Winkel beziehen, werden daher selbst von ϖ unabhängig seyn, so daſs man, wenn man nur diese Glieder betrachtet,

$$\left(\frac{df}{d\varpi}\right) = 0; \quad \left(\frac{dy}{d\varpi}\right) = 0; \quad \left(\frac{dU}{d\varpi}\right) = 0$$

hat, und folglich

$$\frac{dN}{dt} = 0;$$

$$\frac{dN'}{dt}.\sin\phi + \frac{dN''}{dt}.\cos\phi = S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi).\left[g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right) - \left(\frac{dU}{d\mu}\right)\right];$$

$$\frac{dN'}{dt}.\cos\phi - \frac{dN''}{dt}.\sin\phi = S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\sqrt{1-\mu^2}.\cos(\phi+\varpi).\left[g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right) - \left(\frac{dU}{d\mu}\right)\right].$$

Man hat im 6ten Satze des vierten Buchs gesehen, daſs man für Glieder, die mit äuſserst groſser Langsamkeit wachsen, sehr nahe folgende Gleichung annehmen kann:

$$0 = g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right) - \left(\frac{dU}{d\mu}\right) - \left(\frac{df}{d\mu}\right).$$

Diese Gleichung ist um desto genauer, je langsamer sich diese Glieder ändern und folglich je gröſsern Einfluſs sie auf die Bewegungen der Erdaxe haben. Man hat daher in Beziehung auf diese Glieder

$$\frac{dN'.\sin\phi + dN''.\cos\phi}{dt} = S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi).\left(\frac{df}{d\mu}\right);$$

$$\frac{dN'.\cos\phi - dN''.\sin\phi}{dt} = S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\sqrt{1-\mu^2}.\cos(\phi+\varpi).\left(\frac{df}{d\mu}\right).$$

Wir werden nun die Theile von $\frac{dN'}{dt}$ und von $\frac{dN''}{dt}$ betrachten, welche von Winkeln abhängen, die sehr wenig von nt verschieden sind. Man hat

$$\begin{aligned}\frac{dN'.\sin\phi + dN''.\cos\phi}{dt} = {} & S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi).\left[g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right) - \left(\frac{dU}{d\mu}\right)\right] \\ & - S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.\cos(\phi+\varpi).\left[g.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right) - \left(\frac{dU}{d\varpi}\right)\right] \\ & - S.\alpha n^2\gamma.d\mu.d\varpi.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi).\end{aligned}$$

Die erste der Gleichungen (Γ) giebt

$$S.\alpha n^2 y.d\mu.d\varpi.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi)$$

$$= S.\alpha n^2.d\mu.d\varpi.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi).\left[\left(\frac{d.\gamma u.\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right)-\left(\frac{d.\gamma v}{d\varpi}\right)\right].$$

Integrirt man von $\mu = -1$ bis $\mu = 1$, so hat man [117])

$$S.\mu.d\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\left(\frac{d.\gamma u.\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right) = -S.\gamma u.d\mu.(1-2\mu^2).$$

Man hat eben so, wenn man von $\varpi = 0$ bis ϖ gleich vier rechten Winkeln integrirt [118]),

$$S.d\varpi.\sin(\phi+\varpi).\left(\frac{d.\gamma v}{d\varpi}\right) = -S.\gamma v.d\varpi.\cos(\phi+\varpi),$$

folglich

$$S.\alpha n^2 y.d\mu.d\varpi.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi) = -S.\alpha n^2.\gamma u.d\mu.d\varpi.(1-2\mu^2).\sin(\phi+\varpi)$$
$$+ S.\alpha n^2.\gamma v.d\mu.d\varpi.\mu.\sqrt{1-\mu^2}.\cos(\phi+\varpi).$$

Man kann annehmen, daſs γu in eine Reihe Glieder von der Form $H.\cos(it+s\varpi+\varepsilon)$ entwickelt ist, wo H eine Funktion von μ allein, und s eine ganze positive oder negative Zahl oder gleich Null, aber kein Bruch ist, weil γu denselben Werth hat, wenn $\varpi = 0$ und wenn ϖ gleich vier rechten Winkeln ist. Man kann eben so annehmen, daſs γv in eine Reihe entsprechender Glieder von der Form $M.\sin(it+s\varpi+\varepsilon)$ entwickelt ist, wo M eine Funktion von μ allein ist. Es seyen H' und M' die Werthe von H und von M, welche zu demselben Bogen it und zu dem Werth von s gleich 1 gehören. Da man annimmt, daſs der Koeffizient i sehr wenig von n verschieden

117) Es ist, wenn man theilweise integrirt, $S.\sqrt{\mu^2-\mu^4}.d\mu.\left(\frac{d.\gamma u\sqrt{1-\mu^2}}{d\mu}\right)$ $= \sqrt{\mu^2-\mu^4}.\gamma u.\sqrt{1-\mu^2} - S.\gamma u.\sqrt{1-\mu^2}.d.\sqrt{\mu^2-\mu^4}$, wo das erste Glied an den beiden Grenzen $\mu = 1$ und $\mu = -1$ gleich Null ist, und wo das letzte Glied, wenn man wirklich differenziirt, gleich $-S.\gamma u.d\mu.(1-2\mu^2)$ ist.

118) Es ist wie in der vorhergehenden Anmerkung $S.\sin(\varphi+\varpi).d\varpi.\left(\frac{d.\gamma v}{d\varpi}\right)$ $= \gamma v.\sin(\varphi+\varpi) - S.\gamma v.d.[\sin(\varphi+\varpi)] = \gamma v.\sin(\varphi+\varpi) - S.d\varpi.\gamma v.\cos(\varphi+\varpi)$. Das erste Glied ist für $\varpi = 0$ und für $\varpi = 360°$, gleich $\gamma v.\sin\varphi$, und der Unterschied dieser beiden Werthe ist folglich gleich Null.

ist, so wächst der Winkel $it - \phi + \varepsilon$ mit äuſserst groſser Langsamkeit; behält man daher nur die von diesem Winkel abhängenden Glieder, so sieht man, daſs die Glieder von γu und von γv, in welchen s von der Einheit verschieden ist, den Winkel ϖ in den vorhergehenden Integralen enthalten, und folglich durch die Integration in Beziehung auf ϖ verschwinden. Man hat also [119])

$$S\,.\,\alpha n^2 y\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\,\mu\,.\,\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\sin(\phi+\varpi)$$
$$= \alpha n^2\,.\,\pi\,.\,\sin(it+\varepsilon-\phi)\,.\,S\,.\,d\mu\,.\,[(1-2\mu^2)\,.\,H' + \mu\,.\,\sqrt{1-\mu^2}\,.\,M'].$$

Multiplicirt man die zweyte der Gleichungen (I) in $\alpha\gamma\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\,\sin(\phi+\varpi)$ und die dritte in $\alpha\gamma\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\,\mu\,.\,\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\cos(\phi+\varpi)$, so ist ihre Summe

$$S\,.\,\alpha\gamma\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right).\,\sin(\phi+\varpi) + 2n\mu^2\,.\left(\frac{du}{dt}\right).\,\cos(\phi+\varpi)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right).\mu.\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\cos(\phi+\varpi) - 2n.\left(\frac{dv}{dt}\right).\mu.\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\sin(\phi+\varpi)\right]$$
$$= S.\alpha\gamma.\,d\mu.\,d\varpi.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi).\left[g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right) - \left(\frac{dU}{d\mu}\right) - \left(\frac{df}{d\mu}\right)\right]$$
$$- S.\alpha\gamma.d\mu.\,d\varpi.\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.\cos(\phi+\varpi).\left[g.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right) - \left(\frac{dU}{d\varpi}\right) - \left(\frac{df}{d\varpi}\right)\right]. \quad (O)$$

Substi-

119) Substituirt man statt γu und γv die angenommenen Werthe, so findet man

$$S\,.\,\alpha n^2 y\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\,\mu\,.\,\sqrt{1-\mu^2}\,.\sin(\varphi+\varpi) = S\,.\,\alpha n^2\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\,(1-2\mu^2)\,.\,H\,.\cos(it+s\varpi+\iota)\,.\sin(\varphi+\varpi)$$
$$+ S\alpha n^2\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\,\sqrt{1-\mu^2}\,.\,M\,.\,\sin(it+s\varpi+\iota)\,.\,\cos(\varphi+\varpi)$$
$$= +\tfrac{1}{2}\alpha n^2 S\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\,[M.\sqrt{1-\mu^2} - H\,.\,(1-2\mu^2)]\,.\,\sin[it+\varphi+\iota+(s+1)\varpi]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\alpha n^2 S\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\,[M.\sqrt{1-\mu^2} + H\,.\,(1-2\mu^2)]\,.\,\sin[it-\varphi+\iota+(s-1)\varpi].$$

Integrirt man diese Ausdrücke in Beziehung auf ϖ, so muſs man M und H als beständige Gröſsen ansehen, weil sie Funktionen von μ allein sind; diese Integration verwandelt die Sinus der vorhergehenden Ausdrücke in Kosinus. Nun ist aber der Werth von $\cos[it \pm \varphi + \iota + (s \pm 1)\varpi]$ für $\varpi = 0$, und für $\varpi = 360^\circ$ derselbe, nämlich $\cos(it \pm \varphi + \iota)$, folglich haben alle Glieder des vorhergehenden Integrals, welche den Winkel ϖ enthalten, an den beiden Grenzen des Integrals einerley Werth, und sie heben sich also gegenseitig auf. Es bleiben daher nur diejenigen Glieder übrig, wo $s = 1$ ist; dann ist $H = H'$ und $M = M'$, und die vorhergehende Gleichung giebt

$$S\alpha n^2 y\,.\,d\mu.d\varpi\,.\,\mu\,.\,\sqrt{1-\mu^2}\,.\sin(\varphi+\varpi) = \tfrac{1}{2}\alpha n^2.S.d\mu\,.\,d\varpi\,.\,[M'.\sqrt{1-\mu^2} + H'.(1-2\mu^2)].\sin(it-\varphi+\iota).$$

Integrirt man den zweyten Theil dieser Gleichung in Beziehung auf ϖ, so erhält man

$\tfrac{1}{2}\alpha n^2\varpi.S.\,d\mu.\,[M'.\sqrt{1-\mu^2} + H'.(1-2\mu^2)]\,.\,\sin(it-\varphi+\iota)$. Dies Integral ist für $\varpi = 0$, auch gleich Null, und für $\varpi = 360^\circ$ oder $= 2\pi$, gleich $\alpha n^2\pi.S.d\mu.[M'.\sqrt{1-\mu^2} + H'.(1-2\mu^2)].\sin(it-\varphi+\iota)$.

Dies

Substituirt man statt γu und γv alle ihre Glieder, die sich auf den Winkel it beziehen und bemerkt man, daſs man angenommen hat, daſs i sehr wenig von n verschieden ist, so verwandelt sich der erste Theil dieser Gleichung in [120])

$$\alpha n^2 . \pi . \sin (it + \varepsilon - \phi) . S . d\mu . [(1 - 2\mu^2) . H' + \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . M'];$$

Dies ist der Werth des obigen Integrals, wenn man es von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 360°$ nimmt. Man kann hier noch sin $(it - \varphi + \iota)$ auſserhalb des Integralzeichens S setzen, da diese Integration sich nur auf die Gröſse μ bezieht, welche sich in diesem Sinus nicht findet. Substituirt man den so gefundenen Werth des zweyten Theils der obigen Gleichung, so erhält man die im Text gegebene Gleichung.

120) Man hat $\gamma u = H . \cos (it + s\varpi + \iota)$; $\gamma . \left(\frac{du}{dt}\right) = - iH . \sin (it + s\varpi + \iota)$;

$$\gamma . \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = - i^2 H . \cos (it + s\varpi + \iota); \quad \text{ferner } \gamma v = M . \sin (it + s\varpi + \iota);$$

$$\gamma . \left(\frac{dv}{dt}\right) = iM . \cos (it + s\varpi + \iota); \quad \gamma . \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) = - i^2 M . \sin (it + s\varpi + \iota).$$

Diese Gröſsen werden mit sin $(\varphi + \varpi)$, oder mit cos $(\varphi + \varpi)$ multiplicirt, und dann in Beziehung auf ϖ integrirt; man findet dann auf eben die Art, wie in der vorhergehenden Anmerkung, daſs alle Glieder verschwinden, wo s gröſser als 1 ist, weil sie den Winkel ϖ enthalten werden. Man setze daher sogleich

$$\gamma u = H' . \cos (it + \varpi + \iota); \quad \gamma . \left(\frac{du}{dt}\right) = - iH' . \sin (it + \varpi + \iota);$$

$$\gamma . \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = - i^2 H' . \cos (it + \varpi + \iota); \quad \gamma v = M' . \sin (it + \varpi + \iota);$$

$$\gamma . \left(\frac{dv}{dt}\right) = + iM' . \cos (it + \varpi + \iota); \quad \gamma . \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) = - i^2 M' . \sin (it + \varpi + \iota).$$

Substituirt man diese Werthe in

$$S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) . \sin (\varphi + \varpi) + 2n\mu^2 . \left(\frac{du}{dt}\right) . \cos (\varphi + \varpi) + \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . \cos (\varphi + \varpi) - 2n \left(\frac{dv}{dt}\right) \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . \sin (\varphi + \varpi)\right],$$

und verwandelt man die Producte der Sinus und Kosinus in Summen von Sinus oder Kosinus, wobey man nur diejenigen Glieder behalten wird, wo sich der Winkel ϖ nicht befindet, weil die von ϖ abhängenden Glieder sich in dem von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 360°$ genommenen Integrale gegenseitig aufheben, so findet man

$$S . \frac{\alpha}{2} . d\mu . d\varpi . \sin (it + \iota - \varphi) . (i^2 H' - 2ni\mu^2 H' - i^2 . \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . M' + 2ni\mu . \sqrt{1 - \mu^2} . M'),$$

oder wenn man n statt i setzt,

$$S . \frac{\alpha}{2} . d\mu . d\varpi . \sin (it + \iota - \varphi) [n^2 . (1 - 2\mu^2) H' + n^2 . \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . M'].$$

Integrirt man in Beziehung auf ϖ, von $\varpi = 0$ bis $\varpi = 360°$ oder $= 2\pi$, so erhält man

$$\alpha . n^2 . \pi . \sin (it + \iota - \varphi) . S . d\mu . [(1 - 2\mu^2) H' + \mu . \sqrt{1 - \mu^2} . M'].$$

nimmt man daher nur auf die Glieder Rücksicht, in welchen i sehr nahe gleich n ist, so hat man

$$S\,.\,\alpha n^2 y\,.\,d\mu\,.\,d\varpi\,.\,\mu\,.\,\sqrt{1-\mu^2}\,.\,\sin(\phi+\varpi)$$

$$= S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi).\left[g.\left(\frac{dy}{d\mu}\right)-\left(\frac{dU}{d\mu}\right)-\left(\frac{df}{d\mu}\right)\right]$$

$$- S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.\cos(\phi+\varpi).\left[g.\left(\frac{dy}{d\varpi}\right)-\left(\frac{dU}{d\varpi}\right)-\left(\frac{df}{d\varpi}\right)\right].$$

Hieraus findet man

$$\frac{dN'.\sin\phi+dN''.\cos\phi}{dt} = S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\sqrt{1-\mu^2}.\sin(\phi+\varpi).\left(\frac{df}{d\mu}\right)$$

$$- S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.\cos(\phi+\varpi).\left(\frac{df}{d\varpi}\right).$$

Man findet auf dieselbe Art

$$\frac{dN'.\cos\phi-dN''.\sin\phi}{dt} = S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\sqrt{1-\mu^2}.\cos(\phi+\varpi).\left(\frac{df}{d\mu}\right)$$

$$+ S.\alpha\gamma.d\mu.d\varpi.\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.\sin(\phi+\varpi).\left(\frac{df}{d\varpi}\right).$$

Diese beiden Gleichungen haben also Statt, wenn man nur auf die Winkel Rücksicht nimmt, die mit großer Langsamkeit wachsen, und man hat im Vorhergehenden gesehen, daß das erste Glied des zweyten Theils jeder dieser Gleichungen auch noch alle Glieder enthält, die von Winkeln abhängen, welche sehr wenig von nt verschieden sind; so daß sie alles umfassen, was sich auf diese beiden Arten von Winkeln bezieht, welche allein auf die Bewegungen der Erde um ihren Schwerpunkt einen merklichen Einfluß haben können. Vereinigt man diese Gleichungen mit der Gleichung $\frac{dN}{dt}=0$, so wird man alles haben, was zur Bestimmung des Einflusses des Meeres auf diese Bewegungen nöthig ist.

Ich bemerke nun, daß diese verschiedenen Gleichungen mit denen übereinstimmen, welche man erhalten würde, wenn das Meer eine feste Masse mit der Erde bildete. Wir werden, um dies zu zeigen, die Werthe bestimmen, welche dN, dN', dN'' in Beziehung auf das Meer in dieser Hypothese erhalten.

Der Werth von V des 3ten Satzes ist sehr nahe gleich $\frac{L}{r_{,}} + R^2 . f - \frac{R^2}{2r_{,}^{3}}$;
dies giebt vermöge desselben Satzes, wenn man $R^2 \, dR . d\mu . d\varpi$ statt dm substituirt,

$$\frac{dN}{dt} = S . \alpha R^4 . dR . d\mu . d\varpi . \left[x' . \left(\frac{df}{dy'}\right) - y' . \left(\frac{df}{dx'}\right) \right].$$

Da man die Tiefe des Meeres sehr klein annimmt, und da der Halbmesser R sehr nahe der Einheit gleich ist, so hat man in Beziehung auf das Meer

$$S . R^4 \, dR = \gamma,$$

und folglich

$$\frac{dN}{dt} = S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \left[x' . \left(\frac{df}{dy'}\right) - y' . \left(\frac{df}{dx'}\right) \right].$$

Man findet auf eben dieselbe Art

$$\frac{dN'}{dt} = S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \left[x' . \left(\frac{df}{dz'}\right) - z' . \left(\frac{df}{dx'}\right) \right];$$

$$\frac{dN''}{dt} = S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \left[y' . \left(\frac{df}{dz'}\right) - z' . \left(\frac{df}{dy'}\right) \right].$$

Verwandelt man nach Satz 10. die partiellen Differenziale in andere, die sich auf die veränderlichen Grössen R, μ und ϖ beziehen, so erhält man

$$\frac{dN}{dt} = S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \left(\frac{df}{d\varpi}\right);$$

$$\frac{dN'}{dt} = S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \left[\sqrt{1-\mu^2} . \cos\varpi . \left(\frac{df}{d\mu}\right) + \frac{\mu . \sin\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} . \left(\frac{df}{d\varpi}\right) \right];$$

$$\frac{dN''}{dt} = S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \left[\sqrt{1-\mu^2} . \sin\varpi . \left(\frac{df}{d\mu}\right) - \frac{\mu . \cos\varpi}{\sqrt{1-\mu^2}} . \left(\frac{df}{d\varpi}\right) \right];$$

sie geben:

$$\frac{dN' . \sin\phi + dN'' . \cos\phi}{dt} = S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \sqrt{1-\mu^2} . \sin(\phi + \varpi) . \left(\frac{df}{d\mu}\right)$$

$$- S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} . \cos(\phi + \varpi) . \left(\frac{df}{d\varpi}\right);$$

$$\frac{dN' . \cos\phi - dN'' . \sin\phi}{dt} = S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \sqrt{1-\mu^2} . \cos(\phi + \varpi) . \left(\frac{df}{d\mu}\right)$$

$$+ S . \alpha\gamma . d\mu . d\varpi . \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} . \sin(\phi + \varpi) . \left(\frac{df}{d\varpi}\right),$$

und wenn man nur auf die Glieder Rücksicht nimmt, die mit äußerst großer Langsamkeit wachsen, so ist $\frac{dN}{dt} = 0$. Dies sind dieselben Gleichungen, welche wir schon oben gefunden haben; hieraus fließt folgender merkwürdige Lehrsatz: die Erscheinungen des Vorrückens der Nachtgleichen und des Schwankens der Erdaxe sind genau eben so beschaffen, als ob das Meer eine feste Masse mit dem Sphäroid, welches es bedeckt, ausmachte.

Es giebt jedoch einen mathematisch möglichen Fall, wo dieser Lehrsatz nicht mehr Statt findet; dies ist der Fall, wo der vom Meer bedeckte Kern der Erde aus kugelrunden Schalen bestände; es ist klar, daß alsdann die Anziehungen der Sonne und des Mondes, und die Anziehung und der Druck des Meeres keine Bewegung in der Umdrehungsaxe des Kerns hervorbringen kann, weil die aus allen diesen Kräften zusammengesetzte Kraft durch den Mittelpunkt des Kerns gehen würde. Wir wollen sehen, warum die vorhergehende Analysis sich nicht auf diesen Fall erstreckt.

Die Theile der Ausdrücke von αy, αu und αv, welche auf die Bewegung der Erdaxe Einfluß haben, sind diejenigen, die von den Sinus und Kosinus der Winkel von der Form $it + \varpi$ abhängen, in welchen i sehr wenig von n verschieden ist, und man hat im 8ten Satz des vierten Buchs gesehen, daß diese Theile sich auf die Schwankungen der zweyten Art beziehen. Diese Schwankungen können in diesem Fall durch den angeführten Satz bestimmt werden: da i sehr wenig von n verschieden ist, so sind die Ausdrücke von y, u und v in Beziehung auf den Winkel $it + \varpi$ von folgender Form:

$$y = \frac{2lq . k . \mu . \sqrt{1-\mu^2}}{2lgq . \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) - n^2} . \cos(it + \varpi);$$

$$u = \frac{-k}{2lgq . \left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) - n^2} . \cos(it + \varpi);$$

$$v = \frac{k}{2lgq.\left(1 - \frac{3}{5\varrho}\right) - n^2} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Die Tiefe des Meeres ist $l.(1 - q\mu^2)$; man hat aber nach Satz 34 des dritten Buchs als Bedingung des Gleichgewichts

$$lq = \frac{5n^2.\varrho}{(10\varrho - 6).g};$$

sie macht die vorhergehenden Ausdrücke von y, u und v unendlich groſs; da sie aber nur durch die Voraussetzung von $i - n = 0$ unendlich groſs werden, so folgt daraus, daſs y, u und v von der Ordnung $\frac{1}{i-n}$ sind. Man kann daher in den Gleichungen (O) nicht $i = n$ setzen, wenn man u und v in Beziehung auf die Zeit t differenziirt, wie wir im Vorhergehenden gethan haben. Man muſs in diesen Differenzialen auf den Factor $i - n$ Rücksicht nehmen, welcher, indem er die durch $i - n$ dividirten Theile von u und von v multiplicirt, Producte giebt, die von $i - n$ unabhängig sind. Diese Producte machen die Theile von dN und von dN', welche aus der Anziehung und dem Druck des Meeres auf das Erdsphäroid entstehen, gleich Null.

Wir bemerken hier, daſs die Schwankungen des Meeres, die vom Winkel $it + \varpi$ abhängen, im vorhergehenden Fall sehr groſs sind, wenn i sehr wenig von n verschieden ist; und dieses findet bey den Gliedern Statt, die von der Bewegung der Knoten der Mondsbahn abhängen, wo $(i - n).t$ alsdann diese Bewegung ausdrückt; ein geringer Widerstand von Seiten des Erdsphäroids ist aber hinreichend, um diese Schwankungen beträchtlich zu vermindern. Das Meer wirkt vermöge dieses Widerstandes senkrecht auf das Sphäroid, und hat durch diese Wirkung einen Einfluſs auf die Bewegungen seiner Axe. Man wird im folgenden Satz sehen, daſs der vorhergehende Lehrsatz in diesem Fall, welcher der Fall der Natur ist, Statt findet.

12. Die vorhergehende, obschon sehr allgemeine, Analysis setzt noch voraus, daſs das Meer das ganze Erdsphäroid bedeckt, daſs seine Tiefe regelmäſsig ist, und daſs es keinen Widerstand von Seiten des Sphäroids, welches es bedeckt, erfährt. Diese Voraussetzungen finden nicht in der Natur Statt; man kann daher zweifeln, ob der vorhergehende Lehrsatz genau auf das Meer angewendet werden kann. Da er in der Theorie der Bewegungen der Erde sehr

wichtig ist, so geben wir hier einen allgemeinen Beweis desselben, was auch immer die Unregelmäſsigkeiten der Figur und der Tiefe des Meeres, und die Widerstände, welche es erfährt, seyn mögen. Ich rufe hierzu den Grundsatz der Erhaltung der Winkelflächen ins Gedächtniſs zurück, welcher im fünften Kapitel des ersten Buchs bewiesen worden ist.

„Wenn man jedes Theilchen eines Systems von Körpern, die auf irgend „eine Art gegen einander zurückwirken, auf eine feste Ebene projicirt; wenn „man ferner von diesen Projectionen zu einem in der Ebene genommenen festen „Punkt Linien zieht, die wir Radius vectors nennen wollen, so ist die Sum-„me der Producte jedes Theilchens in die Winkelfläche, welche sein Radius „vector beschreibt, der Zeit proportional, so daſs man $A = ht$ hat, wenn man „A diese Summe, t die Zeit und h einen beständigen Koeffizienten nennt."

Dieser Grundsatz hat in der gegenwärtigen Untersuchung den groſsen Vortheil, auch in dem Fall wahr zu seyn, wenn das System plötzliche Aenderungen erfährt, wie dies beym Meer sich ereignet, dessen Schwankungen durch die Reibungen und durch den Widerstand der Ufer plötzlich geändert werden.

Ist das System der Wirkung fremder Kräfte unterworfen, so wird A nicht mehr der Zeit proportional seyn, und der Werth von dA wird daher nicht beständig seyn, wenn man das Element der Zeit dt als beständig annimmt. Man betrachte, um seine Aenderung zu bestimmen, alle Theilchen des Systems als in Ruhe und von einander abgesondert; man mache hernach eine Summe von allen Producten jedes Theilchens in die Winkelfläche, welche sein Radius vector im Augenblick dt vermöge der fremden Kräfte beschreibt, die auf das Theilchen wirken. Diese Summe wird gleich d^2A seyn; denn es erhellet aus dem angeführten Grundsatz, daſs die Rückwirkung der verschiedenen Körper des Systems nichts in diesem Werth von d^2A ändert.

Man gedenke sich nun eine zum Theil flüssige Masse, welche sich um irgend eine Axe dreht; man nehme an, daſs sehr kleine anziehende Kräfte von der Ordnung α auf sie wirken, welche aber ihren Schwerpunkt in Ruhe lassen. Legt man durch diesen Schwerpunkt eine feste Ebene, die wir für die Projections-Ebene annehmen werden, und läſst man aus demselben Punkt die Radius vectors der verschiedenen Theilchen ausgehen: so wird die Summe der Producte jedes Theilchens in die von seinem Halbmesser beschriebene Winkelfläche, bis auf die Gröſsen von der Ordnung α^2 eben so groſs seyn, als ob die

ganze Masse fest gewesen wäre. Man darf, um dies zu zeigen, nur beweisen, daſs der Werth von $d^2 A$ in der Voraussetzung einer zum Theil flüssigen Masse eben so groſs ist, als in der Voraussetzung einer gänzlich festen Masse. Betrachtet man nämlich, daſs die Gestalt der Masse und die Art, mit welcher sie sich der Wirkung der äuſsern Kräfte darbietet, nach irgend einer Zeit in beiden Hypothesen nur um Gröſsen von der Ordnung α verschieden seyn können; bemerkt man überdies, daſs diese Kräfte selbst nur von der Ordnung α sind: so kann man leicht hieraus schlieſsen, daſs der Unterschied der Werthe von $d^2 A$ in diesen Hypothesen nur von der Ordnung α^2 seyn kann, und daſs man folglich, wenn man die Gröſsen dieser Ordnung vernachlässigt, die entsprechenden Werthe von $\frac{dA}{dt}$ in beiden Hypothesen einander gleich setzen kann.

Man gedenke sich nun, daſs die Masse, von der wir sprechen, die Erde selbst ist, welche wir anfänglich als ein durch Umdrehung entstandenes und sehr wenig von einer Kugel verschiedenes Sphäroid ansehen werden, und welches von einem Flüssigen von geringer Tiefe bedeckt wird. Die Wirkung der Sonne und des Mondes wird Schwankungen in diesem Flüssigen und Bewegungen in dem Sphäroid hervorbringen; diese Schwankungen und Bewegungen müssen aber nach dem Vorhergehenden so unter einander verbunden seyn, daſs der Werth von $\frac{dA}{dt}$ nach irgend einer Zeit eben so groſs ist, als ob die Erde gänzlich fest gewesen wäre. Wir wollen diesen Werth zuerst in der letztern Voraussetzung bestimmen.

Es sey am Anfang der Bewegung θ die Neigung des Aequators gegen die feste Ebene, für welche wir die Ebene der Ekliptik zu einer gegebenen Epoche annehmen; es sey ψ der Winkel, welchen der Durchschnitt dieser Ebene und des Aequators mit einer geraden unveränderlichen Linie macht, welche auf der Ebene dieser Ekliptik durch den Schwerpunkt der Erde gezogen worden ist; es sey ferner nt die Umdrehungsbewegung dieses Planeten: so ist klar, daſs alle Aenderungen, welche in der Bewegung des Systems nach der Zeit t sich ereignen, von den Aenderungen von θ, ψ und n abhängen. Man nehme an, daſs θ sich nach dieser Zeit in $\theta + \alpha\delta\theta$, ψ in $\psi + \alpha\delta\psi$ und n in $n + \alpha\delta n$ verwandelt. Man hat im Vorhergehenden gesehen, daſs die Glieder, auf welche man Rücksicht nehmen muſs, bloſs diejenigen sind, welche propor-

tional mit der Zeit wachsen, und unter den periodischen blofs diejenigen, die in Sinus oder Kosinus sehr langsam wachsender Winkel multiplicirt, und durch die Koeffizienten der Zeit t in diesen Winkeln dividirt werden; man kann daher, wenn man nur auf diese Glieder Rücksicht nimmt, θ, ψ und n beym Differenziiren der Funktion A als beständig ansehen.

Man gedenke sich nun, dafs die feste Ebene, auf welche man die Bewegungen der Theilchen der Erde projicirt, durch ihren, als unbeweglich angenommenen, Schwerpunkt geht, und dafs sie mit der unveränderlichen Ekliptik, von welcher wir gesprochen haben, den Winkel γ macht; und dafs der Durchschnitt dieser beiden Ebenen mit der geraden unveränderlichen Linie, von welcher wir den Winkel ψ zu zählen anfangen, den Winkel β macht, so hat man beym Anfang der Bewegung

$$\frac{dA}{dt} = M,$$

wo M eine Funktion von θ, ψ, n und der Gröfsen γ und β ist, welche die Lage der Projectionsebene bestimmen. Man erhält nach irgend einer Zeit t den Werth von $\frac{dA}{dt}$, wenn man in M die Gröfsen θ, ψ und n in $\theta + \alpha\delta\theta$, $\psi + \alpha\delta\psi$ und $n + \alpha\delta n$ verwandelt; bezeichnet man daher die Variation von $\frac{dA}{dt}$ nach Verflufs dieser Zeit durch $\alpha . \delta . \frac{dA}{dt}$, so erhält man, wenn man die Gröfsen von der Ordnung α^2 vernachlässigt,

$$\alpha . \delta . \frac{dA}{dt} = \alpha . \delta\theta . \left(\frac{dM}{d\theta}\right) + \alpha . \delta\psi . \left(\frac{dM}{d\psi}\right) + \alpha . \delta n . \left(\frac{dM}{dn}\right).$$

Man nenne C die Summe der Producte jedes Theilchens der Erde in das Quadrat seines Abstandes von der Umdrehungsaxe, und V die Neigung der Projections-Ebene gegen den Erdäquator, so sieht man leicht, dafs man $M = \frac{1}{2} n C . \cos V$ hat. Man hat aber

$$\cos V = \cos\gamma . \cos\theta + \sin\gamma . \sin\theta . \cos(\beta - \psi).$$

Man findet so:

$$\alpha\delta . \frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}\alpha n C . \begin{bmatrix} \delta\theta . [\sin\gamma . \cos\theta . \cos(\beta - \psi) - \cos\gamma . \sin\theta] \\ + \delta\psi . \sin\gamma . \sin\theta . \sin(\beta - \psi) \end{bmatrix}$$
$$+ \tfrac{1}{2} C . \delta n . [\cos\gamma . \cos\theta + \sin\gamma . \sin\theta . \cos(\beta - \psi)]; \qquad (p)$$

in welchem Ausdruck man ohne merklichen Fehler C so bestimmen kann, als ob

ob die Erde eine Kugel wäre. Wir wollen nun den Ausdruck derselben Gröſse in dem Fall suchen, wenn die Erde ein Sphäroid ist, welches von einem Flüssigen von geringer Tiefe bedeckt wird.

Es seyen $\delta\theta'$, $\delta\psi'$ und $\delta n'$ die Variationen von θ, ψ und n in Beziehung auf dieses Sphäroid, wenn man in diesen Variationen nur die Glieder behält, welche der Zeit proportional sind und diejenigen, welche in Sinus oder Kosinus sehr langsam wachsender Winkel multiplicirt, und durch die Koeffizienten der Zeit in diesen Winkeln dividirt werden: so ist aus dem Vorhergehenden klar, daſs hieraus im Werth von $\frac{dA}{dt}$ eine Aenderung entsteht, welche sehr nahe gleich

$$\tfrac{1}{2}\alpha n C \,.\left[\begin{array}{l}\delta\theta' \,.\, [\sin\gamma \,.\, \cos\theta \,.\, \cos(\beta - \psi) - \cos\gamma \,.\, \sin\theta] \\ + \delta\psi' \,.\, \sin\gamma \,.\, \sin\theta \,.\, \sin(\beta - \psi)\end{array}\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\alpha C \,.\, \delta n' \,.\, [\cos\gamma \,.\, \cos\theta + \sin\gamma \,.\, \sin\theta \,.\, \cos(\beta - \psi)]$$

ist, wo die geringe Tiefe des Flüssigen erlaubt, C so zu betrachten, als ob es noch das Product jedes Theilchens der Erde in das Quadrat seines Abstandes von der Umdrehungsaxe vorstellte. Will man die ganze Variation von $\frac{dA}{dt}$ haben, so muſs man zur vorhergehenden Aenderung diejenige addiren, die aus der Bewegung des Flüssigen entspringt, und welche wir mit $\alpha\,\delta L$ bezeichnen werden. Man hat aber gesehen, daſs die ganze Variation von $\frac{dA}{dt}$ derjenigen gleich ist, welche die Gleichung (p) giebt, und welche Statt haben würde, wenn das Flüssige, welches die Erde bedeckt, mit ihr eine feste Masse bildete; man erhält folglich, wenn man beide Variationen einander gleich setzt,

$$o = \alpha n C \,.\left(\begin{array}{l}(\delta\theta' - \delta\theta) \,.\, [\sin\gamma \,.\, \cos\theta \,.\, \cos(\beta - \psi) - \cos\gamma \,.\, \sin\theta] \\ + (\delta\psi' - \delta\psi) \,.\, \sin\gamma \,.\, \sin\theta \,.\, \sin(\beta - \psi)\end{array}\right) \qquad (q)$$
$$+ \alpha C \,.\, (\delta n' - \delta n) \,.\, [\cos\gamma \,.\, \cos\theta + \sin\gamma \,.\, \sin\theta \,.\, \cos(\theta - \psi)] + 2\,\alpha\,\delta L.$$

Die Glieder, auf welche man im Ausdruck von $\alpha\,\delta L$ Rücksicht nehmen muſs, sind bloſs diejenigen, welche der Zeit proportional sind oder diejenigen, welche Sinus und Kosinus sehr langsam wachsender Winkel enthalten, und durch die Koeffizienten der Zeit in diesen Winkeln dividirt werden. Man kann in der Berechnung dieser Glieder nur auf die Aenderung der Bewegung des Erdsphäroids Rücksicht nehmen, weil der Einfluſs dieser Aenderungen auf den Werth

von $\alpha\delta L$ in Vergleichung mit diesen Aenderungen selbst von derselben Ordnung ist, von welcher das Verhältniſs der Masse des Flüssigen zu der des Sphäroids ist. Man kann ferner in der Berechnung der Anziehungen der Sonne und des Mondes auf das Meer den Theil dieser Anziehungen vernachlässigen, wovon die zusammengesetzte Kraft durch den Mittelpunkt des Sphäroids geht, und welche folglich die Erde um diesen Mittelpunkt im Gleichgewicht erhalten würde, wenn das Meer fest würde; denn es ist klar, daſs die Variation von $\frac{dA}{dt}$ vermöge dieser Kraft in dieser Hypothese Null seyn würde, und der Zustand der Flüssigkeit des Meeres kann nach dem Vorhergehenden keinen Einfluſs auf diese Variation haben. Dieser Theil der Anziehungen bringt in dem Meer die Schwankungen der ersten und dritten Art hervor, welche wir im 5ten, 6ten, 9ten und 10ten Satz des vierten Buchs betrachtet haben. Wir haben in Rücksicht des zweyten Theils der Anziehungen der Sonne und des Mondes im 7ten und 8ten Satz des vierten Buchs gesehen, daſs er die Schwankungen der zweyten Art hervorbringt, wovon der Unterschied der beiden Fluthen desselben Tages abhängt. Ob man nun schon nicht im Stande ist, diese Schwankungen für alle Hypothesen über die Tiefe und Dichte des Meeres zu bestimmen: so hat man doch in den angeführten Sätzen gesehen, daſs die Ausdrücke dieser Schwankungen weder Glieder, die der Zeit proportional sind, noch Sinus oder Kosinus sehr langsam wachsender Winkel, welche durch die Koeffizienten der Zeit in diesen Winkeln dividirt werden, enthalten. Bezeichnet man daher durch x', y', z' die drey rechtwinklichten Koordinaten, welche die Lage eines flüssigen Theilchens, das wir durch dm vorstellen, in Beziehung auf die Projectionsebene bestimmen, so werden weder x', y', z' noch $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ ein ähnliches Glied enthalten, und dies ist auch noch vom Differenzial $\frac{x'dy' - y'dx'}{dt}$ und von seinem Integral $S\,.\,dm\,.\left(\frac{x'dy' - y'dx'}{dt}\right)$ wahr, welches Integral man auf die ganze flüssige Masse erstrecken muſs. Da nun dies Integral den Theil von $\frac{dA}{dt}$ vorstellt, welcher sich auf das Flüssige bezieht, so folgt hieraus, daſs seine Variation $\alpha\delta L$ kein Glied von der Natur derjenigen enthält, von denen hier die

Rede ist; man kann daher $2\,\alpha\,\delta L$ aus der Gleichung (q) weglassen, welche sich dadurch in folgende verwandelt:

$$o = n\,.\,(\delta\theta' - \delta\theta)\,.\,[\sin\gamma\,.\,\cos\theta\,.\,\cos(\beta - \psi) - \cos\gamma\,.\,\sin\theta]$$
$$+ n\,.\,(\delta\psi' - \delta\psi)\,.\,\sin\gamma\,.\,\sin\theta\,.\,\sin(\beta - \psi)$$
$$+ (\delta n' - \delta n)\,.\,[\cos\gamma\,.\,\cos\theta + \sin\gamma\,.\,\sin\theta\,.\,\cos(\beta - \psi)].$$

Da diese Gleichung Statt hat, was auch immer γ und β sind, so kann man in ihr erstlich $\beta = \psi$ und $\gamma = \theta$ setzen; dies giebt $o = \delta n' - \delta n$; die vorhergehende Gleichung verwandelt sich so in folgende:

$$o = (\delta\theta' - \delta\theta)\,.\,[\sin\gamma\,.\,\cos\theta\,.\,\cos(\beta - \psi) - \cos\gamma\,.\,\sin\theta]$$
$$+ (\delta\psi' - \delta\psi)\,.\,\sin\gamma\,.\,\sin\theta\,.\,\sin(\beta - \psi).$$

Setzt man in dieser Gleichung $\gamma = o$, so erhält man $o = \delta\theta' - \delta\theta$ und folglich auch $o = \delta\psi' - \delta\psi$; man hat also

$$\delta n' = \delta n; \qquad \delta\psi' = \delta\psi; \qquad \delta\theta' = \delta\theta.$$

Es ſolgt hieraus, daſs die Variationen der Bewegung des von einem Flüssigen bedeckten Erdsphäroids eben so beschaffen sind, als ob das Meer eine feste Masse mit der Erde bildete.

Jetzt wird man leicht den vorhergehenden Beweis auf den Fall der Natur ausdehnen können, wo die Figur der Erde und die Tiefe des Meeres sehr unregelmäſsig sind, und wo die Schwankungen der Gewässer durch eine groſse Anzahl Hindernisse geändert werden; denn alles beruht darauf, zu zeigen, daſs $\alpha\,\delta L$ weder Glieder enthält, die proportional mit der Zeit wachsen, noch Sinus oder Kosinus langsam wachsender Winkel, welche durch den Koeffizienten der Zeit in diesen Winkeln dividirt werden. Erinnert man sich nun dessen, was wir im 14ten und den folgenden Sätzen des vierten Buchs gesehen haben, so sieht man, daſs die Ausdrücke der Koordinaten der Theilchen des Oceans keine solche Glieder enthalten. Sie hängen zwar von den Elementen der Bahn des anziehenden Gestirns ab, und diese Elemente bringen, weil sie langsam wachsen, ähnliche Glieder in den Ausdrücken dieser Koordinaten hervor, welche aber nicht durch sehr kleine Koeffizienten dividirt werden. Es ist daher allgemein wahr, daſs die Gewässer des Meeres, auf welche Art sie auch auf die Erde theils durch ihre Anziehung und durch ihren Druck, theils durch die Reibung und den mannichfachen Widerstand, welchen sie erfahren, zurück wirken, der Axe der Erde eine solche Bewegung mittheilen, welche sehr nahe derjenigen

gleich ist, die sie durch die Wirkung der Sonne und des Mondes auf das Meer erhalten würde, wenn es mit der Erde eine feste Masse bildete.

Wir haben im 8ten Satz gezeigt, daſs die mittlere Umwälzungsbewegung der Erde gleichförmig ist, wenn man annimmt, daſs dieser Planet gänzlich fest ist, und man hat so eben gesehen, daſs die Flüssigkeit des Meeres und der Atmosphäre dieses Resultat nicht ändert. Die Bewegungen, welche die Wärme der Sonne erregt, und aus welchen die regelmäſsigen Winde zwischen den Wendekreisen entstehen, scheint die Umwälzung der Erde schwächen zu müssen: diese Winde wehen von Morgen gegen Abend, und ihre beständige Wirkung auf das Meer, auf das feste Land und auf die Berge, die sie antreffen, scheint die Umwälzungsbewegung allmählig schwächen zu müssen. Der Grundsatz der Erhaltung der Winkelflächen zeigt uns aber, daſs die ganze Wirkung der Atmosphäre auf das Meer unmerklich seyn muſs. Denn da die Sonnenwärme die Luft in allen Richtungen gleich stark ausdehnt: so kann sie die Summe der Producte jedes Theilchens der Erde und der Atmosphäre in die Winkelfläche, welche der entsprechende Radius vector beschreibt, nicht ändern; dies erfordert, daſs die Umdrehungsbewegung der Erde nicht geändert wird. Wir sind folglich versichert, daſs die übrigen Bewegungen der Atmosphäre jenseits der Wendekreise die Umdrehungsbewegung um dieselbe Gröſse beschleunigen, um welche sie jene Winde in derselben Zeit vermindern. Man kann dieselben Schlüsse auf die Erdbeben und im Allgemeinen auf alles anwenden, was die Erde in ihrem Innern und an ihrer Oberfläche erschüttern kann. Die Verrückung ihrer Theile kann allein diese Bewegung ändern; wenn z. B. ein Körper am Pol unter den Aequator versetzt würde, so würde die Umdrehungsbewegung der Erde ein wenig vermindert werden, da die Summe der Winkelflächen immer dieselbe bleiben muſs; man müſste aber sehr groſse Aenderungen in der Beschaffenheit der Erde annehmen, wenn dies merklich werden sollte.

13. Wir wollen nun die vorhergehende Theorie mit den Beobachtungen vergleichen, und die Folgen entwickeln, welche daraus auf die Beschaffenheit der Erdkugel entstehen. Verwandelt man im Ausdruck von θ des 6ten Satzes die Gröſse $\Sigma . \frac{lc}{f} . \cos(ft + \beta)$ in eine nach den Potenzen geordnete Reihe, so findet man, wenn man nur die erste Potenz behält,

$$\Sigma . \frac{lc}{f} . \cos(ft + \beta) = \Sigma . \frac{lc}{f} . \cos\beta - l.t.\Sigma.c.\sin\beta.$$

Man nehme die Ebene der Ekliptik zu Anfang des Jahres 1750 als feste Ebene an, in welchen Zeitpunkt wir den Anfang der Zeit t setzen. Da das Quadrat der Neigung der wahren Ekliptik gegen diese Ebene nach Satz 5. gleich $[\Sigma.c.\sin(ft+\beta)]^2 + [\Sigma.c.\cos(ft+\beta)]^2$ ist, so hat man

$$\Sigma.c.\sin\beta = 0; \qquad \Sigma.c.\cos\beta = 0;$$

dies giebt, wenn man das Quadrat von ft vernachlässigt,

$$\Sigma . \frac{lc}{f} . \cos(ft + \beta) = \Sigma . \frac{lc}{f} . \cos\beta.$$

Zieht man dies Glied von h ab, so erhält man die mittlere Neigung des Aequators gegen die Ekliptik zu Anfang des Jahres 1750. Da aber h willkührlich ist, so kann man annehmen, daſs es diese mittlere Neigung ausdrückt, und alsdann muſs man den Werth von h in den Gliedern des Ausdrucks von θ um $\Sigma . \frac{lc}{f} . \cos\beta$ vermehren; man kann sich aber wegen der Kleinheit dieser Glieder diese Rechnung ersparen. Man erhält so

$$\theta = h + \frac{l\lambda c'}{(1+\lambda).f'}.\cos(f't+\beta') + \frac{l.\tang h}{2m.(1+\lambda)}.\left(\cos 2v + \frac{m}{m'}.\lambda.\cos 2v'\right);$$

der Werth von θ' des 7ten Satzes verwandelt sich so in

$$\theta' = h - t.\Sigma.c.f.\sin\beta + \frac{l\lambda c'}{(1+\lambda).f'}.\cos(f't+\beta') + \frac{l.\tang h}{2m.(1+\lambda)}.\left(\cos 2v + \frac{m}{m'}.\lambda.\cos 2v'\right).$$

Die Werthe von ψ und ψ' des 6ten und 7ten Satzes verwandeln sich endlich, wenn man in l alles, was t multiplicirt, begreift, in folgende:

$$\psi = lt - \frac{l}{2m.(1+\lambda)}.\left(\sin 2v + \frac{m}{m'}.\lambda.\sin 2v'\right) + \frac{2l\lambda c'}{(1+\lambda).f'}.\cot 2h.\sin(f't+\beta');$$

$$\psi' = lt - t.\cot h.\Sigma.c.f.\cos\beta - \frac{l}{2m.(1+\lambda)}.\left(\sin 2v + \frac{m}{m'}.\lambda.\sin 2v'\right)$$
$$+ \frac{2l\lambda c'}{(1+\lambda).f'}.\cot 2h.\sin(f't+\beta').$$

Das Glied $-t.\Sigma.cf.\sin\beta$ des Ausdrucks von θ' drückt die wirckliche Sekularabnahme der Schiefe der Ekliptik aus; die Beobachtungen lassen über diesen Gegenstand noch Ungewiſsheit übrig. Nimmt man ein Mittel zwischen ihren Resultaten, so kann man diese Abnahme in diesem Jahrhundert auf 154″,3

(50″ Sexagesimaleintheilung) festsetzen; drückt daher T ein Julianisches Jahr aus, so werden wir

$$T.\Sigma.cf.\sin\beta = 1'',543$$

setzen. Diese Gleichung giebt vermöge der Theorie der Planeten, welche wir im folgenden Buch geben werden

$$T.\Sigma.cf.\cos\beta = 0'',24794.$$

Die Beobachtungen geben das jährliche Vorrücken der Nachtgleichen in diesem Jahrhundert gleich 154″,63 (50″,1 Sexag.) folglich

$$lT - 0'',24794\,.\cot h = 154'',63.$$

Die Schiefe der Ekliptik im Jahr 1750 ist $26^G,0796$ (23°.28.17″,9) beobachtet worden; dies ist der Werth von h; hieraus findet man

$$lT = 155'',20 \ (50'',285 \text{ Sexages.})$$

Die mittlere Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik ist $5^G,7188$ (5°.8′.48″,9). Dies giebt

$$c' = \text{tang}\ 5^G,7188.$$

$f'\,T$ ist die Syderal-Bewegung der Knoten der Mondsbahn während eines Julianischen Jahres, und die Beobachtungen geben

$$f'\,T = 215063'' \ (19^\circ.21'.20'',4).$$

Da das Syderaljahr gleich $365^{\text{tage}},256384$ ist, so hat man

$$mT = \frac{400^G.365^{\text{tag}},25}{365^{\text{tag}},256384} = 399^G,9930.$$

Die Beobachtungen geben endlich $m' = m.0,07480$, und die Beobachtungen der Ebbe und Fluth haben uns im vierten Buch $\lambda = 3$ gegeben. Dieses festgesetzt, verwandeln sich die vorhergehenden Werthe von θ, θ', ψ und ψ' in folgende [121]:

$$\theta = 26^\circ,0796 + 31'',036.\cos\Lambda' + 1'',341.\cos 2\nu + 0'',100.\cos 2\nu';$$

$$\theta' = 26^\circ,0796 - i.1'',543 + 31'',036.\cos\Lambda' + 1'',341.\cos 2\nu + 0'',100.\cos 2\nu';$$

121) Diese Formeln verwandeln sich bey der gewöhnlichen Sexagesimaleintheilung in folgende:

$$\theta = 23^\circ.28'.17'',9 + 10'',055.\cos\Lambda' + 0'',434.\cos 2\nu + 0'',032.\cos 2\nu';$$

$$\theta' = 23^\circ.28'.17'',9 - i.0'',5 + 10'',055.\cos\Lambda' + 0'',434.\cos 2\nu + 0'',032.\cos 2\nu';$$

$$\psi = i.50'',285 - 18'',791.\sin\Lambda' - 1'',000.\sin 2\nu - 0'',075.\sin 2\nu';$$

$$\psi' = i.50'',1 - 18'',791.\sin\Lambda' - 1'',000.\sin 2\nu - 0'',075.\sin 2\nu'.$$

$\psi = i \,.\, 155'',20 - 57'',998 \,.\, \sin A' - 3'',088 \,.\, \sin 2\nu - 0'',231 \,.\, \sin 2\nu'$;

$\psi' = i \,.\, 154'',63 - 57'',998 \,.\, \sin A' - 3'',088 \,.\, \sin 2\nu - 0'',231 \,.\, \sin 2\nu'$;

wo i die Anzahl der Julianischen Jahre ist, die seit dem Anfang des Jahres 1750 verflossen sind, und wo A' die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondsbahn ist.

Nennt man υ die gerade Aufsteigung eines Sterns und s seine Abweichung, wo s negativ ist, wenn die Abweichung südlich ist; bezeichnet man ferner die sehr kleinen Aenderungen von θ, θ', ψ, ψ', υ, s durch $\delta\theta$, $\delta\theta'$, $\delta\psi$, $\delta\psi'$, $\delta\upsilon$ und δs, so findet man durch die Differenzialformeln der sphärischen Trigonometrie

$$\delta s = \delta\psi \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\upsilon + \delta\theta \,.\, \sin\upsilon;$$

$$\delta\upsilon = \delta\psi \,.\, \cos\theta + \delta\psi \,.\, \sin\theta \,.\, \operatorname{tang} s \,.\, \sin\upsilon - \delta\theta \,.\, \operatorname{tang} s \,.\, \cos\upsilon - \frac{i\,T}{\sin h} \,.\, \Sigma \,.\, cf \,.\, \cos\beta.$$

Man kann vermittelst dieser Formeln die Sternverzeichnisse von einer Epoche auf eine andere wenig entfernte Epoche reduciren; man muſs aber, um mehrerer Genauigkeit willen, statt θ, υ und s die Werthe nehmen, welche dem Mittel des zwischen den beiden Epochen enthaltenen Zeitraums entsprechen. Das Glied $\frac{i\,T \,.\, \Sigma \,.\, cf \,.\, \cos\beta}{\sin h}$ ist nach dem Vorhergehenden gleich $i \,.\, 0'',62248$ ($0'',201683$ Sexag.): diese Werthe von δs und von $\delta\upsilon$ geben

$$\delta\theta = \frac{\delta s \,.\, (\cos\theta + \sin\theta \,.\, \operatorname{tang} s \,.\, \sin\upsilon) - (\delta\upsilon + i \,.\, 0'',62248) \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\upsilon}{\cos\theta \,.\, \sin\upsilon + \sin\theta \,.\, \operatorname{tang} s};$$

$$\delta\psi = \frac{\delta s \,.\, \operatorname{tang} s \,.\, \cos\upsilon + (\delta\upsilon + i \,.\, 0'',62248) \,.\, \sin\upsilon}{\cos\theta \,.\, \sin\upsilon + \sin\theta \,.\, \operatorname{tang} s}.$$

Die beobachteten Abweichungen der geraden Aufsteigung und der Abweichung der Sterne werden so die Aenderungen von θ und von ψ zu erkennen geben. Auf diese Art hat Bradley die Hauptungleichheit von θ erkannt, die man durch den Namen Nutation bezeichnet, und welche von der Länge des Knotens der Mondsbahn abhängt. Seine Beobachtungen haben ihm $27'',778$ ($9'',0$ Sexag.) für den Koeffizienten von $\cos A'$ im Ausdruck von θ gegeben; Maskelyne hat durch eine noch genauere Untersuchung derselben Beobachtungen diesen Koeffizienten gleich $29'',321$ ($9'',5$ Sexag.) gefunden, und wir haben ihn durch die Theorie gleich $31'',036$ ($10'',055$ Sexag.) gefunden; der kleine Unterschied ist innerhalb der Grenzen der Fehler der Beobachtungen,

welche mit dem Gesetz der Schwere so genau als man wünschen kann, übereinstimmen. Man würde sie zu einer vollkommenen Uebereinstimmung bringen, wenn man den Werth von λ, welchen wir gleich 3 gesetzt haben, ein wenig vermindert; man würde sogar diesen Werth aus diesen Beobachtungen bestimmen können; die Erscheinungen der Fluthen scheinen mir ihn aber mit gröfserer Genauigkeit zu geben, und der Koeffizient, von dem wir sprechen, mufs sehr wenig von 31″,036 verschieden seyn.

Die rückgängige Bewegung ψ der Nachtgleichen auf der wahren Ekliptik, wird durch die rückgängige Bewegung des Erdpols auf einen mit dieser Ekliptik parallelen Kreis hervorgebracht; diese zweyte Bewegung ist gleich $\psi . \sin h$, oder gleich $lt . \sin h - \frac{l \lambda c'}{(1 + \lambda) . f'} . \frac{\cos 2 h}{\cos h} . \sin \Lambda'$, wenn man mit den Astronomen nur die gröfste der periodischen Ungleichheiten von ψ betrachtet. Die Ungleichheit $\frac{l \lambda c'}{(1 + \lambda) . f'} . \cos \Lambda'$ von θ zeigt eine Bewegung des Erdpols in der Richtung des Breitenkreises an, welcher durch diesen Pol geht. Man kann diese beiden Bewegungen auf folgende Art darstellen. Man gedenke sich, dafs sich der Pol des Aequators auf dem Umkreis einer kleinen Ellipse bewegt, welche die Himmelskugel berührt und deren Mittelpunkt, den man als den mittlern Pol des Aequators ansehen kann, jährlich 155″,20 (50″,285 Sexag.) des mit der festen Ekliptik parallelen Kreises gleichförmig beschreibt, in welchem Kreis sich dieser Pol befindet. Die grofse Axe dieser Ellipse ist immer eine Tangente des Breitenkreises, in der Ebene dieses gröfsten Kreises, und ist die Chorde eines Winkels von 62″,1 (20″,1 Sexag.); die grofse Axe verhält sich zur kleinen Axe, wie der Kosinus der Schiefe der Ekliptik zum Kosinus des Doppelten dieser Schiefe; diese kleine Axe ist folglich die Chorde eines Winkels von 46″,2 (14″,97 Sexag.). Die Lage des wahren Pols des Aequators auf dieser Ellipse wird, wie folgt, bestimmt. Man gedenke sich auf der Ebene der Ellipse einen kleinen Kreis, welcher denselben Mittelpunkt hat, und dessen Durchmesser ihrer grofsen Axe gleich ist; man gedenke sich ferner einen Halbmesser dieses Kreises, der eine rückgängige gleichförmige Bewegung hat, und zwar so, dafs dieser Halbmesser mit der Hälfte der grofsen Axe, welche der Ekliptik am nächsten ist, allemal zusammenfällt, wenn der mittlere aufsteigende Knoten der Mondsbahn mit dem Frühlingsnachtgleichepunkt zusammenfällt;

man fälle endlich vom Endpunkt dieses beweglichen Halbmessers eine senkrechte Linie auf die groſse Axe der Ellipse; so wird der Punkt, wo diese senkrechte Linie den Umkreis der Ellipse schneidet, der Ort des wahren Pols des Aequators seyn.

Die Astronomen haben bisher auf die vom Winkel 2ν abhängende Ungleichheiten nicht Rücksicht genommen; diese Ungleichheiten dürfen aber wegen der Genauigkeit der neuern Beobachtungen nicht vernachlässigt werden.

14. Wir wollen den im 6ten Satz gefundenen Werth von l wieder vornehmen, und um mehrerer Genauigkeit willen die Quadrate der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen beybehalten; man hat dann

$$lT = \frac{3m}{4n} . mT . \cos h . \left(\frac{2C - A - B}{C}\right) . \left[\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \lambda . \frac{(2\cos\gamma^2 - \sin\gamma^2)}{2(1-e'^2)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

wo e die Eccentricität der Sonnenbahn, e' die der Mondsbahn, und γ die Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik ist. Die Beobachtungen geben

$$e = 0,016814; \quad e' = 0,0550368;$$

$\frac{m}{n}$ ist das Verhältniſs des Syderaltages zum Syderaljahr und dies Verhältniſs ist gleich 0,00273033; man erhält so

$$lT = \left(\frac{2C - A - B}{C}\right) . (1 + \lambda . 0,992010) . 7516'',30.$$

Man kann nach dem vorhergehenden Satz lT ohne merklichen Irrthum gleich 155'',20 setzen; man erhält folglich, wenn man $\lambda = 3(1 + \beta)$ setzt,

$$\frac{2C - A - B}{C} = \frac{0,00519323}{1 + \beta . 0,748493}.$$

Man hat, nach Satz 2., sehr nahe

$$\frac{2C - A - B}{C} = \frac{2\alpha . (h - \frac{1}{2}\phi) . S . \varrho a^2 . da}{S . \varrho a^4 . da}.$$

Es ist merkwürdig, daſs der Werth von h'''' desselben Satzes sich nicht in dieser Gleichung befindet. Es folgt hieraus, daſs die Bewegungen der Erde um ihren Schwerpunkt eben so beschaffen sind, als ob die Erde ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid wäre, dessen Elliptizität αh seyn würde. Da $\frac{1}{2}\alpha\phi = \frac{1}{578}$ ist, so giebt die Vergleichung der beiden vorhergehenden Ausdrücke von $\frac{2C - A - B}{C}$

$$\alpha h = 0{,}0017301 + \frac{0{,}00259661 \,.\, S \,.\, \varrho\, a^4 \,.\, da}{(1 + \beta .\, 0{,}748493) \,.\, S \,.\, \varrho\, a^2 \,.\, da}.$$

Man muſs den Gesetzen der Hydrostatik gemäſs annehmen, daſs die Dichte der Lagen des Erdsphäroids vom Mittelpunkt zur Oberfläche abnimmt, und in diesem Fall ist $S \,.\, \varrho a^4 \,.\, da$ kleiner als $\frac{3}{5} \,.\, S \,.\, \varrho a^2 \,.\, da$. Setzt man daher den Beobachtungen der Fluthen gemäſs $\beta = 0$, so wird der Werth von αh kleiner als 0,0032881 oder kleiner als $\frac{1}{304}$ seyn. Ist die Erde elliptisch, so drückt αh ihre Ellipticität aus; man kann also diese Elliptizität nicht gröſser als $\frac{1}{304}$ setzen. Dieser Bruch und der Bruch $\frac{1}{578}$ sind die Grenzen dieser Elliptizität, welche aus den Erscheinungen der Präcession und der Nutation der Erdaxe entspringen.

Man hat im dritten Buch gesehen, daſs $\alpha h = \frac{5}{4} \alpha \phi$ ist, wenn man die Erde als gleichartig annimmt; dies giebt vermittelst der vorhergehenden Gleichung 3β sehr nahe gleich $-\frac{8}{5}$ und folglich $\lambda = \frac{7}{5}$. Dieser Werth thut so wenig den Erscheinungen der Ebbe und Fluth Genüge, daſs man ihn nicht zulassen kann. Die Nutation würde in diesem Fall nur $\frac{7}{9}$ der vorhergehenden und folglich 24″,1 seyn, welches sich zu sehr von den astronomischen Beobachtungen entfernt, um zugelassen werden zu können; diese Beobachtungen und die der Fluthen vereinigen sich also, die Hypothese, daſs die Erde gleichartig ist, zu verwerfen. Die Beobachtungen der Sekundenpendellänge haben uns schon auf dies Resultat im dritten Buch geführt: sie haben uns höchstens $\frac{1}{321}$ für den Werth von αh gegeben. Dieser Bruch ist kleiner als $\frac{1}{304}$, und man sieht, daſs die Beobachtungen der Pendellängen sich sehr gut mit den Beobachtungen der Präcession, der Nutation und der Ebbe und Fluth des Meeres vereinigen lassen.

Wir wollen nun die verschiedenen Resultate, welche wir über die Natur der Erdhalbmesser gefunden haben, zusammenstellen, um das Ganze der Erscheinungen, die von der Figur der Erde abhängen und ihre Uebereinstimmung mit dem Grundsatz der allgemeinen Schwere besser zu fassen.

Man kann dem Ausdruck des Halbmessers irgend eines, von der Kugel wenig verschiedenen, Sphäroids folgende Form geben:

$$1 + \alpha \,.\, [Y^{(1)} + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \text{etc.}].$$

Setzt man für die Erde den Anfangspunkt dieser Halbmesser in den Schwerpunkt des Planeten, so hat man im 31sten Satz des dritten Buchs gesehen, daſs die

Bedingungen des Gleichgewichts des Meeres $Y^{(1)} = 0$ geben; dadurch erhält der Ausdruck des Erdhalbmessers folgende Form:

$$1 + \alpha . [Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \text{etc.}].$$

Der bleibende Zustand des Gleichgewichts des Meeres erfordert, daſs die Axe der Umwälzung der Erde eine ihrer Hauptaxen ist, und hierzu muſs nach dem 32sten Satze des dritten Buchs, $Y^{(2)}$ von folgender Form seyn:

$$- h . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}) + h'''' . (1 - \mu^2) . \cos 2 \varpi,$$

wo h und h'''' zwey willkührliche beständige Gröſsen sind, welche die Beobachtungen allein bestimmen können, und welche von der Beschaffenheit der Erdkugel abhängen.

Dies sind die einzigen Resultate, welche der bleibende Zustand des Gleichgewichts der Erde verschafft; sie sind allen himmlischen Körpern gemein, die von einem im Gleichgewicht sich befindenden Flüssigen bedeckt werden. Die Beobachtungen der Sekundenpendellänge haben uns neues Licht über die Natur des Erdhalbmessers verschafft: wir haben durch sie im 42sten Satze des dritten Buchs erfahren, daſs die beständige Gröſse h sehr nahe gleich $- 0,002978$ ist, und daſs die beständige Gröſse h'''' in Vergleichung mit h unmerklich ist; daſs die Gröſse $Y^{(3)} + Y^{(4)} +$ etc. in Vergleichung mit $Y^{(2)}$ ebenfalls sehr klein ist; daſs dies auch von dem ersten Differenzial dieser Gröſse in Vergleichung mit dem von $Y^{(2)}$ gilt; und daſs man folglich bey Berechnung des Erdhalbmessers und seines ersten Differenzials ihm ohne merklichen Irrthum folgende Form geben kann:

$$1 - 0,002978 . (\mu^2 - \tfrac{1}{3}).$$

Die Messungen der Meridiangrade zeigen, daſs diese Voraussetzung nicht auf die zweyten Differenziale des Erdhalbmessers erstreckt werden darf, und daſs die Funktion $Y^{(3)} + Y^{(4)} +$ etc. durch die zweyte Differenziation einen merklichen Werth erlangt.

Das Phänomen des Vorrückens der Nachtgleichen und des Schwankens der Erdaxe hängt nur von $Y^{(2)}$ ab, wie man oben gesehen hat; es bestimmt den Werth von h nicht, es giebt aber die Grenzen, zwischen welchen dieser Werth enthalten ist: diese Grenzen sind $\frac{1}{304}$ und $\frac{1}{578}$; der vorhergehende Werth, welcher aus den Beobachtungen über die Schwere flieſst, fällt zwischen diese Grenzen; er giebt uns ferner eine Abnahme in der Dichte der Lagen des Erdsphäroids vom Mittelpunkt bis zur Oberfläche zu erkennen, ohne uns

jedoch über das wahre Gesetz dieser Abnahme zu unterrichten, deren Daseyn übrigens theils durch die Sicherheit des Gleichgewichts des Meeres, theils durch die geringe Wirkung der Berge auf das Bleyloth, theils durch die Grundsätze der Hydrostatik bewiesen wird, welche Grundsätze erfordern, daſs die dem Mittelpunkt der Erde nahen Theile auch die dichtesten sind, wenn die Erde ursprünglich flüssig war.

So giebt uns jedes von der Gestalt der Erde abhängende Phänomen Licht über die Natur des Erdhalbmessers, und man sieht, daſs sie alle vollkommen unter einander übereinstimmen. Sie sind zwar nicht hinreichend, um uns die innere Beschaffenheit der Erde zu erkennen zu geben; sie zeigen uns aber die wahrscheinlichste Hypothese an, nämlich die, daſs die Dichte vom Mittelpunkt zur Oberfläche abnimmt. Die allgemeine Schwere ist daher die wahre Ursache dieser Erscheinungen, und wenn sie sich hier nicht auf eine so genaue Art wie in den Bewegungen der Planeten zeigt, so rührt dies daher, daſs die Ungleichheiten der anziehenden Kraft der Planeten, welche von den kleinen Unregelmäſsigkeiten ihrer Oberfläche oder ihres Innern abhängen, in groſsen Entfernungen verschwinden, so daſs man nur das einfache Phänomen der gegenseitigen Anziehung dieser Körper gegen ihren Schwerpunkt gewahr wird.

Bouguer's Hypothese, die wir im 33sten Satze des dritten Buchs untersucht haben, giebt $\alpha h = 0{,}0054717$ oder $\frac{1}{183}$; dies entfernt sich zu sehr von der Grenze $\frac{1}{304}$ um zulässig zu seyn; die Phänomene der Präcession und der Nutation vereinigen sich daher mit den Beobachtungen der Pendellängen, um diese Hypothese zu verwerfen.

Zweytes Kapitel.

Von den Bewegungen des Mondes um seinen Schwerpunkt.

15. Der Mond kehrt uns bey seiner Umdrehung um die Erde immer sehr nahe dieselbe Seite zu; dies beweist, daſs seine mittlere Umwälzungsbewegung seiner mittlern Umlaufsbewegung genau gleich ist, und daſs seine Umwälzungsaxe fast senkrecht auf der Ebene der Ekliptik ist. Die Beobachtungen der Bewegung der Mondsflecken führten Dominicus Cassini auf das merkwürdige Resultat: daſs der Mondsäquator gegen die Ebene der Ekliptik um ungefähr $2^c,78$ $(2°.30')$ geneigt ist, und daſs der aufsteigende Knoten dieses Aequators beständig mit dem niedersteigenden Knoten der Mondsbahn zusammenfällt. Tobias Mayer hat seitdem dies Resultat durch eine groſse Anzahl Beobachtungen bestätigt, die er selbst in der Mitte dieses Jahrhunderts angestellt und mit aller möglichen Sorgfalt untersucht hat: er hat bloſs die Neigung des Mondsäquators gegen die Ekliptik kleiner gefunden als Cassini angenommen hatte, nämlich $1^c,65$ $(1°.29')$; und um die Vermuthung aufzuheben, daſs diese Neigung seit der Zeit dieses groſsen Astronomen hat abnehmen können, versichert er aus den Beobachtungen dieser Zeit erkannt zu haben, daſs sie damals eben so groſs war als heutzutage, nämlich $1^c,65$. Wir wollen nun sehen, was in dieser Rücksicht aus der Wirkung der Erde und der Sonne auf das Mondsphäroid entstehen muſs.

16. Wir wollen zuerst die Wirkung der Erde betrachten, und hierzu die Gleichungen (G) des 4ten Satzes wieder vornehmen, welche man offenbar auf den Mond anwendet, wenn man bemerkt, dafs alsdann L die Erde vorstellt, $r_{,}$ ihren vom Mittelpunkt des Mondes, welcher als unbeweglich angenommen wird, gezogenen Radius vector, und dafs X, Y, Z die drey Koordinaten der Erde sind, welche sich auf eine feste durch den Mittelpunkt des Mondes gehende Ebene beziehen. Da aber der Winkel θ sehr klein ist, so werden wir sein Quadrat und sein Product in Z vernachlässigen; wir werden ferner das Product $\left(\frac{B-A}{C}\right).r.q$ wegen der Kleinheit der drey Factoren $\left(\frac{B-A}{C}\right)$, r und q vernachlässigen; die Gleichungen (G) verwandeln sich so in folgende:

$$dp = \frac{3L.dt}{2r_{,}^{5}}.\left(\frac{B-A}{C}\right).[(Y^2 - X^2).\sin 2\phi + 2X.Y.\cos 2\phi];$$

$$dq + \left(\frac{C-B}{A}\right).rp.dt = \frac{3L.dt}{r_{,}^{5}}.\left(\frac{C-B}{A}\right).\begin{bmatrix}(Y^2.\theta + Y.Z).\cos\phi \\ -(X.Y.\theta + X.Z).\sin\phi\end{bmatrix}; \quad (G')$$

$$dr + \left(\frac{A-C}{B}\right).pq.dt = \frac{3L.dt}{r_{,}^{5}}.\left(\frac{A-C}{B}\right).\begin{bmatrix}(X.Y.\theta + X.Z).\cos\phi \\ +(Y^2.\theta + Y.Z).\sin\phi\end{bmatrix}.$$

Nennt man v die wahre Bewegung der Erde in der Länge, vom Mond aus gesehen, welche Bewegung auf den niedersteigenden Knoten des Mondsäquators bezogen werden mufs, so erhält man, wenn man die Quadrate der Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik vernachlässigt,

$$X = r_{,}.\cos v; \qquad Y = r_{,}.\sin v.$$

Die erste der Gleichungen (G′) verwandelt sich so in

$$dp = \frac{3L.dt}{2r_{,}^{3}}.\left(\frac{B-A}{C}\right).\sin(2v - 2\phi).$$

Wir bemerken, um diese Gleichung zu integriren, dafs $\int m\,dt$ die mittlere Bewegung der Erde um den Mond seyn wird, wenn man durch m ihre mittlere Winkelgeschwindigkeit um den Mond bezeichnet, und dafs man

$$v = \int m\,dt + \psi + H.\sin\Pi + \text{etc.}$$

haben wird, wo $H.\sin\Pi + \text{etc.}$ die Ungleichheiten von v, in Beziehung auf die mittlere Bewegung geordnet, ausdrücken. Es sey

$$u = \phi - \psi - \int m\,dt,$$

so hat man

$$2v - 2\phi = -2u + 2H.\sin\Pi + \text{etc.},$$

und folglich

$$\sin(2v - 2\phi) = -\sin 2u - 2H.\cos 2u.\sin\Pi - \text{etc.}$$

Vernachlässigt man das Quadrat von θ, so hat man nach Satz 4.

$$p = \frac{d\phi - d\psi}{dt};$$

folglich

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dm}{dt};$$

die erste der Gleichungen (G') erhält daher folgende Form:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dm}{dt} = -\frac{3L}{2r_{\prime}^3}.\left(\frac{B-A}{C}\right).\sin 2u - \frac{3L}{r_{\prime}^3}.\left(\frac{B-A}{C}\right).H.\cos 2u.\sin\Pi - \text{etc.}$$

Da uns die Beobachtungen zu erkennen gegeben haben, daſs die mittlere Umwälzungsbewegung des Mondes seiner mittlern Umlaufsbewegung um die Erde gleich ist: so ist der Winkel u immer sehr klein, so daſs man $\sin 2u = 2u$ und $\cos 2u = 1$ setzen kann; man hat überdies $\frac{L}{r_{\prime}^3}$ sehr nahe gleich m^2; man erhält folglich

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right).u = -\frac{dm}{dt} - 3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right).H.\sin\Pi - \text{etc.}$$

Der Werth von $\frac{dm}{dt}$ hängt von der Sekulargleichung des Mondes ab, und wir werden in der Theorie des Mondes sehen, daſs man

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{2m'^2.e'.de'}{m.dt}$$

hat, wenn $m't$ die mittlere Syderalbewegung der Sonne, und e' die Eccentricität ihrer Bahn ausdrückt. Integrirt man daher die vorhergehende Gleichung und vernachlässigt man die Gröſse $\frac{m'^2.d^2.(e'de')}{m^5.dt^2.\left(\frac{B-A}{C}\right)}$, so erhält man sehr nahe [122]):

122) Differenziirt man die vorhergehende Differenzialgleichung für u durch $3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right)$, und substituirt man statt $\frac{dm}{dt}$ seinen Werth, so erhält man

$$u = Q.\sin\left[mt.\sqrt{3.\left(\frac{B-A}{C}\right)} + F\right] + \frac{m'^2.e'.\frac{de'}{dt}}{m^3.\left(\frac{B-A}{C}\right)}$$

$$+ 3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right).\frac{H.\sin\Pi}{\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)^2 - 3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right)} + \text{etc.},$$

wo Q und F zwey willkührliche beständige Grössen sind. Wir wollen nun die Folgen untersuchen, welche aus diesem Integrale fliessen.

Wir

$$\frac{d^2u}{3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right).dt^2} + u = \frac{m'^2.e'.de'}{m^3.\left(\frac{B-A}{C}\right).dt} - H.\sin\Pi - \text{etc.}$$

Vernachlässigt man das zweyte Differenzial von $\frac{m'^2.e'.de'}{m^3.\left(\frac{B-A}{C}\right).dt}$, so erfordert das erste Glied des zweyten Theils der vorhergehenden Gleichung, dass $u = \frac{m'^2.e'.de'}{m^3.\left(\frac{B-A}{C}\right).dt}$ ist. Da das zweyte Differenzial eines Sinus auch ein Sinus ist, so erfordert das Glied $-H.\sin\Pi$, dass u ein Glied von der Form $\alpha.\sin\Pi$ enthält. Dann ist $\frac{d^2u}{3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right).dt^2} = \frac{-\alpha.\left(\frac{d\Pi}{dt^2}\right)^2.\sin\Pi}{3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right)}$, und die obige Gleichung giebt also $\frac{-\alpha.\left(\frac{d\Pi}{dt^2}\right)^2.\sin\Pi}{3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right)} + \alpha.\sin\Pi = -H.\sin\Pi$, woraus α $= \frac{3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right).H}{\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)^2 - 3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right)}$ folgt. Da man endlich der Gleichung $\frac{d^2u}{3m^2.\left(\frac{B-A}{C}\right).dt^2} + u = 0$, bekanntlich dadurch Genüge thut, dass man $u = Q.\sin\left[mt.\sqrt{3\left(\frac{B-A}{C}\right)} + F\right]$ setzt, so muss man dieses Glied des Werthes von u zu den beiden vorhergefundenen addiren, um den vollständigen Werth von u zu erhalten.

Wir bemerken zuerst, dafs das Glied $\frac{m''. e'. \frac{de'}{dt}}{m^3. \left(\frac{B-A}{C}\right)}$ dieses Integrals unmerklich ist, ob es schon durch den kleinen Bruch $\left(\frac{B-A}{C}\right)$ dividirt wird, wegen der äufserst grofsen Langsamkeit, womit sich die Eccentricität e' ändert; man kann daher dies Glied vernachlässigen. Alle übrigen Glieder des Ausdrucks von u ändern sich viel schneller; dieser Ausdruck bleibt aber immer sehr klein, wenn Q ein kleiner Koeffizient ist. Die Gleichung $\frac{dp}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dm}{dt}$ giebt nun

$$\int p\,dt = u + \int m\,dt.$$

$\int p\,dt$ ist nach Satz 8. die Umwälzungsbewegung des Mondes um seine dritte Hauptaxe; man sieht hieraus, dafs die beiden mittlern Bewegungen dieses Gestirns, die der Umwälzung und die des Umlaufs, vollkommen einander gleich sind, und dafs die Wirkung der Erde auf das Mondsphäroid der erstern dieser beiden Bewegungen die Sekularungleichheiten der zweyten mittheilt. Es wird zu dieser vollkommenen Gleichheit nicht erfordert, dafs diese beiden Bewegungen ursprünglich einander gleich waren, welches sehr wenig wahrscheinlich seyn würde; es ist hinreichend, dafs die Geschwindigkeit der Umwälzung des Mondes, nämlich p, beym Anfang, wo wir $t = 0$ setzen, zwischen den folgenden beiden Grenzen enthalten war,

$$m + mQ.\sqrt{\frac{3.(B-A)}{C}} + \text{etc. und } m - mQ.\sqrt{\frac{3.(B-A)}{C}} + \text{etc.}$$

Grenzen, deren Ausdehnung wegen der willkührlichen Gröfse Q willkührlich ist. Diese Ausdehnung ist zwar wegen der Kleinheit von Q und von $\sqrt{3.\left(\frac{B-A}{C}\right)}$ klein; sie ist aber hinreichend, um die Unwahrscheinlichkeit verschwinden zu lassen, welche sich dann finden würde, wenn man annehmen wollte, dafs die mittlern Bewegungen beym Anfang so beschaffen waren, dafs die mittlere Umwälzungsbewegung des Mondes in der Folge immer der mittlern Umlaufsbewegung gleich war.

Der Werth von u drückt die wirkliche Libration des Mondes in Länge aus, welche Libration bloſs der Ueberschuſs seiner wirklichen Umwälzungsbewegung über seine mittlere Bewegung ist. Dieser Werth enthält erstlich das Argument $Q \cdot \sin\left[mt \cdot \sqrt{3 \cdot \left(\frac{B-A}{C}\right)} + F\right]$, dessen Ausdehnung willkührlich ist; da man es aber nicht durch die Beobachtungen erkannt hat, so muſs es wenig beträchtlich seyn. Es folgt hieraus, daſs $\sqrt{3 \cdot \left(\frac{B-A}{C}\right)}$ eine mögliche Gröſse ist; wäre sie unmöglich, so würde sich das vorhergehende Argument in Exponentialgröſsen oder in Kreisbogen verwandeln, welche, da sie unbestimmt mit der Zeit wachsen, endlich den Werth von u unbestimmt würden ändern können, welches den Beobachtungen entgegen ist. Es würde zwar, wenn Q gleich Null wäre, weder Kreisbogen noch Exponentialgröſsen im Werth von u geben, obschon $B - A$ negativ wäre; die geringste Ursache würde sie aber in ihm hervorbringen können; dies würde der Fall eines Gleichgewichts ohne Sicherheit seyn, welches man nicht zulassen kann. $(B - A)$ ist folglich eine positive Gröſse, das heiſst, beym Mond ist das Moment der Trägheit A kleiner als das Moment der Trägheit B. Das erste dieser Momente bezieht sich auf die gegen die Erde gerichtete Hauptaxe des Aequators; denn es bezieht sich auf die erste Hauptaxe, welche mit der Linie der Mondsnachtgleichen den Winkel ϕ macht, während daſs der vom Mittelpunkt des Mondes zum Mittelpunkt der Erde gezogene Radius vector mit dieser Linie den Winkel v macht; nun ist nach dem Vorhergehenden $\phi - v$ immer ein kleiner Winkel: die erste Hauptaxe des Mondsphäroids ist daher immer sehr nahe gegen die Erde gerichtet. Da der Mondäquator sich in dieser Richtung durch die Anziehung der Erde verlängert hat: so muſs das Moment der Trägheit A kleiner seyn als das Moment der Trägheit B, welches sich auf die zweyte im Aequator liegende Hauptaxe bezieht.

Die Dauer der Periode des vorhergehenden Arguments ist gleich einem Syderal-Monat dividirt durch den Koeffizienten $\sqrt{3 \cdot \left(\frac{B-A}{C}\right)}$; da dieser Koeffizient unbekannt ist, so ist es unmöglich diese Dauer anzugeben. Wir werden bald sehen, daſs sie nicht sieben Jahre übersteigen würde,

wenn der Mond gleichartig wäre, und daſs der Unterschied der Momente der Trägheit des Mondes für seine drey Hauptaxen in der Natur wahrscheinlich gröſser ist, als im Fall der Gleichartigkeit. Diese Bemerkung zeigt uns, wie sehr das Glied $\frac{m'^2 \,.\, e' \,.\, de'}{m^3 \,.\, \left(\frac{B-A}{C}\right) . \, dt}$, welches wir oben vernachlässigt haben, unmerklich ist.

Es giebt unter den Gliedern des Ausdrucks von u keine andern merklichen Glieder als das Glied, welches von der Mittelpunktsgleichung des Mondes abhängt, wegen der Gröſse dieser Mittelpunktsgleichung, und die Glieder, welche einen kleinen Divisor haben, und in welchen folglich $\frac{d\Pi}{dt}$ sehr klein ist. $H . \sin \Pi +$ etc. ist die Summe der periodischen Glieder der wahren Bewegung des Mondes; und wenn man annimmt, daſs $H . \sin \Pi$ die Mittelpunktsgleichung ausdrückt, so hat man $H = 70005''$ $(6^\circ . 18' . 1'',6)$, und da Π hier die mittlere Anomalie des Mondes ist, so findet man $\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)^2 = m^2 . 0,98317$; man erhält folglich im Ausdruck von u das Glied

$$\frac{3 . \left(\frac{B-A}{C}\right) . 70005'' . \sin \Pi}{0,98317 - 3 . \left(\frac{B-A}{C}\right)}.$$

Wenn sich dies Glied auf eine Anzahl Sekunden i beliefe, so würde man

$$\frac{B-A}{C} = \frac{i . 0,32772}{i + 70005''}$$

haben. Da aber die Beobachtungen kein ähnliches Glied zu erkennen gegeben haben, so kann die Zahl i nicht $\pm$ 6000'' übertreffen, und alsdann muſs $\frac{B-A}{C}$ kleiner als 0,030721 seyn.

Man findet unter denjenigen Gliedern des Ausdrucks von u, welche sehr kleine Divisoren haben, nur die jährliche Gleichung, welche ein beträchtliches Glied im Ausdruck von u hervorbringen könnte. Diese Gleichung ist gleich $2064'' . \sin \Pi$, und Π ist hier die mittlere Anomalie der Sonne; man hat ferner

$\frac{d\Pi}{dt} = m \,.\, 0{,}0748$ und folglich $\left(\frac{d\Pi}{dt}\right)^2 = m^2 \,.\, 0{,}005595$; man erhält daher im Ausdruck von u das Argument

$$\frac{3 \,.\, \left(\frac{B-A}{C}\right) \,.\, 2064'' \,.\, \sin \Pi}{0{,}005595 - 3 \,.\, \left(\frac{B-A}{C}\right)}.$$

Wenn sich dies Argument bis auf eine Anzahl Sekunden i beliefe, so würde man

$$\frac{B-A}{C} = \frac{i \,.\, 0{,}001865}{i + 2064''}$$

haben. Dieses Argument muſs sehr wenig beträchtlich seyn, weil man es nicht aus den Beobachtungen erkannt hat; wir werden annehmen, daſs i nicht $\pm$ 6000'' übertrifft. Dann sind die beiden Grenzen von $\frac{B-A}{C}$, wenn i positiv ist, 0 und 0,0013876; und wenn i negativ ist 0,0028430 und ∞; und man hat so eben gesehen, daſs $\left(\frac{B-A}{C}\right)$ nicht 0,030721 übersteigen kann. Es ist aber sehr wahrscheinlich, daſs $\frac{B-A}{C}$ kleiner als 0,0028430, und daſs folglich i positiv ist.

17. Wir wollen nun die zweyte und dritte der Gleichungen (G') des vorhergehenden Satzes betrachten. Da man annimmt, daſs die Neigung θ des Mondäquators gegen die feste Ekliptik sehr klein ist; so werden wir die veränderlichen Gröſsen q und r in andere verwandeln, wodurch die Integration leichter gemacht wird, so wie wir dies schon in einem ähnlichen Fall im 30sten Satze des ersten Buchs gethan haben. Wir setzen daher

$$\theta \,.\, \sin \Phi = s; \qquad \theta \,.\, \cos \Phi = s';$$

dies giebt

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \,.\, \sin \Phi + \theta \,.\, \frac{d\Phi}{dt} \,.\, \cos \Phi;$$

$$\frac{ds'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \,.\, \cos \Phi - \theta \,.\, \frac{d\Phi}{dt} \,.\, \sin \Phi.$$

Man hat aber nach Satz 4., wenn man das Quadrat von θ vernachlässigt,

$$\frac{d\theta}{dt} = r . \sin\phi - q . \cos\phi ;$$

$$\theta . \frac{d\phi}{dt} = \theta . p + q . \sin\phi + r . \cos\phi ;$$

man erhält also

$$\frac{ds}{dt} = ps' + r ; \qquad \frac{ds'}{dt} = - ps - q ;$$

und hieraus

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - p . \frac{ds'}{dt} - s' . \frac{dp}{dt} = \frac{dr}{dt} ;$$

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + p . \frac{ds}{dt} + s . \frac{dp}{dt} = - \frac{dq}{dt} .$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{dr}{dt}$ und von $-\frac{dq}{dt}$ in die beiden letzten der Gleichungen (G') und bemerkt man, daſs man in den Producten von p und von seinen Differenzialen mit den sehr kleinen veränderlichen Gröſsen s und s' und mit ihren Differenzialen, $p = m$ setzen kann, so erhält man

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + m . \frac{ds}{dt} = \left(\frac{C - B}{A}\right) . mr + \frac{3L}{r_{\prime}^{3}} . \left(\frac{B - C}{A}\right) . \left[\begin{array}{l}(Y^2 . \theta + YZ) . \cos\phi \\ -(XY . \theta + XZ) . \sin\phi\end{array}\right] ;$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - m . \frac{ds'}{dt} = \left(\frac{C - A}{B}\right) . mq + \frac{3L}{r_{\prime}^{3}} . \left(\frac{A - C}{B}\right) . \left[\begin{array}{l}(XY . \theta + XZ) . \cos\phi \\ +(Y^2 . \theta + YZ) . \sin\phi\end{array}\right] .$$

Man hat nun

$$r = \frac{ds}{dt} - ms' ; \qquad q = - \frac{ds'}{dt} - ms ;$$

man hat ferner

$$X = r_{\prime} . \cos v ; \qquad Y = r_{\prime} . \sin v ;$$

und nach dem Vorhergehenden ist $v - \phi$ beständig ein sehr kleiner Winkel, so daſs man das Product desselben in die Gröſsen θ und Z vernachlässigen kann; die vorhergehenden Differenzialgleichungen verwandeln sich so, wenn man noch m^2 statt $\frac{L}{r_{\prime}^{3}}$ substituirt, in

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + \left(\frac{A + B - C}{A}\right) . m . \frac{ds}{dt} - m^2 . \left(\frac{B - C}{A}\right) . s' = 0 ;$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \left(\frac{A+B-C}{B}\right).m.\frac{ds'}{dt} - 4m^2.\left(\frac{A-C}{B}\right).s = 3m^2.\left(\frac{A-C}{B}\right).\frac{Z}{r_{\prime}}.$$

$\frac{Z}{r_{\prime}}$ ist die Breite der Erde vom Mond aus gesehen über die feste Ebene, welche Breite der von der Erde aus gesehenen Breite des Mondes gleich und entgegengesetzt ist. Man hat folglich nach Satz 5.

$$\frac{Z}{r_{\prime}} = c'.\sin(mt + g't + \beta') + \Sigma.c.\sin(mt - gt - \beta),$$

wo mt die aus dem Monde gesehene und von der festen Nachtgleiche an gezählte, mittlere Länge der Erde ist, und wo $-g't - \beta'$ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondsbahn auf der beweglichen Ekliptik und in Beziehung auf dieselbe Nachtgleiche ist. Die Funktion $\Sigma.c.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(gt + \beta)$ hängt von der Verrückung der beweglichen Ekliptik ab, und der Koeffizient g ist in Vergleichung mit m und mit g' äuſserst klein. Es seyen daher

$$s = Q.\sin(mt + g't + \beta');$$
$$s' = Q'.\cos(mt + g't + \beta'),$$

die Theile von s und s', welche dem Glied $c'.\sin(mt + g't + \beta')$ des Ausdrucks von $\frac{Z}{r_{\prime}}$ entsprechen, so erhält man

$$Q' = \frac{m.(m+g').(A+B-C).Q}{(m+g')^2.A + m^2.(B-C)},$$

und wenn man

$$E = m^2.(m+g')^2.[(A+B-C)^2 - 4A(A-C) - B.(B-C)]$$
$$- (m+g')^4.AB - 4m^4.(A-C).(B-C)$$

setzt, so findet man

$$Q = \frac{3m^2.(A-C).c'}{E}.[(m+g')^2.A + m^2.(B-C)].$$

Vernachlässigt man im Zähler und Nenner dieses Ausdrucks von Q das Quadrat von $\frac{g'}{m}$, und sein Product in $(A-C)$, $(B-C)$ und $(A-B)$, so erhält man

$$Q = -\frac{3m.(A-C).c'}{3m.(A-C) + 2Ag'}.$$

Man erhält ferner, wenn man g' als sehr klein ansieht, $Q' = Q$.

Es folgt hieraus, daſs die dem obigen Gliede von $\frac{Z}{r,}$ entsprechenden Werthe von s und s' folgende sind, wenn man bemerkt, daſs g in Vergleichung mit $3m.\left(\frac{C-A}{2A}\right)$ unmerklich ist,

$$s = -\frac{3m.(A-C).c'.\sin(mt+g't+\beta')}{3m.(A-C)+2Ag'} - \Sigma.c.\sin(mt-gt-\beta);$$

$$s' = -\frac{3m.(A-C).c'.\cos(mt+g't+\beta')}{3m.(A-C)+2Ag'} - \Sigma.c.\cos(mt-gt-\beta).$$

Diese beiden Werthe von s und s' sind nicht vollständig; man muſs zu ihnen noch die Werthe hinzusetzen, welche sie in dem Fall haben würden, wenn Z gleich Null wäre. Nennt man nun l und l' die beiden positiven Werthe von $m+g'$ in der Gleichung $E=0$, so sieht man leicht, daſs man folgende sehr genäherte Gleichungen erhält:

$$s = P.\sin(lt+I) + P'.\sin(l't+I');$$

$$s' = P.\cos(lt+I) + 2P'.\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}.\cos(l't+I');$$

$$l = m - \tfrac{3}{2}m.\left(\frac{A-C}{A}\right); \quad l' = 2m.\frac{\sqrt{(A-C).(B-C)}}{A},$$

wo P, P', I und I' vier willkührliche beständige Gröſsen sind. Vereinigt man diese Werthe von s und s' mit den vorhergehenden, so erhält man die vollständigen Werthe dieser veränderlichen Gröſsen.

Sollen diese Werthe nicht unbestimmt wachsen, und soll die Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik, den Beobachtungen gemäſs, immer beynahe beständig seyn; so muſs das Product $(A-C).(B-C)$ positiv seyn. Dies findet auch wirklich in der Natur Statt; denn das Moment der Trägheit des Mondes, welches sich auf die dritte Hauptaxe bezieht, um welche er sich dreht, ist gröſser als die Momente A und B, welche sich auf die beiden andern Hauptaxen beziehen, weil der Mond in der Richtung der Pole seiner Umwälzungsaxe mehr abgeplattet seyn muſs, als in jeder andern Richtung.

Will man die veränderlichen Gröſsen s und s' auf die bewegliche Ekliptik beziehen; so nenne man θ, die Neigung des Mondsäquators gegen diese Ekliptik, und ϕ, den Winkelabstand der ersten Hauptaxe vom niedersteigenden

Knoten des Mondäquators in Rücksicht auf dieselbe Ekliptik: dann sieht man leicht, daſs man

$$\theta_{,} . \sin \phi_{,} - \Sigma . c . \sin (gt + \beta) = \theta . \sin \phi;$$
$$\theta_{,} . \cos \phi_{,} - \Sigma . c . \cos (gt + \beta) = \theta . \cos \phi$$

hat; setzt man daher $s_{,} = \theta_{,} . \sin \phi_{,}$; $s_{,}' = \theta_{,} . \cos \phi_{,}$, so erhält man

$$s_{,} = P . \sin(lt + I) + P' . \sin(l't + I') - \frac{3m.(A - C).c'.\sin(mt + g't + \beta')}{3m.(A - C) + 2A.g'};$$

$$s_{,}' = P.\sin(lt + I) + 2P'.\sqrt{\frac{A - C}{B - C}}.\cos(l't + I') - \frac{3m.(A - C).c'.\cos(mt + g't + \beta')}{3m.(A - C) + 2Ag'}.$$

Man sieht so, daſs die Bewegung des Mondäquators auf der wahren oder beweglichen Ekliptik von der Bewegung dieser Ekliptik unabhängig ist, so daſs die mittlere Neigung dieses Aequators gegen die wahre Ekliptik, ungeachtet der Verrückung dieser Ekliptik, immer dieselbe bleibt; weil die Anziehung der Erde auf das Mondsphäroid den Aequator dieses Sphäroids auf denselben Grad der Neigung zurückführt.

Die beiden Werthe von $s_{,}$ und $s_{,}'$ geben

$$\tan \phi_{,} = \frac{\left[\begin{array}{l} 3m.(A - C).c'.\sin(mt + g't + \beta') \\ -[3m.(A - C) + 2Ag'].[P.\sin(lt + I) + P'.\sin(l't + I')] \end{array}\right]}{\left\{\begin{array}{l} 3m.(A - C).c'.\cos(mt + g't + \beta') \\ -[3m.(A - C) + 2Ag'].[P.\cos(lt + I) + 2P'.\sqrt{\frac{A - C}{B - C}}.\cos(l't + I')] \end{array}\right\}}.$$

Man setze zuerst P und P' gleich Null, so erhält man

$$\tan \phi_{,} = \tan(mt + g't + \beta');$$

dies giebt für $\phi_{,}$ einen der folgenden zwey Werthe

$$\phi_{,} = mt + g't + \beta';$$
$$\phi_{,} = \pi + mt + g't + \beta';$$

wo π der halbe Umkreis oder gleich zwey rechten Winkeln ist. Wir bemerken nun, um zu bestimmen, welcher von diesen beiden Werthen in der Natur Statt findet, daſs $- g't - \beta'$ die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondsbahn gegen die wahre Ekliptik ist, und daſs die Beobachtungen uns lehren, daſs diese Länge und die Länge des niedersteigenden Knotens dieses Aequators gegen

gen diese Ekliptik gleich groſs sind. Da nun die Umwälzungsbewegung des Mondes seiner mittlern Umlaufsbewegung gleich ist, und da seine erste Hauptaxe immer sehr nahe gegen die Erde gerichtet ist, so hat man $\phi_{,}$ plus die Länge des niedersteigenden Knotens des Mondäquators gleich mt; man erhält daher

$$\phi_{,} = mt + g't + \beta'.$$

Der erste der beiden Werthe von $\phi_{,}$ ist also der einzige, welchen man brauchen muſs; die Gleichung $s_{,} = \theta_{,} . \sin \phi_{,}$, giebt folglich

$$\theta_{,} = \frac{3m.(C-A).c'}{2Ag' - 3m.(C-A)}.$$

Hieraus findet man

$$\frac{C-A}{A} = \frac{2g'\theta_{,}}{3m.(c'+\theta_{,})}.$$

Mayer hat durch seine Beobachtungen $\theta_{,} = 165'$ (1°, 29′) gefunden; man hat ferner

$$c' = \text{tang } 5^{\circ},7188 \quad \text{und} \quad g' = m . 0{,}004019,$$

folglich

$$\frac{C-A}{A} = 0{,}000599.$$

Die vorhergehenden Resultate haben nur in dem Fall Statt, wenn die willkührlichen Gröſsen P und P' gleich Null sind; wir wollen nun den Fall untersuchen, wo diese willkührlichen Gröſsen zwar nicht Null, aber doch sehr klein sind. Man hat im Allgemeinen

$$\text{tang}(\phi_{,} - mt - g't - \beta') = \frac{\text{tang } \phi_{,} - \text{tang}(mt + g't + \beta')}{1 + \text{tang } \phi_{,} . \text{tang}(mt + g't + \beta')}.$$

Substituirt man im zweyten Theil dieser Gleichung statt tang $\phi_{,}$ seinen vollständigen Werth, und setzt man der Kürze wegen

$$Q = \frac{-3m.(C-A).c'}{2Ag' - 3m.(C-A)},$$

so erhält man

$$\operatorname{tang}(\varphi, - mt - g't - \beta') = \frac{\left\{\begin{array}{l} P \cdot \sin(mt + g't + \beta' - lt - I) \\ + P' \cdot \left[\sqrt{\frac{A-C}{B-C}} + \frac{1}{2}\right] \cdot \sin(mt + g't + \beta' - l't - I') \\ + P' \cdot \left[\sqrt{\frac{A-C}{B-C}} - \frac{1}{2}\right] \cdot \sin(mt + g't + \beta' + l't + I') \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} Q - P \cdot \cos(mt + g't + \beta' - lt - I) \\ - P' \cdot \left[\sqrt{\frac{A-C}{B-C}} + \frac{1}{2}\right] \cdot \cos(mt + g't + \beta' - l't - I) \\ - P' \cdot \left[\sqrt{\frac{A-C}{B-C}} - \frac{1}{2}\right] \cdot \cos(mt + g't + \beta' + l't + I') \end{array}\right\}}.$$

Der Winkel $\varphi, - mt - g't - \beta'$ wird nie einen rechten Winkel weder auf der positiven noch auf der negativen Seite erreichen, wenn der Nenner dieses Bruchs beständig mit Q einerley Zeichen hat, und niemals gleich Null wird; denn es ist sichtbar, daſs dieser Nenner, da die Tangente des rechten Winkels unendlich groſs ist, beym Durchgang des Winkels $\varphi, - mt - g't - \beta$ durch den rechten Winkel gleich Null seyn würde. Man sieht eben so, daſs dieser Nenner, wenn er sein Zeichen änderte, durch Null gehen und die Tangente des Winkels, wovon die Rede ist, unendlich machen würde, welcher alsdann ein rechter Winkel werden würde. Da nun die Beobachtungen zeigen, daſs dies niemals Statt findet: so folgt hieraus, daſs der vorhergehende Nenner beständig mit Q einerley Zeichen hat, und daſs folglich Q gröſser als $P + 2P' \cdot \sqrt{\frac{A-C}{B-C}}$ ist. Da ferner der Winkel $\varphi, - mt - g't - \beta'$ nach den Beobachtungen beständig sehr klein ist; so folgt hieraus, daſs die Gröſsen P und P' in Vergleichung mit Q sehr klein sind. Da aber die Neigung des Mondäquators gegen die wahre Ekliptik gleich $\sqrt{s,^2 + s',^2}$ ist, so ist diese Neigung sehr nahe beständig und gleich Q. Das Phänomen der Uebereinstimmung der Knoten des Mondsäquators und der Mondsbahn, und das Phänomen der Beständigkeit ihrer gegenseitigen Neigung, sind daher nach der Theorie der Schwere unter einander verbunden, und die Beobachtungen, welche sie zu gleicher Zeit geben, bestätigen diese Theorie auf eine bewundernswürdige Art.

Wir haben im 4ten Satz bemerkt, daſs für die Erde die willkührlichen

beständigen Gröſsen, welche von dem ursprünglichen Zustand ihrer Umwälzungsbewegung abhängen, gleich Null oder wenigstens nach den genauesten Beobachtungen unmerklich sind. Man sieht aus dem Vorhergehenden und aus dem 15ten Satze, daſs dasselbe Resultat bey dem Mond Statt findet, und es ist natürlich zu denken, daſs es sich auf alle himmlischen Körper erstreckt. Man begreift nämlich, daſs alle Theile jedes dieser Körper ohne die äuſsern Anziehungen, vermöge der Reibungen und des Widerstandes, welchen sie ihren gegenseitigen Bewegungen entgegensetzen, endlich einen bleibenden Zustand des Gleichgewichts erlangt haben würden, welcher nur bey einer gleichförmigen Umwälzungsbegung um eine unveränderliche Axe bestehen kann; die Beobachtungen müssen daher keine andern Resultate darbieten, als diejenigen, welche aus den äuſsern Anziehungen entspringen.

18. Wir wollen nun sehen, was aus den vorhergehenden Untersuchungen in Rücksicht auf die Gestalt des Mondes flieſst. A und B sind kleiner als C; man hat im 16ten Satz gesehen, daſs B gröſser als A ist, und daſs $\frac{B-A}{C}$ zwischen den Grenzen 0 und 0,0013876 enthalten ist; wir haben endlich im vorhergehenden Satze gefunden, daſs $\frac{C-A}{A}$ sehr nahe gleich 0,000599 ist: dies sind die Resultate der Beobachtungen für die drey Momente der Trägheit A, B, C. Wir wollen sie nun mit denen der Theorie der Gestalt des Mondsphäroids vergleichen.

Substituirt man statt A, B, C ihre im 2ten Satz gegebenen Werthe, so erhält man

$$\frac{B-A}{C} = \frac{15.\alpha.S.\varrho.d.(a^5.Y^{(2)}).d\mu.d\varpi.(1-\mu^2).\cos 2\varpi}{8\pi.S.\varrho.d.a^5};$$

$$\frac{C-A}{A} = \frac{15.\alpha.S.\varrho.d.(a^5.Y^{(2)}).d\mu.d\varpi.[(1-\mu^2).\cos\varpi^2-\mu^2]}{8\pi.S.\varrho.d.a^5}.$$

Die Anziehung der Erde auf den Mond hat auf die Gestalt dieses Satelliten Einfluſs und verlängert sie in der Richtung der gegen diesen Planeten gekehrten Axe. Nimmt man an, daſs der Mond von einem im Gleichgewicht sich befindenden Flüssigen bedeckt wird, und bemerkt man, daſs man annehmen kann, daſs die Erde in der Ebene seines Aequators ist; nimmt man endlich für den ersten Mondsmeridian, in welchem man den Anfangspunkt der Winkel ϖ setzt,

denjenigen an, welcher durch die erste und dritte Hauptaxe geht, und nimmt man zur Einheit die erste halbe Axe an, so findet man nach dem 29sten Satz des dritten Buchs

$$\frac{4\alpha\pi}{5}.S.\varrho.d.(a^5.Y^{(2)}) = \tfrac{4}{3}\alpha\pi.Y^{(2)}.S.\varrho.d.a^3 + \frac{g}{2}.(\mu^2-\tfrac{1}{3}) - \frac{3L}{2r_{,}^{3}}.[(1-\mu^2).\cos\varpi^2-\tfrac{1}{3}].$$

g ist die Mittelpunktsfliehkraft eines Punktes des Mondsäquators; diese Kraft ist in der Entfernung $r_{,}$ vom Mittelpunkt des Mondes gleich $gr_{,}$, und da die Umwälzungsbewegung des Mondes seiner mittlern Umlaufsbewegung gleich ist, so hat man sehr nahe $gr_{,} = \frac{L}{r_{,}^{2}}$. Nennt man λ' das Verhältniſs der Masse der Erde L zu der des Mondes, so hat man

$$L = \tfrac{4}{3}\pi.\lambda'.S.\varrho.d.a^3.$$

Bemerkt man nun, daſs $Y^{(2)}$ nach Satz 32. von der Form $-h.(\mu^2-\tfrac{1}{3}) + h''''.(1-\mu^2).\cos 2\varpi$ ist, so erhält man

$$\alpha.S.\varrho.d.(a^5.Y^{(2)}) = \tfrac{5}{3}.\left(\alpha h - \frac{5\lambda'}{4r_{,}^{3}}\right).(\tfrac{1}{3}-\mu^2).S.\varrho.d.a^3$$

$$+ \tfrac{5}{3}.\left(\alpha h'''' - \frac{3\lambda'}{4r_{,}^{3}}\right).(1-\mu^2).\cos 2\varpi.S.\varrho.d.a^3; \quad \text{(i)}$$

und folglich

$$\frac{B-A}{C} = \tfrac{10}{3}\left(\alpha h'''' - \frac{3\lambda'}{4r_{,}^{3}}\right).\frac{S.\varrho.d.a^3}{S.\varrho.d.a^5};$$

$$\frac{C-A}{A} = \tfrac{5}{3}\left(\alpha h + \alpha h'''' - \frac{2\lambda'}{r_{,}^{3}}\right).\frac{S.\varrho.d.a^3}{S.\varrho.d.a^5}.$$

Ist der Mond gleichartig, so giebt die Gleichung (i)

$$\alpha Y^{(2)} = \tfrac{5}{3}\left(\alpha h - \frac{5\lambda'}{4r_{,}^{3}}\right).(\tfrac{1}{3}-\mu^2) + \tfrac{5}{3}\left(\alpha h'''' - \frac{3\lambda'}{4r_{,}^{3}}\right).(1-\mu^2).\cos 2\varpi.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem folgenden

$$\alpha Y^{(2)} = \alpha h.(\tfrac{1}{3}-\mu^2) + \alpha h''''.(1-\mu^2).\cos 2\varpi,$$

so findet man

$$\alpha h = \frac{25\lambda'}{8r_{,}^{3}}; \quad \alpha h'''' = \frac{15\lambda'}{8r_{,}^{3}} = \tfrac{3}{5}\alpha h.$$

Man kann hier bemerken, daſs $\alpha h + \alpha h''''$ den Ueberschuſs der ersten halben Axe, welche nach der Erde gekehrt ist, über die halbe Polaraxe ausdrückt, und

daſs $\alpha h - \alpha h''''$ den Ueberschuſs der zweyten halben Hauptaxe über die Polaraxe ausdrückt; diese Ueberschüsse sind im Fall der Gleichartigkeit $\frac{40\lambda'}{8.r_{,}^{3}}$ und $\frac{10\lambda'}{8.r_{,}^{3}}$, und der erste ist also viermal so groſs als der zweyte. Man hat in demselben Fall,

$$\frac{B-A}{C} = \frac{15\lambda'}{4r_{,}^{3}}; \quad \frac{C-A}{A} = \frac{5\lambda'}{r_{,}^{3}}.$$

$\frac{1}{r_{,}}$ ist der scheinbare Halbmesser des Mondes, dessen wahren Halbmesser wir zur Einheit angenommen haben; dieser Halbmesser ist nach den Beobachtungen gleich 2912″ (15′. 43″,5), man kann daher $\frac{1}{r_{,}} = \sin 2912''$ setzen; dies giebt

$$\frac{B-A}{C} = 0,0000003618.\lambda'; \quad \frac{C-A}{A} = 0,0000004824.\lambda';$$

es geschieht alsdann den Bedingungen, daſs A und B kleiner als C, und daſs B gröſser als A ist, Genüge. Wir haben im vierten Buche gesehen, daſs die Erscheinungen der Ebbe und Fluth $\lambda' = 59$ geben, und die Bedingung daſs $\frac{B-A}{C}$ kleiner als 0,0013564 ist, findet sich dann auch noch erfüllt; die Bedingung aber, daſs $\frac{C-A}{A}$ sehr nahe gleich 0,000599, ist bey weitem nicht erfüllt; man würde ihr selbst nicht Genüge thun, wenn man $\lambda' = 1000$ setzen wollte. Es folgt hieraus, daſs der Mond nicht gleichartig ist, oder daſs er sich sehr von der Gestalt entfernt, welche er annehmen würde, wenn er flüssig wäre.

Beſtände der Mond aus Lagen von veränderlicher Dichte, welche ursprünglich flüssig gewesen wären, und hätte er die Gestalt des Gleichgewichts behalten, welche er alsdann annehmen muſste; so folgt aus dem 30sten Satze des dritten Buchs, daſs der Halbmesser des Mondsphäroids in diesem Fall, so wie im Fall der Gleichartigkeit, von der Form

$$1 + \alpha h.(\tfrac{1}{3} - \mu^2) + \tfrac{3}{4}\alpha.h.(1-\mu^2).\cos 2\varpi$$

ist; und der Ueberschuſs der halben gegen die Erde gekehrten Hauptaxe über die halbe Polaraxe ist dann viermal so groſs, als der Ueberschuſs der zweyten

halben Hauptaxe über die halbe Polaraxe, so wie im Fall der Gleichartigkeit. Die Gleichung (i) giebt

$$\alpha h - \tfrac{3}{5} \cdot \frac{\alpha . S . \varrho . d . (a^5 h)}{S . \varrho . d . a^3} = \frac{5 \lambda'}{4 r_{,}^3}.$$

Man hat im angeführten Satze des dritten Buchs gesehen, daſs die Werthe von h vom Mittelpunkt zur Oberfläche zunehmen, während daſs die Dichten abnehmen, so daſs man an der Oberfläche

$$S . \varrho . d . (a^5 . h) = (1 - q) . h . S . \varrho . d . a^5$$

setzen kann, wo q positiv ist; man erhält so

$$\alpha h = \frac{\tfrac{5}{4} . \frac{\lambda'}{r_{,}^3}}{1 - \tfrac{3}{5} . (1 - q) . \frac{S . \varrho . d . a^5}{S . \varrho . d . a^3}}.$$

Nun hat man aber $h'''' = \tfrac{3}{5} h$; folglich

$$\frac{B - A}{C} = \frac{\tfrac{3}{2} . \frac{\lambda'}{r_{,}^3} . (1 - q) . S . \varrho . d . a^5}{S . \varrho . d . a^3 - \tfrac{3}{5} . (1 - q) . S . \varrho . d . a^5};$$

$$\frac{C - A}{A} = \frac{\frac{2 \lambda'}{r_{,}^3} . (1 - q) . S . \varrho . d . a^5}{S . \varrho . d . a^3 - \tfrac{3}{5} . (1 - q) . S . \varrho . d . a^5}.$$

Man sieht leicht, daſs der Werth von $\frac{C - A}{A}$ im Fall der Gleichartigkeit am gröſsten ist, weil $S . \varrho . d . a^3$ gröſser als $S . \varrho . d . a^5$ ist, da die Dichten vom Mittelpunkt zur Oberfläche abnehmen. Wir haben aber so eben gesehen, daſs der Werth von $\frac{C - A}{A}$ beträchtlich kleiner als nach den Beobachtungen ist, wenn der Mond gleichartig ist; der Mond hat daher nicht die Gestalt des Gleichgewichts, welche er angenommen haben würde, wenn er ursprünglich flüssig gewesen wäre.

Man kann eine unendliche Menge Hypothesen erdenken, in welchen die Trägheitsmomente A, B, C den vorhergehenden Bedingungen Genüge thun: die hohen Gebürge und die andern Ungleichheiten, welche man auf der Oberfläche des Mondes bemerkt, haben ohne Zweifel auf die Unterschiede dieser Momente

einen sehr merklichen Einfluſs, welcher um desto gröſser ist, da die Abplattung des Mondsphäroids sehr klein, und seine Masse wenig beträchtlich ist.

19. Wir haben nun noch den Einfluſs der Wirkung der Sonne auf die Bewegung des Mondsäquators zu betrachten: man kann sich aber leicht überzeugen, daſs er unbeträchtlich ist, ohne sich auf eine Untersuchung dieser Wirkung einzulassen. Denn wenn S die Masse der Sonne und r'' ihre mittlere Entfernung vom Mond oder von der Erde ausdrückt, so ist diese Wirkung von der Ordnung $\frac{S}{r''^3}$; sie hat folglich zur Wirkung der Erde auf den Mond das Verhältniſs $\frac{S}{r''^3}$ zu $\frac{L}{r_,^3}$: die Theorie der Centralkräfte giebt aber dieses Verhältniſs gleich dem Quadrat der Syderal-Umlaufszeit des Mondes durch das Quadrat der Syderal-Umlaufszeit der Erde dividirt, das heiſst, ungefähr gleich $\frac{1}{178}$; man sieht hieraus, daſs die Wirkung der Sonne auf das Mondsphäroid in Vergleichung mit der Wirkung der Erde auf dasselbe Sphäroid vernachlässigt werden kann.

Drittes Kapitel.

Von der Bewegung der Saturnsringe um ihre Schwerpunkte.

20. Wir haben, als wir von der Gestalt der Saturnsringe handelten, gesehen, daſs jeder Ring ein fester Körper ist, dessen Mittelpunkt beynahe mit dem Mittelpunkte Saturns zusammenfällt, dessen Schwerpunkt aber sich in einem verschiedenen Punkte finden kann und finden muſs. Dieser Schwerpunkt und der Ring drehen sich in derselben Zeit um den Planeten, und man sieht leicht, daſs der Ring sich in der nämlichen Zeit um seinen Schwerpunkt und um Saturn drehet. Die Wirkung der Sonne und der Satelliten auf diese Ringe muſs bey ihren Ebenen Bewegungen hervorbringen, welche denen der Präcession des Erdäquators ähnlich sind, und da diese Wirkung für jeden dieser Ringe verschieden ist, so scheint es, daſs diese Bewegungen verschieden seyn müssen, und daſs folglich die Ringe endlich aufhören müssen in derselben Ebene zu seyn, welches den Beobachtungen entgegen zu seyn scheint. Denn obgleich nur zwey Jahrhunderte seit ihrer Entdeckung verflossen sind, so müſste man doch annehmen, wenn sie nicht genöthigt wären sich in derselben Ebene zu bewegen, daſs ihre Ebenen gerade zur Zeit ihrer Entdeckung zusammen fielen, welches sehr wenig wahrscheinlich ist; es giebt daher sehr wahrscheinlich eine Ursache, welche sie in einer festen und unveränderlichen Ebene erhält. Welches ist aber diese Ursache? diese Untersuchung ist der Gegenstand der folgenden Analysis.

21. Wir können auch hier die Gleichungen (D′) des ersten Satzes gebrauchen. Wir wollen die Werthe von dN, dN' und dN'' theils in Beziehung auf

auf die Wirkung Saturns auf einen Ring, theils auf die Wirkung eines entfernten Gestirns L bestimmen. Wir wollen zuerst die Wirkung Saturns betrachten, und V die Summe aller Theilchen Saturns nennen, jedes durch seine respective Entfernung von irgend einem Theilchen dm des Ringes dividirt; es sey r' der Radius vector, welcher dies Theilchen mit dem Mittelpunkt Saturns verbindet, und μ der Kosinus des Winkels, welchen dieser Radius mit der Umdrehungsaxe Saturns macht. Man bezeichne den Halbmesser des Saturnsphäroids durch

$$1 + \alpha Y^{(2)} + \alpha Y^{(3)} + \alpha Y^{(4)} + \text{etc.}$$

und durch $\alpha\phi'$ das Verhältniſs der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unter seinem Aequator, so erhält man, wenn man die Masse Saturns zur Einheit annimmt, nach dem 35sten Satze des dritten Buchs

$$V = \frac{1}{r'} + \frac{\alpha.[Y^{(2)} + \frac{1}{2}\phi'.(\mu^2 - \frac{1}{3})]}{r'^3} + \frac{\alpha Y^{(3)}}{r'^4} + \frac{\alpha Y^{(4)}}{r'^5} + \text{etc.}$$

Dieser Werth von V reducirt sich nahe auf seine beiden ersten Glieder, wenn r' ein wenig groſs ist in Vergleichung mit dem Halbmesser des Sphäroids Saturns, welcher hier zur Einheit der Entfernungen angenommen worden. Wäre überdies dieser Planet ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid, welche Voraussetzung natürlich ist, so hätte man $Y^{(3)} = 0$, $Y^{(4)} = 0$ etc.; dadurch wird die Reduction von V auf seine beiden ersten Glieder genau. Man kann daher

$$V = \frac{1}{r'} + \frac{\alpha Y^{(2)} + \frac{1}{2}\alpha\phi'.(\mu^2 - \frac{1}{3})}{r'^3}$$

setzen. Die Funktion $Y^{(2)}$ läſst sich auf folgende Form bringen, wie man im 2ten Satz gesehen hat,

$$Y^{(2)} = h.(\tfrac{1}{3} - \mu^2) + h''''.(1 - \mu^2).\cos 2\varpi.$$

Ist Saturn ein durch Umdrehung entstandener fester Körper, so ist h'''' gleich Null; man kann sich aber leicht versichern, daſs der Einfluſs dieser Gröſse auf die Bewegung des Ringes selbst in dem Fall unmerklich ist, wenn sie mit h vergleichbar ist, weil die Umwälzungsbewegung Saturns so schnell ist. Wir werden daher $h'''' = 0$ und folglich

$$V = \frac{1}{r'} - \frac{(\alpha h - \frac{1}{2}\alpha\phi').(\mu^2 - \frac{1}{3})}{r'^3}$$

setzen, wo αh offenbar die Abplattung Saturns ist.

Da nun x', y', z' die Koordinaten des Theilchens dm in Beziehung auf den Schwerpunkt des Ringes sind, so hat man nach Satz 3.

$$\frac{dN}{dt} = S.dm.\left[x'.\left(\frac{dV}{dy'}\right) - y'.\left(\frac{dV}{dx'}\right)\right];$$

$$\frac{dN'}{dt} = S.dm.\left[x'.\left(\frac{dV}{dz'}\right) - z'.\left(\frac{dV}{dx'}\right)\right];$$

$$\frac{dN''}{dt} = S.dm.\left[y'.\left(\frac{dV}{dz'}\right) - z'.\left(\frac{dV}{dy'}\right)\right].$$

Wir werden, um V zu bestimmen, auf die Breite des Ringes nicht Rücksicht nehmen, welchen wir folglich als einen Kreis ansehen werden, der in verschiedenen Theilen seines Umfangs ungleiche Dichte hat, und dessen Mittelpunkt sehr nahe mit dem Mittelpunkt Saturns zusammenfällt. Bezeichnet man die Koordinaten des Schwerpunktes des Ringes in Beziehung auf den Mittelpunkt Saturns durch X, Y, Z, so werden $X + x'$; $Y + y'$; $Z + z'$ die Koordinaten des Theilchens dm in Beziehung auf denselben Punkt seyn. Nimmt man nun den Aequator Saturns, welchen wir anfangs als unveränderlich ansehen werden, als die Ebene der x' und der y' an, so hat man

$$r' = \sqrt{(X + x')^2 + (Y + y')^2 + (Z + z')^2}; \quad \mu^2 = \frac{Z + z'}{r'}.$$

Nennt man $x_,$, $y_,$, $z_,$ die Koordinaten des Mittelpunkts des Umkreises des Ringes in Beziehung auf den Mittelpunkt Saturns; nimmt man an, dafs diese Koordinaten klein genug sind, um ihre Quadrate und ihre Producte in α vernachlässigen zu können, so hat man

$$r' = r_,' + \frac{x_,.(X + x') + y_,.(Y + y') + z_,.(Z + z')}{r_,'},$$

wo $r_,'$ der Halbmesser des Umkreises des Ringes ist; bemerkt man ferner, dafs man durch die Natur des Schwerpunkts des Ringes $\int x'dm = 0$; $\int y'dm = 0$; $\int z'dm = 0$ hat, so erhält man

$$\frac{dN}{dt} = 0;$$

$$\frac{dN'}{dt} = -\frac{2\alpha.(h - \frac{1}{2}\Phi')}{r_,'^5}.\int x'z'.dm;$$

$$\frac{dN''}{dt} = -\frac{2\alpha.(h - \frac{1}{2}\Phi')}{r_,'^5}.\int y'z'.dm.$$

Man gedenke sich, dafs die Neigung θ der Ebene des Ringes gegen die Ebene

des Aequators sehr klein ist, so daſs man ihr Quadrat vernachlässigen kann, welches eben so viel ist, als $\sin\theta = \theta$ und $\cos\theta = 1$ zu setzen. Man nehme ferner als Axe der x' den Durchschnitt der Ebene des Ringes mit der Ebene des Saturnäquators an; dann werden die Werthe von x', y', z' des 26sten Satzes des ersten Buchs sich in folgende verwandeln:

$$x' = x'' \cdot \cos\phi - y'' \cdot \sin\phi;$$
$$y' = x'' \cdot \sin\phi + y'' \cdot \cos\phi + z'' \cdot \theta;$$
$$z' = z'' - y'' \cdot \theta \cdot \cos\phi - x'' \cdot \theta \cdot \sin\phi.$$

Hieraus erhält man durch denselben Satz,

$$\frac{dN}{dt} = 0;$$

$$\frac{dN'}{dt} = \frac{\alpha \cdot (h - \frac{1}{2}\phi')}{r_{,}'^{5}} \cdot (B - A) \cdot \theta \cdot \sin 2\phi;$$

$$\frac{dN''}{dt} = -\frac{\alpha \cdot (h - \frac{1}{2}\phi')}{r_{,}'^{5}} \cdot (A + B - 2C) \cdot \theta - \frac{\alpha \cdot (h - \frac{1}{2}\phi')}{r_{,}'^{5}} \cdot (B - A) \cdot \theta \cdot \cos 2\phi.$$

Man betrachte nun die Werthe von $\frac{dN}{dt}$, $\frac{dN'}{dt}$ und $\frac{dN''}{dt}$, welche sie in Beziehung auf die Wirkung eines vom Ring entfernten Gestirns erhalten. Nennt man X'', Y'', Z'' die drey Koordinaten dieses Gestirns in Beziehung auf den Schwerpunkt des Ringes und parallel mit seinen drey Hauptaxen; und r'' seine Entfernung von diesem Punkt, so hat man nach dem 3ten Satz, wenn man die Werthe von dN, dN' und dN'' auf dieselben Koordinaten bezieht,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{3L}{r''^{5}} \cdot (B - A) \cdot X''Y'';$$

$$\frac{dN'}{dt} = \frac{3L}{r''^{5}} \cdot (C - A) \cdot X''Z'';$$

$$\frac{dN''}{dt} = \frac{3L}{r''^{5}} \cdot (C - B) \cdot Y''Z''.$$

Wir können ohne merklichen Irrthum in diesen Ausdrücken annehmen, daſs der Anfangspunkt der Koordinaten X'', Y'', Z'', so wie der Anfangspunkt der r'', im Mittelpunkt Saturns selbst ist. Man nenne X', Y', Z' die Koordinaten des Gestirns L auf die Ebene des Saturnäquators bezogen, wo die Axe der X' die Durchschnittslinie der Ebene des Aequators mit der Ebene des Ringes ist: so

wird man zwischen X', Y', Z', X'', Y'', Z'' dieselben Verhältnisse haben, wie im Vorhergehenden zwischen x', y', z', x'', y'', z''; hieraus findet man

$$X'' = X' . \cos\phi + Y' . \sin\phi - \theta . Z' . \sin\phi;$$
$$Y'' = Y' . \cos\phi - X' . \sin\phi - \theta . Z' . \cos\phi;$$
$$Z'' = Z' + \theta . Y';$$

und folglich

$$X''.Y'' = \left(\frac{Y'^2 - X'^2}{2}\right).\sin 2\phi + X'.Y'.\cos 2\phi - \theta.Z'.(Y'.\sin 2\phi + X'.\cos 2\phi);$$
$$X''.Z'' = Z'.Y'.\sin\phi + Z'.X'.\cos\phi + \theta.[(Y'^2 - Z'^2).\sin\phi + X'.Y'.\cos\phi];$$
$$Y''.Z'' = Z'.Y'.\cos\phi - Z'.X'.\sin\phi + \theta.[(Y'^2 - Z'^2).\cos\phi - X'.Y'.\sin\phi].$$

Man nenne v den Winkel, welchen der Halbmesser r'' mit der Durchschnittslinie der Bahn von L und des Saturnäquators macht; es sey ψ der Winkel, welchen der Durchschnitt der Ebene des Ringes und des Aequators mit dieser Durchschnittslinie macht; und θ' die Neigung der Bahn von L gegen die Ebene des Saturnäquators, so hat man

$$X' = r'' . \cos v . \cos\psi - r'' . \sin v . \cos\theta' . \sin\psi;$$
$$Y' = r'' . \sin v . \cos\theta' . \cos\psi + r'' . \cos v . \sin\psi;$$
$$Z' = r'' . \sin v . \sin\theta';$$

dies giebt, wenn man die von den Sinus und Kosinus des Winkels v und seiner Vielfachen und die vom Winkel 2ϕ abhängenden Glieder vernachlässigt, weil alle diese Glieder nach den Integrationen unmerklich bleiben,

$$X'' Y'' = 0;$$

$$X'' Z'' = \frac{r''^2}{2} . \sin\theta' . \cos\theta' . \sin(\phi - \psi) + \frac{r''^2 . \theta}{2} . (\cos\theta'^2 - \tfrac{1}{2}\sin\theta'^2) . \sin\phi$$
$$- \frac{r''^2}{4} . \theta . \sin\theta'^2 . \sin(\phi - 2\psi);$$

$$Y'' Z'' = \frac{r''^2}{2} . \sin\theta' . \cos\theta' . \cos(\phi - \psi) + \frac{r''^2 . \theta}{2} . (\cos\theta'^2 - \tfrac{1}{2}\sin\theta'^2) . \cos\phi$$
$$- \frac{r''^2}{4} . \theta . \sin\theta'^2 . \cos(\phi - 2\psi).$$

Man erhält folglich durch die Wirkung des Gestirns L

$$\frac{dN}{dt} = 0;$$

$$\frac{dN'}{dt} = \frac{3L}{2r''^3}.(C-A).\begin{bmatrix}\sin\theta'.\cos\theta'.\sin(\phi-\psi) + (\cos\theta'^2 - \frac{1}{2}\sin\theta'^2).\theta.\sin\phi \\ -\frac{1}{2}\theta.\sin\theta'^2.\sin(\phi-2\psi)\end{bmatrix};$$

$$\frac{dN''}{dt} = \frac{3L}{2r''^3}.(C-B).\begin{bmatrix}\sin\theta'.\cos\theta'.\cos(\phi-\psi) + (\cos\theta'^2 - \frac{1}{2}\sin\theta'^2).\theta.\cos\phi \\ -\frac{1}{2}\theta.\sin\theta'^2.\cos(\phi-2\psi)\end{bmatrix}.$$

Man muſs hier bemerken, daſs diese Werthe von $\frac{dN'}{dt}$ und $\frac{dN''}{dt}$ sich auf die Ebene des Ringes selbst und auf seine Hauptaxen beziehen, da hingegen die vorhergehenden aus der Wirkung Saturns entstehenden Werthe sich auf die Ebene des Aequators Saturns beziehen. Man muſs daher, wenn man die vorhergehenden Werthe für die Wirkung Saturns in die Gleichungen (B') des ersten Satzes substituirt, $\sin\theta = \theta$ und $\cos\theta = 1$ wegen der Kleinheit von θ setzen, dessen Quadrat wir vernachlässigen; wenn man aber in dieselbe Gleichung die vorhergehenden Werthe von $\frac{dN'}{dt}$ und $\frac{dN''}{dt}$ für die Wirkung des Gestirns L setzt; so muſs man vorher in diesen Gleichungen $\sin\theta = 0$; $\cos\theta = 1$; $\sin\phi = 0$ und $\cos\phi = 1$ setzen. Man erhält so, wenn man alle diese Werthe vereinigt:

$$\frac{dp}{dt} + \left(\frac{B-A}{C}\right).qr = 0;$$

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} + \left(\frac{C-B}{A}\right).rp = {} & \frac{2\alpha.(h-\frac{1}{2}\phi')}{r_,'^5}.\left(\frac{C-B}{A}\right).\theta.\cos\phi \\ & + \frac{3L}{2r''^3}.\left(\frac{C-B}{A}\right).(\cos\theta'^2 - \tfrac{1}{2}\sin\theta'^2).\theta.\cos\phi \\ & + \frac{3L}{2r''^3}.\left(\frac{C-B}{A}\right).[\sin\theta'.\cos\theta'.\cos(\phi-\psi) - \tfrac{1}{2}\theta.\sin\theta'^2.\cos(\phi-2\psi)];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} + \left(\frac{A-C}{B}\right).pq = {} & \frac{2\alpha.(h-\frac{1}{2}\phi')}{r_,'^5}.\left(\frac{A-C}{B}\right).\theta.\sin\phi \\ & + \frac{3L}{2r''^3}.\left(\frac{A-C}{B}\right).(\cos\theta'^2 - \tfrac{1}{2}\sin\theta'^2).\theta.\sin\phi \\ & + \frac{3L}{2r''^3}.\left(\frac{A-C}{B}\right).[\sin\theta'.\cos\theta'.\sin(\phi-\psi) - \tfrac{1}{2}\theta.\sin\theta'^2.\sin(\phi-2\psi)].\end{aligned}$$

Da r und q als sehr klein angenommen werden, so kann man das Product $\left(\frac{B-A}{C}\right).rq$ vernachlässigen; dies giebt $\frac{dp}{dt} = 0$ oder p beständig. Wir

setzen ferner, wie im 17ten Satz,

$$\theta \,.\, \sin \phi = s; \qquad \theta \,.\, \cos \phi = s';$$

dies giebt nach dem angeführten Satze

$$r = \frac{ds}{dt} - ps'; \qquad q = -\frac{ds'}{dt} - ps.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehenden Differenzialgleichungen für q und für r, so verwandeln sie sich in folgende:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \left(\frac{C-B-A}{B}\right) . p . \frac{ds'}{dt} + \left(\frac{C-A}{B}\right) . \varepsilon^2 . s$$

$$= \frac{3L}{2r''^3} . \left(\frac{A-C}{B}\right) . [\sin \theta' \,.\, \cos \theta' \,.\, \sin(\phi - \psi) - \tfrac{1}{2}\theta . \sin \theta''^2 . \sin(\phi - 2\psi)];$$

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} - \left(\frac{C-B-A}{A}\right) . p . \frac{ds}{dt} + \left(\frac{C-B}{A}\right) . \varepsilon^2 . s'$$

$$= \frac{3L}{2r''^3} . \left(\frac{B-C}{A}\right) . [\sin \theta' . \cos \theta' . \cos(\phi - \psi) - \tfrac{1}{2}\theta . \sin \theta''^2 . \cos(\phi - 2\psi)];$$

wo ε^2 gleich

$$p^2 + \frac{2\alpha . (h - \frac{1}{2}\phi')}{r'^5_{\prime}} + \frac{3L}{2r''^3} . (\cos \theta''^2 - \tfrac{1}{2} \sin \theta''^2)$$

ist. Die vorhergehenden Gleichungen vereinfachen sich, wenn man bemerkt, daſs man im gegenwärtigen Fall nach dem 26sten Satze des ersten Buchs $A + B = C$ hat; dadurch verwandeln sich diese Gleichungen in die folgenden, wenn man in ihren zweyten Theilen die in θ multiplicirten Glieder vernachlässigt,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \varepsilon^2 s = -\frac{3L}{2r''^3} . \sin \theta' . \cos \theta' . \sin(\phi - \psi);$$

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + \varepsilon^2 s' = -\frac{3L}{2r''^3} . \sin \theta' . \cos \theta' . \cos(\phi - \psi).$$

Sieht man die Bahn von L als unveränderlich an, so hat man nach Satz 4.

$$d\phi - d\psi = p\,dt,$$

und folglich

$$\phi - \psi = pt + I,$$

wo I eine willkührliche Gröſse ist. Die Differenzialgleichungen für s und s'

verwandeln sich so, wenn man sie integrirt, in [123])

$$s = M.\sin(\varepsilon t + E) - \frac{\frac{3L}{2r''^3} \cdot \sin\theta' \cdot \cos\theta'}{\varepsilon^2 - p^2} \cdot \sin(\phi - \psi);$$

$$s' = M'.\cos(\varepsilon t + E') - \frac{\frac{3L}{2r''^3} \cdot \sin\theta' \cdot \cos\theta'}{\varepsilon^2 - p^2} \cdot \cos(\phi - \psi);$$

wo M, E, M', E' vier willkührliche Gröſsen sind. Die Neigung der Ebene des Ringes gegen die Ebene des Saturnäquators ist gleich $\sqrt{s^2 + s'^2}$; soll daher diese Neigung immer sehr klein bleiben, so müssen M und M' sehr klein seyn, und der Koeffizient $\frac{\frac{3L}{2r''^3} \cdot \sin\theta' \cdot \cos\theta'}{\varepsilon^2 - p^2}$ muſs wenig beträchtlich seyn. Dies würde aber nicht Statt finden, wenn Saturn vollkommen sphärisch wäre; denn alsdann würde man

$$\varepsilon^2 - p^2 = \frac{3L}{2r''^3} \cdot (\cos\theta'^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \sin\theta'^2)$$

123) Da das zweyte Differenzial eines Sinus ebenfalls ein Sinus ist, so muſs s ein Glied von der Form $\alpha . \sin(\varphi - \psi)$ enthalten. Um den Koeffizienten α zu bestimmen, substituire man dies Glied statt s in die gegebene Differenzialgleichung, wobey zu bemerken, daſs $\frac{d^2 s}{dt^2} = -\alpha \left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] . \sin(\varphi - \psi)$ $= -\alpha p^2 . \sin(\varphi - \psi)$ ist; man findet so

$$-\alpha p^2 . \sin(\varphi - \psi) + \alpha \varepsilon^2 . \sin(\varphi - \psi) = -\frac{3L}{2r''^3} . \sin\theta' . \cos\theta' . \sin(\varphi - \psi),$$

und hieraus $\alpha = \frac{-\frac{3L}{2r''^3} . \sin\theta' . \cos\theta'}{\varepsilon^2 - p^2}$, und

$$s = -\frac{\frac{3L}{2r''^3} . \sin\theta' . \cos\theta'}{\varepsilon^2 - p^2} . \sin(\varphi - \psi).$$

Dies ist aber nicht der vollständige Werth von s, welches man schon daraus vermuthen kann, daſs dieser Werth von s nicht zwey willkührliche Gröſsen enthält. Nun ist das Integral der Gleichung $\frac{d^2 s}{dt^2} + \varepsilon^2 s = 0$, bekanntlich $s = M . \sin(\varepsilon t + E)$, wo M und E zwey willkührliche beständige Gröſsen sind; vereinigt man diesen Werth von s mit dem Vorhergehenden, so erhält man den vollständigen Werth von s. Man findet auf dieselbe Art den Werth von s'.

haben, und der vorhergehende Koeffizient würde gleich $\frac{\sin\theta' \cdot \cos\theta'}{\cos\theta'^2 - \frac{1}{2}\sin\theta'^2}$ und folglich sehr beträchtlich werden.

Wäre Saturn vermöge einer Umwälzungsbewegung abgeplattet, so würde dieser Koeffizient gleich

$$\frac{\frac{3L}{2r''^3} \cdot \sin\theta' \cdot \cos\theta'}{\frac{2a.(h - \frac{1}{2}\Phi')}{r'^5_{,}} + \frac{3L}{2r''^3} \cdot (\cos\theta'^2 - \frac{1}{2}\sin\theta'^2)}$$

werden. Man nehme an, daſs L die Sonne und $r_{,}$ die Entfernung des Saturnsmittelpunkts von seinem äuſsersten Satelliten sey; man nenne T die Syderal-Umlaufszeit Saturns, und T' die Syderal-Umlaufszeit seines äuſsersten Satelliten, so hat man nach dem 25sten Satze des zweyten Buchs, wenn man die Masse Saturns zur Einheit annimmt,

$$\frac{L}{r''^3} = \frac{1}{r_{,}^3} \cdot \left(\frac{T'}{T}\right)^2;$$

dadurch verwandelt sich der vorhergehende Koeffizient in folgenden:

$$\frac{\frac{3r'^5_{,}}{4r_{,}^3} \cdot \left(\frac{T'}{T}\right)^2 \cdot \sin\theta' \cdot \cos\theta'}{a.(h - \frac{1}{2}\Phi') + \frac{3r'^5_{,}}{4r_{,}^3} \cdot \left(\frac{T'}{T}\right)^2 \cdot (\cos\theta'^2 - \frac{1}{2}\sin\theta'^2)}.$$

Die Beobachtungen geben, wenn man den Halbmesser Saturns zur Einheit annimmt,

$$T = 10759^{tag},08;$$
$$T' = 79^{tag},5296;$$
$$r_{,} = 59,154;$$
$$\theta' = 33^{c};$$

wir werden ferner $r_{,}' = 2$ setzen, welches sehr wenig von der Wahrheit verschieden ist; man erhält so den Koeffizienten, wovon die Rede ist, in Sekunden ausgedrückt, gleich

$$\frac{0'',001727}{a.(h - \frac{1}{2}\Phi') + 0,0000000039824}.$$

Man sieht hieraus, daſs dieser Koeffizient, welcher sehr beträchtlich seyn würde, wenn

wenn $\alpha.(h - \frac{1}{2}\Phi')$ gleich Null wäre, sehr klein wird, wenn diese Gröſse einen merklichen Werth hat. Die Wirkung Saturns erhält dann den Ring immer nahe in der Ebene seines Aequators, und die verschiedenen Saturnsringe werden folglich dadurch in einer Ebene erhalten. Dies ist also die Ursache dieser Erscheinung, aus welcher ich die Umwälzungsbewegung Saturns erkannt hatte, ehe man sie durch die Beobachtung der Flecken bemerkt hatte.

22. Man kann leicht aus der vorhergehenden Analysis sehen, daſs die Wirkung des fünften Saturnssatelliten die verschiedenen Ringe dieses Planeten, nicht merklich aus einer und derselben Ebene bringen kann. Was die gegenseitige Wirkung der Ringe und die Wirkung derjenigen Satelliten betrifft, welche sich sehr nahe in ihrer Ebene bewegen, so ist klar, daſs sie die Uebereinstimmung der Ebenen dieser Ringe nicht ändern können.

Da man einen Ring als eine Vereinigung von Satelliten ansehen kann, so begreift man, daſs die Wirkung des Saturnäquators, welche diese verschiedenen Ringe in seiner Ebene erhält, auch die Bahnen der Satelliten, welche sich ursprünglich in dieser Ebene befanden, in ihr erhalten muſs. Und umgekehrt, wenn sich die verschiedenen Satelliten eines Planeten in einer sehr gegen die Ebene seiner Bahn geneigten Ebene bewegen; so kann man daraus schlieſsen, daſs sie in ihr durch die Wirkung seines Aequators erhalten werden, und daſs folglich dieser Planet eine Umwälzungsbewegung um eine Axe hat, welche fast senkrecht auf die Ebene der Bahnen seiner Satelliten ist. Man kann daher versichern, daſs der Planet Uranus, dessen Satelliten sich sämmtlich in einer fast senkrechten Ebene auf die Ekliptik bewegen, sich selbst um eine Axe dreht, die sehr wenig gegen die Ekliptik geneigt ist.

Da die Glieder des Ausdrucks von θ, welche von der Wirkung der Sonne und des äuſsersten Saturnssatelliten abhängen, unmerklich sind, und da die Abmessungen des Ringes sich nicht in den übrigen Gliedern befinden, so ist klar, daſs wenn verschiedene concentrische Ringe fest untereinander verbunden sind, und sich nahe in der Ebene des Saturnäquators bewegen, daſs die Wirkung der Sonne und des äuſsersten Satelliten sie nicht merklich von dieser Ebene entfernen können. Dies Resultat, welches wir für einen Ring ohne auf seine Breite

Rücksicht zu nehmen, gefunden haben, gilt also ebenfalls für einen Ring von irgend einer Breite.

Da der einzige Theil des Ausdrucks von θ, welcher merklich werden kann, von willkührlichen Koeffizienten abhängt, und von der Lage des Saturnäquators gegen seine Bahn und gegen die Bahn seines äussersten Satelliten unabhängig ist: so folgt hieraus, dass dieser Aequator bey der sehr langsamen Bewegung, welche die Wirkung der Sonne und dieses Satelliten ihm ertheilt, die Ebenen seiner Ringe und der Satellitenbahnen, welche ursprünglich in seiner Ebene lagen, mit sich fortführt. Wir haben so im 17ten Satz gesehen, dass die Ebene der Ekliptik bey ihrer Sekularbewegung die Ebene des Mondäquators und der Mondsbahn mit sich fortführt, so dass die gegenseitige Neigung dieser drey Ebenen und die Uebereinstimmung ihrer Durchschnitte beständig sind.

Inhalt

des ersten Theils.

Erster Band.

Plan *des Wercks.* . . . Seite VII

Erstes Buch.

Von den allgemeinen Gesetzen des Gleichgewichts und der Bewegung. Seite 1

1stes Kapitel. *Vom Gleichgewicht und von der Zusammensetzung der Kräfte, welche auf einen materiellen Punkt wirken.* Seite 1

Von der Bewegung, von der Kraft, von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Satz 1 und 2.

Gleichung für das Gleichgewicht eines Punktes, welchen irgend eine Anzahl nach verschiedenen gegebenen Richtungen wirkender Kräfte zu bewegen strebt. Methode zur Bestimmung des Drucks, welchen ein nicht freyer Punkt gegen die Fläche oder krumme Linie, auf welcher er sich bewegen muſs, ausübt. Theorie der Momente. . . Satz 3.

2tes Kapit. *Von der Bewegung eines materiellen Punktes.* . Seite 15

Gesetz der Trägheit, der gleichförmigen Bewegung und der Geschwindigkeit . Satz 4.

Untersuchung der Beziehung, welche Kraft und Geschwindigkeit gegen einander haben: in der Natur sind beide einander proportional. Folgen dieses Gesetzes. . Satz 5 u. 6.

Gleichungen für die Bewegung eines Punktes, auf welchen irgend eine Anzahl Kräfte wirken. Satz 7.

Allgemeiner Ausdruck des Quadrats seiner Geschwindigkeit. Er beschreibt die krumme Linie, in welcher das Integral des Products seiner Geschwindigkeit in das Element dieser krummen Linie ein *Kleinstes* ist. . . Satz 8.

Methode zur Bestimmung des Drucks, welchen ein Punkt gegen eine Fläche oder eine krumme Linie, auf welcher er sich bewegt, ausübt. Von der Mittelpunktsfliehkraft. Satz 9.

Anwendung der vorhergehenden Grundsätze auf die Bewegung eines freyen Punktes, auf welchen die Schwere in einem widerstehenden Mittel wirkt. Untersuchung, was für ein Gesetz des Widerstandes erfordert wird, wenn der bewegliche Punkt eine gegebene krumme Linie beschreiben soll. Besondere Betrachtung des Falles, wenn der Widerstand Null ist. Satz 10.

Anwendung derselben Grundsätze auf die Bewegung eines schweren Körpers in einer Kugelfläche. Bestimmung der Dauer der Schwingungen des Körpers. Sehr kleine Schwingungen sind gleichzeitig (isochron). . . Satz 11.

Aufsuchung der krummen Linie, auf welcher die gleiche Dauer in vollkommener Schärfe dann Statt hat, wenn der Körper sich in einem widerstehenden Mittel bewegt, und insbesondere, wenn der Widerstand sich wie die beiden ersten Potenzen der Geschwindigkeit verhält. Satz 12.

3tes Kapit. *Vom Gleichgewicht eines Systems von Körpern.* Seite 48

Bedingungen des Gleichgewichts zweyer Systeme von Punkten, welche mit vollkommen entgegengesetzten Geschwindigkeiten auf einander stofsen. Was versteht man durch Gröfse der Bewegung eines Körpers, und durch ähnliche körperliche Punkte. . Satz 13.

Von der gegenseitigen Wirkung materieller Punkte. Die Rückwirkung ist der Wirkung immer gleich und entgegengesetzt. Gleichung für das Gleichgewicht eines Systems von Körpern, aus welcher der Grundsatz der virtuellen Geschwindigkeiten folgt. Methode zur Bestimmung des Drucks, welchen Körper gegen Flächen oder krumme Linien, auf welchen sie sich bewegen müssen, ausüben. Satz 14.

Anwendung dieser Grundsätze auf den Fall, wenn alle Punkte des Systems unveränderlich untereinander verbunden sind. Bedingungen des Gleichgewichts eines solchen Systems. Vom Schwerpunkt. Methode zur Bestimmung seiner Lage: 1stens gegen drey feste und rechtwinklichte Ebenen und 2tens gegen drey im Raum gegebene Punkte. . Satz 15.

Bedingungen des Gleichgewichts eines festen Körpers von irgend einer Gestalt. . S. 16.

4tes Kapit. *Vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten.* . Seite 61

Allgemeine Gleichungen dieses Gleichgewichts. Anwendung auf das Gleichgewicht einer flüssigen gleichartigen Masse, deren äufsere Oberfläche frey ist, nnd welche einen unbeweglichen festen Kern von irgend einer Gestalt bedeckt. . . Satz 17.

5tes Kapit. *Allgemeine Grundsätze der Bewegung eines Systems von Körpern.* Seite 65

Allgemeine Gleichung dieser Bewegung. . . . Satz 18.

Entwickelung der in ihr enthaltenen Grundsätze. Vom Grundsatz der lebendigen Kräfte. Er findet nur dann Statt, wenn die Bewegung der Körper sich nicht plötzlich, sondern unmerklich ändert. Mittel die Aenderung zu schätzen, welche die lebendige Kraft durch plötzliche Aenderungen der Bewegung des Systems erfährt. . . Satz 19

Vom Grundsatz der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts. Er findet selbst dann Statt, wenn die Körper eine endliche Wirkung in einer unendlich kleinen Zeit gegen einander ausüben. Satz 20

Vom Grundsatz der Erhaltung der Winkelflächen. Er findet, wie der vorhergehende, auch bey einer plötzlichen Aenderung der Bewegung des Systems Statt. Bestimmung desjenigen Systems der Koordinaten, in welchem die Summe der von den projicirten Radius vectors beschriebenen Winkelflächen auf zweyen der rechtwinklichten Ebenen, welche die Axen dieser Koordinaten bilden, gleich Null ist. Die Summe ist ein *Gröſstes* auf der dritten rechtwinklichten Ebene; sie ist gleich Null für jede andere Ebene, welche auf dieser senkrecht ist. Satz 21.

Die Grundsätze der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Winkelflächen finden auch noch dann Statt, wenn man dem Anfangspunkt der Koordinaten eine geradlinichte und gleichförmige Bewegung giebt. In diesem Fall bleibt die Ebene, welche beständig durch diesen Punkt geht, und auf welcher die Summe der von den projicirten Radius vectors beschriebenen Winkelflächen ein *Gröſstes* ist, beständig mit sich selbst parallel. Die Grundsätze der lebendigen Kräfte und der Winkelflächen können durch Verhältnisse zwischen den Koordinaten der gegenseitigen Abstände der Körper des Systems ausgedrückt werden. Die Ebenen, welche durch jeden Körper des Systems, parallel mit der unveränderlichen durch den Schwerpunkt gelegten Ebene, gehen, besitzen ähnliche Eigenschaften. Satz 22.

Grundsatz der kleinsten Wirkung. Er giebt, mit dem der lebendigen Kräfte verbunden, die allgemeine Gleichung der Bewegung. . . . Satz 23.

6tes Kapit. *Von den Gesetzen der Bewegung eines Systems von Körpern in allen mathematisch möglichen Verhältnissen zwischen Kraft und Geschwindigkeit.* Seite 85

Neue Grundsätze, welche in diesem allgemeinen Fall den Grundsätzen der Erhaltung der lebendigen Kräfte, der Winkelflächen, der Bewegung des Schwerpunkts und der kleinsten Wirkung entsprechen. Erfährt ein System keine äuſsern Wirkungen, so ist 1stens die Summe der endlichen Kräfte des Systems, parallel mit irgend einer Axe zerlegt, beständig; 2tens die Summe der endlichen Kräfte, welche das System um eine Axe zu drehen streben, ist ebenfalls beständig; 3tens die Summe der Integrale der endlichen Kräfte, jede respective in das Element ihrer Richtung multiplicirt, ist ein *Kleinstes.* Im Zustand des Gleichgewichts sind diese drey Summen gleich Null. . . Satz 24.

7tes Kapit. *Von den Bewegungen eines festen Körpers von irgend einer Gestalt.* Seite 90

Gleichungen, welche die Bewegung der Fortschreitung und der Umdrehung des Körpers bestimmen. Satz 25. u. 26.

Von den Hauptaxen. Ein Körper hat im Allgemeinen nur ein System von Hauptaxen. Von den Momenten der Trägheit. Das gröſste und kleinste dieser Momente gehört den Haupt-

axen zu, und das kleinste aller Momente der Trägheit findet bey einer der drey Hauptaxen Statt, welche durch den Schwerpunkt gehen. Fall, wo der Körper eine unendliche Menge Hauptaxen hat. Satz 27.

Untersuchung der augenblicklichen Umdrehungsaxe des Körpers: die Gröfsen, welche ihre Lage gegen die Hauptaxe bestimmen, geben zugleich die Umdrehungsgeschwindigkeit S. 28.

Gleichungen, welche diese Lage und die Lage der Hauptaxen durch Funktionen der Zeit bestimmen. Anwendung auf den Fall, wenn die Umdrehungsbewegung aus einem Stofs entsteht, welcher nicht durch den Schwerpunkt geht. Formel zur Bestimmung des Abstands des Schwerpunkts von der Richtung des ursprünglichen Stofses. Beyspiele von den Planeten und vorzüglich von der Erde hergenommen. . Satz 29.

Von den Schwingungen eines Körpers, welcher sich sehr nahe um eine seiner Hauptaxen dreht. Die Bewegung ist *sicher*, wenn sie um diejenigen Hauptaxen geschieht, für welche die Momente der Trägheit am gröfsten und am kleinsten sind; sie ist es aber nicht um die dritte Hauptaxe. Satz 30.

Von der Bewegung eines festen Körpers um eine unveränderliche Axe. Bestimmung des einfachen Pendels, welcher mit diesem Körper in derselben Zeit schwingt. . Satz 31.

8tes Kapit. *Von der Bewegung der Flüssigkeiten.* . Seite 117

Gleichung für die Bewegung der Flüssigen; Bedingung, welche aus ihrer Continuität fliefst. Satz 32.

Umformung dieser Gleichungen; sie können integrirt werden, wenn die Dichte irgend eine Funktion des Druckes, und wenn die Summe der mit den drey rechtwinklichten Axen parallelen Geschwindigkeiten, jede in das Element ihrer Richtung multiplicirt, ein vollständiges Differenzial ist. Beweis, dafs diese Bedingung in allen Augenblicken Statt findet, wenn sie in einem einzigen Statt findet. . . Satz 33.

Anwendung der vorhergehenden Grundsätze auf die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Masse, welche eine gleichförmige Umdrehungsbewegung um eine der Axen der Koordinaten hat. . . . Satz 34.

Bestimmung der sehr kleinen Schwingungen einer flüssigen gleichartigen Masse, die ein Sphäroid bedeckt, welches eine Umdrehungsbewegung hat. . . Satz 35.

Anwendung auf die Bewegung des Meeres in der Voraussetzung, dafs sein Gleichgewicht durch sehr kleine Kräfte gestöhrt wird. . . Satz 36.

Von der Erdatmosphäre, zuerst im Zustand des Gleichgewichts betrachtet. Von den Schwankungen, welche sie im Zustand der Bewegung erfährt, wenn man nur auf die regelmäfsigen Ursachen, welche auf sie wirken, Rücksicht nimmt: Aenderungen, welche diese Bewegungen in den Höhen des Barometers hervorbringen. . . Satz 37.

Zweytes Buch.

Vom Gesetz der allgemeinen Schwere und von der Bewegung der Schwerpunkte der himmlischen Körper. Seite 145

1stes Kapitel. *Vom Gesetz der allgemeinen Schwere, aus den Erscheinungen hergeleitet.* Seite 145

Wenn die von den Radius vectors der Planeten in ihrer Bewegung um die Sonne beschriebenen Winkelflächen sich wie die Zeiten verhalten, so ist die Kraft, welche auf die Planeten wirkt, gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet, und umgekehrt. . Satz 1.

Wenn die Planeten und Kometenbahnen Kegelschnitte sind; so ist die Kraft, welche auf sie wirkt, im verkehrten Verhältniſs mit dem Quadrat des Abstands des Schwerpunkts dieser Gestirne vom Schwerpunkt der Sonne; und umgekehrt, die beschriebene krumme Linie ist ein Kegelschnitt, wenn die Kraft das angegebene Verhältniſs hat. . Satz 2.

Wenn die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten sich wie die Würfel der groſsen Axen ihrer Bahnen verhalten, oder, welches dasselbe ist, wenn die in gleichen Zeiten in verschiedenen Bahnen beschriebenen Winkelflächen sich wie die Quadratwurzeln ihrer Parameter verhalten; so ist die Kraft, welche auf die Planeten und Kometen wirkt, für alle diese Körper in gleichen Entfernungen von der Sonne gleich groſs. . Satz 3.

Da die Bewegung der Satelliten um ihre Planeten dieselben Erscheinungen darbietet, wie die der Planeten um die Sonne, so werden die Satelliten gegen ihre Planeten und gegen die Sonne von Kräften angezogen, welche sich verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten. . . . Satz 4.

Bestimmung der Mondsparallaxe nach den Erfahrungen über die Schwere und in der Voraussetzung, daſs die Schwere sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält. Da das Resultat, welches man so erhält, vollkommen mit den Beobachtungen übereinstimmt; so sind die Anziehungskraft der Erde und die Anziehungskraft aller himmlischen Körper von derselben Natur. . . . Satz 5.

Allgemeine Betrachtungen über das Vorhergehende: sie führen auf den Grundsatz, daſs alle Theilchen der Materie sich im Verhältniſs der Massen, und im verkehrten Verhältniſs des Quadrats der Entfernungen anziehen. . . . Satz 6.

2tes Kapit. *Von den Differenzialgleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern, welche ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen sind.* Seite 160

Differenzialgleichungen dieser Bewegung. . . Satz 7.

Entwickelung der Integrale, welche man bis jetzt von ihnen hat erhalten können, und welche aus den Grundsätzen der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts, der Winkelflächen und der lebendigen Kräfte flieſsen. . . Satz 8.

Differenzialgleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern, die ihrer gegenseitigen

Anziehung unterworfen sind, um einen von ihnen, welcher als Mittelpunkt ihrer Bewegungen angesehen wird: Entwickelung der genauen Integrale, welche man aus ihnen herleiten kann. . . . Satz 9.

Die Bewegung des Schwerpunkts des Systems eines Planeten und seiner Satelliten um die Sonne ist sehr nahe eben so beschaffen, als ob alle Körper des Systems in dem Schwerpunkt vereinigt wären; und das System wirkt auf die übrigen Körper sehr nahe eben so, wie in dieser Voraussetzung. . . Satz 10.

Untersuchungen über die Anziehung der Sphäroide: diese Anziehung ist durch die partiellen Differenziale der Funktion gegeben, welche die Summe der Theilchen des Sphäroids ausdrückt, jedes durch seinen Abstand vom angezogenen Punkt dividirt. Fundamentalgleichung zwischen den partiellen Differenzialen, welcher diese Funktion Genüge thut. Verschiedene Verwandlungen dieser Gleichung. . . Satz 11.

Anwendung auf den Fall, wo der anziehende Körper eine Kugelschale ist; es folgt hieraus, dafs ein Punkt innerhalb dieser Schale von allen Seiten gleich stark angezogen wird, und dafs ein Punkt aufserhalb der Schale so angezogen wird, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre. Dieses Resultat gilt auch für Kugeln, welche aus concentrischen Schalen bestehen, deren Dichte vom Mittelpunkt zum Umkreis sich ändert. Aufsuchung der Anziehungsgesetze, bey welchen diese Eigenschaften noch Statt finden. Unter der unzähligen Menge Gesetze, welche die Anziehung in grofsen Entfernungen sehr klein geben, ist das Gesetz der Natur das einzige, wo die Kugeln auf einen äufsern Punkt so wirken, als ob ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären. Dieses Gesetz ist auch das einzige, wo die Wirkung einer Kugelschale auf einen Punkt innerhalb derselben gleich Null ist. . . . Satz 12.

Anwendung der Formeln des 11ten Satzes auf den Fall, wo der anziehende Kürper ein Cylinder ist, dessen Grundfläche eine geschlossene krumme Linie ist, und dessen Länge unendlich grofs ist. Ist die krumme Linie ein Kreis, so verhält sich die Wirkung des Cylinders auf einen äufsern Punkt, verkehrt wie die Entfernung dieses Punktes von der Axe des Cylinders. Ein Punkt im Innern einer cylindrischen kreisrunden Schale, deren Dicke überall dieselbe ist, wird von allen Seiten gleich stark angezogen. . Satz 13.

Bedingungsgleichung für die Bewegung eines Körpers. . . Satz 14.

Verschiedene Verwandlungen der Differenzialgleichungen für die Bewegung eines Systems von Körpern, welche ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen sind. . Satz 15.

3tes Kapit. *Erste Annäherung der himmlischen Bewegungen, oder Theorie der elliptischen Bewegung.* . . . Seite 209

Integration der Differenzialgleichungen, welche die relative Bewegung zweyer Körper bestimmen, die sich im Verhältnifs der Massen und im verkehrten Verhältnifs des Quadrats der Entfernungen anziehen. Die krumme Linie, welche sie durch die Bewegung beschreiben, ist ein Kegelschnitt. Ausdruck der Zeit durch eine convergirende Reihe von Sinus und Kosinus der wahren Bewegung. Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die

die Würfel der grofsen Axen der Bahnen, wenn man die Massen der Planeten in Vergleichung mit der Masse der Sonne vernachlässigt. Dieses Gesetz erstreckt sich auch auf die Bewegung der Satelliten um ihre Planeten. . . Satz 16.

Zweyte Art die Differenzialgleichungen des vorhergehenden Satzes zu integriren. Satz 17.

Dritte Art dieselben Gleichungen zu integriren; diese Methode hat den Vortheil, dafs sie die willkührlichen Gröfsen durch Funktionen der Koordinaten und ihrer ersten Differenziale giebt. . : . Satz 18 u. 19.

Endliche Gleichungen für die elliptische Bewegung: Ausdrücke der mittlern Anomalie, des Radius vectors und der wahren Anomalie durch Funktionen der eccentrischen Anomalie. Satz 20.

Allgemeine Methode zur Verwandlung der Funktionen in Reihen: Lehrsätze, welche daraus entspringen. . . . Satz 21.

Anwendung dieser Lehrsätze auf die elliptische Bewegung. Ausdrücke der eccentrischen Anomalie, der wahren Anomalie und des Radius vectors der Planeten durch convergirende Reihen von Sinus und Kosinus der mittlern Anomalie. Convergirende Reihen für die Länge, Breite und Projection des Radius vectors auf eine unveränderliche Ebene, welche wenig gegen die Ebene der Bahn geneigt ist. . . Satz 22.

Convergirende Ausdrücke des Radius vectors und der Zeit in einer sehr eccentrischen Bahn durch Funktionen der wahren Anomalie. Ist die Bahn parabolisch, so ist die Gleichung zwischen der Zeit und der wahren Anomalie vom dritten Grade; man löst sie vermittelst der Tafel für die parabolische Bewegung der Kometen auf. Verbesserung, welche man an der in der Parabel berechneten wahren Anomalie anbringen mufs, um die wahre Anomalie zu erhalten, welche derselben Zeit in einer sehr eccentrischen Ellipse entspricht. S. 23.

Theorie der hyperbolischen Bewegung. . . Satz 24.

Bestimmung des Verhältnisses der Massen der Planeten, welche Satelliten haben, gegen die Masse der Sonne. . . . Satz 25.

4tes Kapit. *Bestimmung der Elemente der elliptischen Bewegung.* Seite 260

Formeln, welche diese Elemente geben, wenn die Umstände der ursprünglichen Bewegung bekannt sind. Ausdruck der Geschwindigkeit, von der Eccentricität der Bahn unabhängig. Die Geschwindigkeit verhält sich in der Parabel umgekehrt wie die Quadratwurzel des Radius vectors. . . . Satz 26.

Untersuchung der Verbindung, welche zwischen der grofsen Axe der Bahn, der Sehne des beschriebenen Bogens, der Zeit, welche ihn zu beschreiben angewandt wird, und der Summe der beiden äufsersten Radius vectors vorhanden ist. . Satz 27.

Das schicklichste Mittel, die Elemente der Kometenbahnen aus den Beobachtungen zu bestimmen. . . . Satz 28.

Formeln um vermittelst irgend einer Anzahl naher Beobachtungen die geocentrische Länge und Breite eines Kometen für einen gegebenen Augenblick, so wie auch ihre ersten und zweyten Differenziale zu erhalten. . . Satz 29.

Allgemeine Methode um die Elemente der Bahnen aus den Differenzialgleichungen der Bewegungen eines Systems von Körpern herzuleiten, wenn man die scheinbare Längen und Breiten dieser Körper für einen gegebenen Augenblick, so wie auch die ersten und zweyten Differenziale dieser Gröſsen als bekannt annimmt. . . Satz 30.

Anwendung dieser Methode auf die Bewegung der Kometen in der Voraussetzung, daſs bloſs die Attractionskraft der Sonne auf sie wirkt: sie giebt die Entfernung des Kometen von der Erde durch eine Gleichung des siebenten Grades. Der bloſse Anblick dreyer auf einander folgenden sehr nahen Beobachtungen ist hinreichend, um zu erkennen, ob der Komet mehr oder weniger als die Erde von der Sonne entfernt ist. . Satz 31.

Methode, um die geocentrische Länge und Breite eines Kometen, so wie auch ihre ersten und zweyten Differenziale, durch die zugehörenden Potenzen des Differenzials der Zeit dividirt, bloſs aus drey Beobachtungen und so genau, als man will, zu erhalten. Satz 32.

Bestimmung der Elemente der Bahn des Kometen, wenn man seinen Abstand von der Erde und das erste Differenzial dieser Entfernung durch das Element der Zeit dividirt, für eine gegebene Zeit kennte. Einfaches Mittel um auf die Eccentricität der Erde Rücksicht zu nehmen. . . . Satz 33.

In der parabolischen Bahn wird die groſse Axe unendlich groſs, und diese Bedingung giebt eine neue Gleichung vom 6ten Grade zur Bestimmung der Entfernung des Kometen von der Erde. Satz 34.

Hieraus entspringen verschiedene Methoden zur Berechnung der parabolischen Bahnen. Untersuchung, von welcher Methode man die gröſste Genauigkeit in den Resultaten und die gröſste Einfachheit in der Berechnung erwarten kann. . Satz 35 u. 36.

Diese Methode zerfällt in zwey Theile: im ersten bestimmt man den kleinsten Abstand des Kometen von der Sonne, und die Zeit seines Durchgangs durch die Sonnennähe durch Näherung: im zweyten giebt man ein Mittel, diese zwey Elemente durch drey von einander entfernte Beobachtungen zu verbessern, und man leitet dann aus ihnen alle übrigen Elemente her. . . . Satz 37.

Geometrisch strenge Bestimmung der Bahn in dem Fall, wo der Komet in seinen beiden Knoten ist beobachtet worden. . . . Satz 38.

Methode um die Elliptizität der Bahn im Fall einer sehr eccentrischen Ellipse zu bestimmen. Satz 39.

5tes Kapit. *Allgemeine Methoden, um durch allmählige Näherungen die Bewegungen der himmlischen Körper zu bestimmen.* . Seite 308

Untersuchung über die Aenderungen, welche man an den Integralen der Differenzialgleichungen anbringen muſs, um die Integrale derselben Gleichungen zu erhalten, wenn sie um gewisse Glieder vermehrt worden sind. . . Satz 40.

Man leitet hieraus ein sehr einfaches Mittel her, um die geometrisch strengen Integrale der linearischen Differenzialgleichungen dann zu erhalten, wenn man dieselben Gleichungen ohne ihre letzten Glieder integriren kann. . . Satz 41.

Man leitet auch noch ein sehr einfaches Mittel hieraus ab, um immer mehr und mehr genäherte Integrale der Differenzialgleichungen zu erhalten. . Satz 42.
Methode um die Kreisbogen, welche sich in den genäherten Integralen befinden, dann wegzuschaffen, wenn sie sich nicht in den genauen Integralen befinden dürfen. Satz 43 u. 44.
Näherungsmethode, welche auf die Aenderung der willkührlich beständigen Gröfsen gegründet ist. Satz 45.

6tes Kapit. *Zweyte Annäherung der himmlischen Bewegungen, oder Theorie ihrer Stöhrungen.* . . . Seite 329

Formeln für die Bewegung in Länge und Breite, und für den Radius vector in der gestöhrten Bahn. Sie erhalten eine sehr einfache Form, wenn man nur auf die erste Potenz der stöhrenden Kräfte Rücksicht nimmt. . . . Satz 46.
Methode zur Bestimmung der Stöhrungen durch Reihen, welche nach den Potenzen und Producten der Eccentricitäten und Neigungen der Bahnen geordnet sind . Satz 47.
Entwickelung der Funktion der gegenseitigen Abstände der Körper des Systems von einander, in eine Reihe, von welcher Funktion ihre Stöhrungen abhängen. Gebrauch der Rechnung mit endlichen Differenzen bey dieser Entwickelung. Betrachtungen über diese Reihe. Satz 48.
Formeln zur Berechnung ihrer verschiedenen Glieder. . . Satz 49.
Allgemeine Ausdrücke der Stöhrungen der Bewegung in Länge und Breite und des Radius vectors, wenn man die Genauigkeit bis zu den Gröfsen von der Ordnung der Eccentrizitäten und der Neigungen treibt. . . Satz 50 u. 51.
Zusammenstellung dieser verschiedenen Resultate und Betrachtungen über die fernern Annäherungen. Satz 52.

7tes Kapit. *Sekularungleichheiten der himmlischen Bewegungen.* Seite 382

Diese Ungleichheiten entspringen aus den Gliedern, welche im Ausdruck der Stöhrungen die Zeit aufserhalb der periodischen Zeichen enthalten. Differenzialgleichungen der Elemente der elliptischen Bewegung, wodurch diese Glieder verschwinden. . Satz 53.
Die mittlern Bewegungen der Planeten sind gleichförmig und die grofsen Axen der Bahnen sind beständig, wenn man nur auf die erste Potenz der stöhrenden Kräfte Rücksicht nimmt. Satz 54.
Entwickelung der Differenzialgleichungen, welche sich auf die Eccentricitäten und Lage der Sonnennähen in irgend einem System von wenig gegen einander geneigten und wenig eccentrischen Bahnen beziehen. . . . Satz 55.
Integration dieser Gleichungen und Bestimmung der willkührlichen Gröfsen ihrer Integrale aus den Beobachtungen. Satz 56.
Das System der Planeten und der Satellitenbahnen ist in Rücksicht auf die Eccentricitäten beständig, das heifst, diese Eccentricitäten bleiben immer sehr klein und das System oscillirt nur um einen mittlern Zustand der Elliptizität, von welchem es sich wenig entfernt. Satz 57.

Differenzialausdrücke für die Sekularänderungen der Eccentrizität und der Lage der Sonnennähe. Satz 58.

Integration der Differenzialgleichungen für die Knoten und Neigungen der Bahnen. Die gegenseitigen Neigungen von Bahnen, welche wenig gegen einander geneigt sind, bleiben auch bey der Bewegung des Systems immer sehr klein. . Satz 59.

Differenzialausdrücke für die Sekularänderungen der Knoten und der Neigungen der Bahnen, 1stens in Beziehung auf eine feste Ebene; 2tens in Beziehung auf die bewegliche Bahn eines Körpers des Systems. . . . Satz 60.

Allgemeine Verhältnisse zwischen den elliptischen Elementen eines Systems von Bahnen, was auch immer ihre Eccentrizitäten und gegenseitigen Neigungen seyn mögen. Satz 61.

Untersuchung über die unveränderliche Ebene oder über die Ebene, auf welcher die Summe der Massen der Körper des Systems ein *Gröſstes* ist, wenn man jede respective mit der Projection der Winkelflächen multiplicirt, welche ihr Radius vector in einer gegebenen Zeit beschreibt. Bestimmung der Bewegung zweyer Bahnen, welche um irgend einen Winkel gegen einander geneigt sind. . . Satz 62

8tes Kapit. *Zweyte Annäherungsmethode für die himmlischen Bewegungen.* Seite 421

Diese Methode gründet sich auf die Aenderungen, welche die Elemente der als elliptisch angenommenen Bewegung, vermöge der periodischen und sekular Ungleichheiten erfahren. Allgemeine Methode zur Bestimmung dieser Aenderungen. Die endlichen Gleichungen der elliptischen Bewegung und ihrer ersten Differenziale sind in der veränderlichen und unveränderlichen Ellipse dieselben. . . . Satz 63.

Ausdruck der Elemente der elliptischen Bewegung in der gestöhrten Bahn, was auch immer ihre Eccentrizität und ihre Neigung gegen die Ebene der Bahnen der stöhrenden Massen ist. Satz 64.

Entwickelung dieser Ausdrücke in dem Fall, wenn die Bahnen wenig eccentrisch und wenig gegen einander geneigt sind. Man betrachtet zuerst die mittlern Bewegungen und die groſsen Axen: Beweis, daſs diese zwey Elemente nur periodischen, von der Configuration der Körper des Systems abhängenden, Ungleichheiten unterworfen sind, wenn man die Quadrate und Producte der stöhrenden Kräfte vernachlässigt. Sind die mittlern Bewegungen zweyer Planeten sehr nahe commensurabel, so können daraus in ihren mittlern Längen zwey sehr beträchtliche Ungleichheiten entstehen, welche entgegengesetzte Zeichen haben, und sich umgekehrt wie die Producte der Massen der Körper in die Quadratwurzeln der groſsen Axen ihrer Bahnen verhalten. Die Beschleunigung der Bewegung Jupiters und die Verzögerung der Bewegung Saturns entspringen aus solchen Ungleichheiten. Ausdruck dieser Ungleichheiten und derjenigen Ungleichheiten, welche durch dasselbe Verhältniſs der mittlern Bewegungen unter den Gliedern, die von den zweyten Potenzen der stöhrenden Massen abhängen, beträchtlich werden können. . Satz 65.

Untersuchung des Falls, wo die beträchtlichsten Ungleichheiten der mittlern Bewegung sich

nur unter den Gliedern von der Ordnung der Quadrate der stöhrenden Massen befinden. Dieser sehr merkwürdige Umstand findet sich in dem System der Jupiterssatelliten, und man leitet folgende zwey Lehrsätze daraus her:

Die mittlere Bewegung des ersten Satelliten, weniger die dreyfache Bewegung des zweyten, plus die doppelte Bewegung des dritten ist genau und beständig gleich Null.

Die mittlere Länge des ersten Satelliten, weniger die dreyfache Länge des zweyten, plus die doppelte Länge des dritten, ist beständig gleich zwey rechten Winkeln.

Diese Lehrsätze gelten noch ungeachtet der Aenderungen, welche die mittlern Bewegungen der Satelliten theils durch eine Ursache, welche derjenigen ähnlich ist, die die mittlere Bewegung des Monds ändert, theils durch den Widerstand eines sehr dünnen Mittels erfahren können. Aus ihnen entspringt auch noch eine willkührliche Ungleichheit, welche für jeden der drey Satelliten nur durch ihren Koeffizienten verschieden ist, und welche nach den Beobachtungen unmerklich ist. . . . Satz 66.

Differenzialgleichungen, welche die Aenderungen der Eccentrizitäten und der Sonnennähen bestimmen. . . . Satz 67.

Entwickelung dieser Gleichungen. Die Werthe dieser Elemente bestehen aus zwey Theilen; der eine hängt von der gegenseitigen Configuration der Körper des Systems ab, und enthält die periodischen Aenderungen; der andere ist von dieser Configuration unabhängig und enthält die Sekularänderungen. Dieser zweyte Theil wird durch dieselben Differenzialgleichungen gegeben, welche wir vorher betrachtet haben. . Satz 68.

Sehr einfaches Mittel die Aenderungen zu erhalten, welche aus dem fast commensurabeln Verhältnifs der mittlern Bewegungen in den Eccentrizitäten und Sonnennähen der Bahnen entstehen: sie hängen mit den entsprechenden Ungleichheiten der mittlern Bewegung zusammen. Sie können in den Sekularausdrücken der Eccentrizitäten und der Länge der Perihelien beträchtliche, von den Quadraten und Producten der stöhrenden Kräfte abhängende, Ungleichheiten hervorbringen. Bestimmung dieser Glieder. . Satz 69.

Aenderung der Knoten und der Neigungen der Bahnen. Gleichungen, welche ihre periodischen und ihre sekular Werthe bestimmen. . . Satz 70

Einfaches Mittel die Ungleichheiten zu erhalten, welche in diesen Elementen aus dem fast commensurabeln Verhältnifs der mittlern Bewegungen entstehen: sie hängen mit den ähnlichen Ungleichheiten der mittlern Bewegung zusammen. . Satz 71.

Untersuchung der Veränderung, welche die Länge der Epoche erfährt. Die Sekulargleichung des Mondes hängt von dieser Aenderung ab. . Satz 72.

Betrachtungen über die Vortheile, welche die vorhergehende, auf die Aenderung der Parameter der Bahnen gegründete, Methode in verschiedenen Umständen darbietet: Mittel die Aenderungen der Längen, der Breite und des Radius Vectors daraus herzuleiten Satz 73.

Zweyter Band.

Drittes Buch.

Von der Gestalt der himmlischen Körper. . . Seite 1

1stes Kapitel. *Von den Anziehungen gleichartiger Sphäroide, welche von Flächen der zweyten Ordnung begrenzt werden.* . Seite 2

Allgemeine Methode, um ein dreyfaches Differenzial in ein anderes zu verwandeln, welches auf drey neue veränderliche Gröfsen sich bezieht: Anwendung dieser Methode auf die Anziehungen der Sphäroide. . . Satz 1

Formeln für die Anziehungen gleichartiger Sphäroide, welche von Flächen der zweyten Ordnung begrenzt werden. Satz 2

Von den Anziehungen dieser Sphäroide, wenn der angezogene Punkt in ihrem Innern oder auf ihrer Oberfläche sich befindet. Diese Anziehungen lassen sich auf Quadraturen bringen, welche sich in endliche Ausdrücke verwandeln, wenn das Sphäroid ein durch Umdrehung entstandenes ist. Ein Punkt im Innern einer elliptischen Schale, deren innere und äufsere Oberfläche einander ähnlich sind und ähnliche Lage haben, wird von allen Seiten gleich stark angezogen. . . . Satz 3.

Von den Anziehungen eines elliptischen Sphäroids auf einen äufsern Punkt: merkwürdige partielle Differenzialgleichung, welche zwischen diesen Anziehungen Statt findet. Legt man durch den angezogenen Punkt ein zweytes Ellipsoid, welches denselben Mittelpunkt, dieselbe Lage der Axen und dieselbe Eccentrizitäten wie das erstere hat, so verhalten sich die Anziehungen der beiden Ellipsoide wie ihre Massen. . Satz 4, 5 und 6.

Reduction der Anziehungen des Sphäroids auf Quadraturen, welche sich in endliche Ausdrücke verwandeln, wenn das Sphäroid ein durch Umdrehung entstandenes ist. Satz 7.

2tes Kapit. *Entwickelung der Anziehungen irgend eines Sphäroids in Reihen.* Seite 30

Verschiedene Verwandlungen der partiellen Differenzialgleichung für die Anziehungen der Sphäroide. . . . Satz 8.

Entwickelung dieser Anziehungen in Reihen, welche nach den Potenzen der Entfernungen des Mittelpunkts der Sphäroide vom angezogenen Punkt, geordnet sind. . Satz 9.

Anwendung auf Sphäroide, welche sehr wenig von der Kugel verschieden sind: sonderbare Gleichung, welche zwischen ihren Anziehungen auf der Oberfläche Statt hat. Satz 10.

Sehr einfaches Verhältnifs, welches daraus zwischen dem Reihenausdruck ihrer Anziehung auf einen äufsern Punkt, und zwischen ihrem Halbmesser entsteht, wenn man diesen Halbmesser in eine Reihe Funktionen von einer besondern Gattung entwickelt, welche Funktionen durch die Natur der Anziehungen selbst gegeben werden, und welche in der Theorie der Gestalt und der Bewegung der Sphäroide und in der Theorie der Schwankungen der Flüssigen, von welchen sie bedeckt werden, vom gröfsten Nutzen sind. Satz 11.

Allgemeiner Lehrsatz für die bestimmte Integration der doppelten Integrale, welche Producte zweyer dieser Funktionen sind. Vereinfachung der Ausdrücke für den Halbmesser des Sphäroids und für seine Anziehung, wenn man den Anfangspunkt des Halbmessers im Schwerpunkt des Sphäroids annimmt. . . . Satz 12.

Von den Anziehungen der Sphäroide und der sphäroidischen Schalen auf einen Punkt im Innern derselben. Bedingungen, wenn der Punkt von allen Seiten gleich stark angezogen werden soll. . . . Satz 13.

Von den Anziehungen der Sphäroide, die sehr wenig von der Kugel verschieden sind und welche aus Lagen bestehen, die sich nach irgend einem Gesetz ändern. . Satz 14.

Ausdehnung der vorhergehenden Untersuchungen auf jedes Sphäroid; Verwandlung ihrer Anziehungen in Reihen von sehr einfacher Gestalt; neue Auflösung der Aufgabe der Anziehungen elliptischer Sphäroide, welche hieraus entspringt. . Satz 15, 16 und 17.

3tes Kapit. *Von der Gestalt einer flüssigen gleichartigen Masse, welche im Gleichgewicht ist und eine Umdrehungsbewegung hat* Seite 61

Allgemeine Gleichung ihrer Oberfläche im Zustand des Gleichgewichts: das Ellipsoid thut dieser Gleichung Genüge. Bestimmung dieses Ellipsoids. Die Schwere am Pol verhält sich zur Schwere unterm Aequator, wie der Diameter des Aequators zur Axe der Pole. Es giebt nicht mehr als zwey elliptische Figuren, welche einer gegebenen Winkelumdrehungsbewegung Genüge thun. Nimmt man an, dafs die Erde gleichartig ist, so verhält sich in dem abgeplattetsten Ellipsoid der Diameter des Aequators zur Axe der Pole, wie 680,49 zu 1; und in dem am wenigsten abgeplatteten Ellipsoid wie 231,7 zu 230,7. Eine flüssige, gleichartige und elliptische Masse kann nur dann im Gleichgewicht seyn, wenn die Dauer ihrer Umwälzung das Product von $0^{tag},1009$ in die Quadratwurzel des Verhältnisses der mittlern Dichte der Erde zur Dichte der Masse übersteigt. Satz 18, 19 u. 20.

Ist die ursprüngliche Dauer der Umwälzung kleiner als diese Grenze, so nimmt sie durch die Abplattung der flüssigen Masse zu; und das Flüssige nimmt endlich vermöge der Zähigkeit seiner Theile eine bleibende elliptische Gestalt an, welches auch immer die ursprünglichen Kräfte seyn mögen; diese Gestalt ist einzig und durch die Natur dieser Kräfte bestimmt. Die Umdrehungsaxe ist diejenige, welche durch den Schwerpunkt geht, und für welche beym Anfang der Bewegung das Moment der Kräfte am gröfsten war. Satz 21.

4tes Kapit. *Von der Gestalt eines Sphäroids, welches sehr wenig von einer Kugel verschieden ist, und von einer Lage eines, im Gleichgewicht sich befindenden, Flüssigen bedeckt wird.* . Seite 76

Allgemeine Gleichung des Gleichgewichts. . . . Satz 22.

Entwickelung dieser Gleichung, wenn die Kräfte, welche auf das Flüssige wirken, aus der Mittelpunktsfliehkraft der Umdrehungsbewegung, aus den Anziehungen des Flüssigen und des Sphäroids, und aus äufsern Anziehungen entstehen. . Satz 23.

Gleichung des Gleichgewichts, wenn das Sphäroid und das Flüssige gleichartig und von derselben Dichte sind. Ausdruck des Halbmessers des Sphäroids und der Schwere auf der Oberfläche. Die Oberfläche ist elliptisch, wenn es keine äufsern Anziehungen giebt, und die Elliptizität ist $\frac{5}{4}$ des Verhältnisses der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere: die Abnahme des Halbmessers des Sphäroids vom Aequator bis zu den Polen ist dem Quadrat des Sinus der Breite proportional; und die Zunahme der Schwere ist der Abnahme des Halbmessers gleich, wenn man den Halbmesser und die Schwere unter den Polen als Einheiten annimmt. Satz 24 und 25.

Directer und von den Reihen unabhängiger Beweis, dafs die elliptische Gestalt die einzige ist, welche dem Gleichgewicht Genüge thut. . . Satz 26.

Eine flüssige gleichartige Masse, welche eine Kugel bedeckt, kann in einigen Fällen eine unendliche Menge verschiedener Figuren des Gleichgewichts haben. Bestimmung dieser Figuren. . . . Satz 27 u. 28.

Allgemeine Gleichung des Gleichgewichts für flüssige Lagen von veränderliche Dichte, welche ein Sphäroid bedecken. . . . Satz 29.

Untersuchung des Falls, wenn das Sphäroid gänzlich flüssig ist. Giebt es keine äufsern Anziehungen, so ist das Sphäroid ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid: die Dichten nehmen vom Mittelpunkt zur Oberfläche ab, die Elliptizitäten hingegen nehmen zu. Die Grenzen der Abplattung sind $\frac{5}{4}$ und $\frac{1}{2}$ des Verhältnisses der Centrifugalkraft zur Schwere. Gleichung der krummen Linie, deren Elemente in der Richtung der Schwere vom Mittelpunkt zur Oberfläche sind. . . . Satz 30.

Vereinfachung des Ausdrucks der Halbmesser eines Sphäroids, welches von einem im Gleichgewicht sich befindenden Flüssigen bedeckt wird, wenn man den Anfangspunkt dieser Halbmesser im Schwerpunkt der ganzen Masse setzt, von welcher man annimmt, dafs sie um eine ihrer Hauptaxen sich dreht. . . Satz 31 u. 32.

Sehr einfache Verhältnisse der Schwere, der Pendellänge und der Grade auf dem Sphäroid zum Ausdruck seines Halbmessers. Hieraus entspringt ein leichtes Mittel die Hypothesen, welche man über die Gesetze der Aenderung der Grade und der Schwere erdenken kann, durch die Beobachtung zu prüfen. *Bouguer's* Hypothese, nach welcher die Aenderung der Grade vom Aequator zu den Polen der vierten Potenz des Sinus der Breite proportional ist, läfst sich nicht mit den Beobachtungen der Pendellänge vereinigen. Gründe, we-

wegen welcher die Abweichungen von der elliptischen Gestalt weit beträchtlicher bey den Meridiangraden sind als bey den Pendellängen. . . Satz 33.

Nimmt man an, daſs die Lagen des Sphäroids elliptisch sind; so ist die Gestalt des Flüssigen, von welchem es bedeckt wird, ebenfalls elliptisch: die Aenderungen der Erdhalbmesser, der Meridiangrade und der Schwere sind alsdann dem Quadrat des Sinus der Breite proportional. Die gänzliche, durch die Schwere dividirte, Aenderung der Schwere vom Aequator bis zu den Polen, und die Elliptizität sind beide zu gleicher Zeit, und eine so viel als die andere, gröſser oder kleiner als $\frac{5}{4}$ des Verhältnisses der Mittelpunktsfliehkraft zur Schwere unterm Aequator. . . . Satz 34.

Ausdrücke für die Anziehung elliptischer Sphäroide auf einen äuſsern Punkt. Satz 35.

Vom Gesetz der Schwere an der Oberfläche eines flüssigen gleichartigen Sphäroids, wenn die Anziehung sich wie eine Potenz der Entfernung verhält. . Satz 36.

Mittel um in den Untersuchungen über die Figur der Sphäroide, welche von einem im Gleichgewicht sich befindenden Flüssigen bedeckt werden, auf die Glieder Rücksicht zu nehmen, welche von den Quadraten und höhern Potenzen der Mittelpunktsfliehkraft abhängen. Man kann versichern, daſs das Gleichgewicht des Flüssigen geometrisch streng möglich ist, ob man schon die Figur desselben nur durch allmählige Näherungen angeben kann. Satz 37.

5tes Kapit. *Vergleichung der vorhergehenden Theorie mit den Beobachtungen.* Seite 128

Gleichungen für die krumme Linie der Erdmeridiane und für diejenige, welche man durch geodätische Operationen beschreibt. Ausdrücke für die Länge, Breite und den Azimuthalwinkel, welche den Endpunkten einer geodätischen Linie zugehören, die man auf der Erde entweder parallel oder senkrecht auf die Ebene des Himmelsmeridians beschrieben hat. Allgemeiner Ausdruck für den Krümmungshalbmesser einer geodätischen Linie. Unter allen geodätischen Linien, welche von demselben Punkt ausgehen, giebt es zwey auf einander senkrechte, welchen der gröſste und kleinste Krümmungshalbmesser zugehört. Sind diese Halbmesser und die Lagen dieser Linien gegeben, so kann man leicht hieraus den Krümmungshalbmesser irgend einer geodätischen Linie, die durch denselben Punkt geht, herleiten. Man kann für jeden Punkt der Oberfläche der Erde ein Krümmungsellipsoid sich gedenken: Mittel es zu bestimmen. . . Satz 38.

Methoden um die elliptische Figur zu bestimmen, in welcher die gröſste Abweichung der gemessenen Grade, ohne auf das Zeichen zu sehen, so klein als möglich ist. Satz 39.

Methode um die elliptische Figur zu bestimmen, in welcher 1stens die Summe der Fehler der gemessenen Bogen Null ist, und in welcher 2tens die Summe der Fehler, sämmtlich positiv genommen, ein Kleinstes ist. . . . Satz 40.

Anwendung dieser Methode auf die Meridiangrade, welche man in Peru, am Vorgebürge der guten Hoffnung, in Pensylvanien, in Italien, in Frankreich, in Oestreich und in Lappland gemessen hat. Man kann in der elliptischen Hypothese einen Fehler von 189 Metres

(97 Toisen) bey einigen dieser Grade nicht vermeiden; die Elliptizität, welche diesem Kleinsten *unter den Fehlern* zugehört, ist $\frac{1}{277}$. Die elliptische Gestalt, in welcher die Summe der Fehler der gemessenen Bogen Null ist, und in welcher die Summe der sämmtlich positiv genommenen Fehler ein Kleinstes ist, hat die Elliptizität $\frac{1}{312}$. Diese Gestalt giebt bey dem in Pensylvanien gemessenen Grad einen Fehler von 336 Mètres ($172\frac{1}{3}$ Toisen). Vorzüglichste Resultate der neuen in Frankreich von *Delambre* und *Méchain* ausgeführten Erdmessung: man darf die beobachteten Breiten nur um 4″,4 (= 1″,42) ändern, um diese Messungen mit einer elliptischen Gestalt zu vereinigen. Die Elliptizität, welche diesem kleinsten Fehler entspricht, ist $\frac{1}{150,6}$; und der Meridiangrad durch dessen Mitte der mittlere Parallelkreis geht, enthält 99984,8 Mètres (51299,6 Toisen) *). Man kann dies Ellipsoid als das Krümmungsellipsoid von Frankreich ansehen, und dies Ellipsoid thut auch sehr nahe den in England, Italien, Oestreich, ja selbst den in Pensylvanien und in Lappland angestellten Messungen Genüge. Vergleicht man den neuen in Frankreich gemessenen Meridianbogen mit dem in Peru gemessenen, so findet man für die Elliptizität der Erde $\frac{1}{334}$: Länge des Mètres, welche aus diesen Messungen folgt. Was aber auch die Figur der Erde seyn mag, so folgt doch bloſs aus der Abnahme der Grade von den Polen zum Aequator, daſs die Erdhalbmesser zunehmen, und daſs die Erde an den Polen abgeplattet ist. Satz 41.

Anwendung der Methode des 39. und 40sten Satzes auf 15 beobachtete Sekundenpendellängen. Man kann diese Beobachtungen sämmtlich mit einer elliptischen Gestalt vereinigen, wenn man einen Fehler bloſs von achtzehn hunderttausend Theilchen dieser Länge zuläſst. Die Elliptizität, welche diesem Kleinsten unter den Fehlern entspricht, ist $\frac{1}{321}$. Bestimmung der wahrscheinlichsten Figur, welche diese Beobachtungen der Erde geben: die Ellipticität dieser Figur ist $\frac{1}{335}$. Allgemeiner Ausdruck der Sekundenpendellänge Satz 42.

Von der Gestalt Jupiters: seine beobachtete Abplattung ist innerhalb der Grenzen, welche die Theorie der Schwere ihr giebt. . . . Satz 43.

6tes Kapit. *Von der Gestalt des Saturnsrings.* . . Seite 187

Allgemeine Gleichung für die Anziehung der Ringe, was auch immer die *erzeugende* Figur sey. Anwendung auf den Fall, wo diese Figur eine Ellipse ist. . Satz 44.

Nimmt man den Ring als flüssig und gleichartig an, so kann das Gleichgewicht bey jeder elliptischen Figur bestehen: Bestimmung dieser Figur. Die Dauer der Umwälzung des Ringes ist eben so groſs, als die Dauer der Umlaufszeit eines Satelliten, welcher sich um den Planeten in einer Entfernung bewegte, die der Entfernung des Mittelpunkts der erzeugenden Figur gleich ist: diese Dauer ist ungefähr 0tag,44 ($10\frac{1}{2}$ Stunde) für den innern Saturnsring. Satz 45.

Zur Sicherheit des Gleichgewichts der Ringe wird erfordert, daſs sie feste unregelmäſsige

*) Der gewöhnliche Sexagesimalgrad enthält hiernach 56999.5 Toisen.

Körper sind, deren Schwerpunkt nicht mit dem Mittelpunkt ihrer Figur zusammenfällt. Satz 46.

7tes Kapit. *Von der Gestalt der Atmosphären der himmlischen Körper.* Seite 201

Allgemeine Gleichung für diese Gestalt. Die Sonnenatmosphäre kann sich nicht bis zur Merkursbahn erstrecken: sie hat nicht die linsenförmige Gestalt, welche das Zodiacallicht zu haben scheint, und die Axe des Pols verhält sich zur Axe des Aequators im Fall der gröſsten Abplattung, wie 2 zu 3. . . . Satz 47.

Viertes Buch.

Von den Schwankungen des Meeres und der Atmosphäre. Seite 205

1stes Kapitel. *Theorie der Ebbe und Fluth des Meeres.* Seite 205

Differenzialgleichungen für die Bewegung des Meeres, auf welches die anziehenden Kräfte der Sonne und des Mondes wirken. . . Satz 1.

Anwendung dieser Gleichungen auf den Fall, wo die Erde keine Umwälzungsbewegung hat, und wo die Tiefe des Meeres beständig ist. Allgemeiner Ausdruck der Höhe des Meeres und seiner Bewegungen in dieser Hypothese. Das Gleichgewicht des Meeres ist in diesem Fall nur dann sicher, wenn man seine Dichte kleiner als die mittlere Dichte der Erde annimmt. Satz 2.

Anwendung derselben Gleichungen auf den Fall, wo die Erde eine Umwälzungsbewegung hat, und wo die Tiefe des Meeres irgend eine Funktion der Breite ist. Differenzialgleigung für die Schwankungen des Meeres in dieser Hypothese: es ist nicht nothwendig sie streng zu integriren; es ist hinreichend, wenn man ihr Genüge thut. Die Wirkung der Sonne und des Monds bringt drey verschiedene Arten von Schwankungen hervor; die Periode dieser Schwankungen ist in der ersten von der Umwälzungsbegung der Erde unabhängig; diese Periode ist in der zweyten ungefähr ein Tag; sie ist in der dritten ungefähr ein halber Tag. Satz 3 und 4.

Untersuchung der Schwankungen der ersten Art, angenommen, daſs die Erde ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid ist. Bestimmung dieser Schwankungen, wenn die Tiefe des Meeres sehr nahe beständig ist. Der Theil dieser Schwankungen, welcher von der Bewegung der Knoten der Mondsbahn abhängt, kann sehr beträchtlich seyn; diese groſsen Schwankungen werden aber durch den Widerstand, welchen das Meer in seinen Bewegungen erfährt, vernichtet. Die Schwankungen sind vermöge dieses Widerstandes sehr nahe eben so beschaffen, als ob das Meer sich in jedem Augenblick unter dem Gestirn, von welchem es angezogen wird, ins Gleichgewicht setzte. . Satz 5 u. 6.

Von den Schwankungen der zweyten Art. Bestimmung dieser Schwankungen, wenn die Tiefe des Meeres sehr nahe beständig ist. . . Satz 7.

Sehr einfacher Ausdruck derselben Schwankungen, wenn die Erde irgend ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid ist. Der Unterschied der beiden Ebben oder Fluthen desselben Tages hängt von diesen Schwankungen ab. Dieser Unterschied ist gleich Null, wenn die Tiefe des Meeres überall dieselbe ist. . . Satz 8.

Von den Schwankungen der dritten Art. Bestimmung dieser Schwankungen, wenn die Tiefe des Meeres sehr nahe beständig ist. . . Satz 9.

Zahlen-Ausdruck dieser Schwankungen und der Ebbe und Fluth des Meeres in verschiedenen Voraussetzungen über seine Tiefe, wo aber immer angenommen wird, daſs diese Tiefe überall gleich groſs ist. Durch eine Zunahme dieser Tiefe nähern sich die Schwankungen der dritten Art sehr schnell der Gröſse, welche sie erhalten würden, wenn das Meer sich in jedem Augenblick unter dem Gestirn, von welchem es angezogen wird, ins Gleichgewicht setzte. . . . Satz 10 u. 11.

Bestimmung der Ebbe und Fluth in dieser letztern Hypothese. Die beiden Ebben oder Fluthen desselben Tages würden alsdann zu Brest bey groſsen Abweichungen der Sonne oder des Mondes sehr verschieden seyn; da dieses den Beobachtungen widerspricht, so ist die Hypothese, von der die Rede ist, unzulässig. . . Satz 12.

2tes Kapit. *Von der Sicherheit des Gleichgewichts des Meeres.* Seite 239

Erster Lehrsatz. Das Gleichgewicht des Meeres ist sicher, wenn die Dichte des Meeres kleiner ist, als die mittlere Dichte der Erde. . . Satz 13.

Zweyter Lehrsatz. Nimmt man an, daſs die Erde ein durch Umdrehung entstandener fester Körper ist, so ist das Gleichgewicht des Meeres nicht sicher, wenn seine Dichte der mittlern Dichte der Erde gleich ist, oder sie übertrift. . Satz 14.

3tes Kapit. *Von der Art wie man in der Theorie der Ebbe und Fluth des Meeres auf die verschiedenen Umstände Rücksicht nehmen kann, welche in jedem Hafen auf dieselben Einfluſs haben.* . Seite 248

Gleichungen für die Höhe und für die Bewegungen des Meeres, was auch immer das Gesetz ihrer Tiefe ist. Die Schwankungen der zweyten Art sind gleich Null, wenn die Tiefe des Meeres beständig ist: sie können nur in dieser Hypothese für die ganze Erde gleich Null werden. Es giebt kein Gesetz für die Tiefe, wodurch die Schwankungen der dritten Art für die ganze Erde gleich Null werden können. . . Satz 15.

Von der Theorie der Schwankungen des Meeres, wenn man auf alle Localumstände, welche auf sie in jedem Hafen Einfluſs haben können, Rücksicht nimmt. Diese Theorie hängt von den folgenden zwey Grundsätzen ab:

Der Zustand eines Systems von Körpern, in welchem die ursprünglichen Bedingungen der Bewegung durch den Widerstand, welchen es erfährt, verschwunden sind, ist periodisch, so wie die Kräfte, welche auf dasselbe wirken.

Die gänzliche Bewegung eines Systems, auf welches sehr kleine Kräfte wirken, ist der

Summe der einzelnen Bewegungen gleich, die jede Kraft besonders hervorgebracht haben würde.

Ausdruck der Höhe des Meeres, welche daraus in dem Fall entsteht, wenn die Sonne und der Mond sich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegen. Die Schwankungen der dritten Art können durch Lokalumstände in einem Hafen gleich Null werden: die Lokalumstände können auch noch verursachen, dafs die Sonnen- und Mondsfluth nicht den Kräften der Sonne und des Monds proportional sind. Es kann sich endlich zutragen, dafs die gröfsten und kleinsten Ebben und Fluthen um irgend einen Zwischenraum auf die Syzygien und Quadraturen folgen. Ausdruck für die Höhe der Ebbe und der Fluth, welcher diese verschiedenen Fälle umfafst. . . Satz 16, 17 u. 18.

Ausdruck der Ebbe und Fluth, wenn man die Bewegungen der Sonne und des Monds und ihre Entfernung von der Erde als veränderlich ansieht. Man kann alsdann die Wirkung jedes dieser Gestirne in Wirkungen verschiedener Gestirne verwandeln, welche sich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegen. . . Satz 19.

Allgemeiner Ausdruck der Ebbe und Fluth im Fall der Natur, wo die Sonne und der Mond sich in Bahnen bewegen, welche gegen den Aequator geneigt sind, wodurch die Schwankungen der zweyten Art hervorgebracht werden. . . Satz 20.

4tes Kapit. *Vergleichung der vorhergehenden Theorie mit den Beobachtungen.* Seite 270

Von den Höhen der Ebbe und der Fluth in der Gegend der Syzygien. Die *mittlere absolute tägliche Fluthhöhe* ist die halbe Summe der Morgen- und Abendfluth. Die *ganze Fluthhöhe* ist der Ueberschufs dieser halben Summe über die dazwischen fallende Ebbe. Ausdruck für jede mittlere absolute tägliche Fluthhöhe in der Nähe der Syzygien; Ausdruck für die ganze Fluthhöhe desselben Tages. . . Satz 21.

Entwickelung dieser Ausdrücke in der Nähe der Nachtgleichen und der Sonnenwenden. . Satz 22.

Erste Tafel: mittlere absolute und ganze Fluthhöhen, welche zu Brest in den Jahren 1711, 1712, 1714, 1715 und 1716 einen Tag vor den Syzygien, am Tage der Syzygien selbst und 4 Tage nach den Syzygien beobachtet worden sind. Vier und zwanzig dieser Syzygien sind in der Nähe der Nachtgleichen, zwölf in der Nähe der Sommersonnenwende und zwölf in der Nähe der Wintersonnenwende. . . Satz 23.

Ausdrücke, welche aus der Interpolation dieser Höhen in allen Syzygien zusammen entspringen. Bestimmung des Zeitraums, um welche das Maximum der Fluth auf die Syzygien folgt. Diese Zeit ist zu Brest gleich 1$^{\text{tag}}$, 50724. . . Satz 24.

Das Maximum der ganzen Fluthhöhe, welche zu Brest Statt haben würde, wenn Sonne und Mond sich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegten, würde 6$^{\text{me}}$, 2490 (19 Fufs 2½ Zoll) seyn. Nimmt man den Zwischenraum zweyer auf einander folgenden Morgen- oder Abendfluthen zur Einheit an, so ist die Abnahme der ganzen Fluthhöhe, wenn man vom Maximum ausgeht, nach den Beobachtungen dem Quadrate der Zeit in 0$^{\text{me}}$, 1064

(3,93 Zoll) multiplizirt, gleich. Die Theorie der Schwere giebt diesen Koeffizienten eben so groſs. Satz 25.

Dieser Koeffizient ist in den Syzygien der Nachtgleichen nach den Beobachtungen gleich 0^{me},1319 (4,872 Zoll) und in den Syzygien der Sonnenwenden 0^{me},0811 (2,966 Zoll) beynahe eben so groſs als ihn die Theorie giebt. Die Fluthen der Sonnenwenden sind kleiner als die Fluthen der Nachtgleichen und zwar, der Theorie gemäſs, nahe im Verhältniſs des Quadrats des Kosinus der Abweichung der Gestirne zur Einheit; der kleine Unterschied, der hier Statt findet, kann den Einfluſs der Lokalumstände auf das Verhältniſs der Wirkungen der Sonne und des Mondes bestimmen. . Satz 26.

Die Aenderung der Entfernungen der Sonne von der Erde hat einen geringen Einfluſs auf die Fluthen: und die Beobachtungen stimmen in diesem Punkt mit der Theorie überein. Satz 27.

Die Wirkung der Aenderung der Entfernung des Mondes ist bey den Fluthen sehr merklich. Dritte Tafel: ganze Fluthhöhen in zwölf Syzygien, wo der Mond in der Erdnähe war, und in zwölf Syzygien, wo er in der Erdferne war. Der Ueberschuſs der ganzen Fluthhöhen in der Erdnähe über die ganzen Fluthhöhen in der Erdferne ist nach den Beobachtungen genau eben so groſs, wie nach der Theorie. Dieser Ueberschuſs ist sehr schicklich, um den Einfluſs der Lokalumstände auf das Verhältniſs der Wirkungen der Sonne und des Mondes zu erkennen, und man findet hieraus, daſs dieser Einfluſs zu Brest unmerklich ist. Die Ungleichheiten der zweyten Art sind zu Brest wenig beträchtlich, und betragen nur 0^{me},183 (6,76 Zoll). . . . Satz 28.

Ausdrücke für die mittlern absoluten Fluthhöhen und für die ganzen Fluthhöhen in der Gegend der Quadraturen. Entwickelung dieser Ausdrücke für die Quadraturen der Nachtgleichen und der Sonnenwenden. . . . Satz 29.

Vierte Tafel: Mittlere absolute und ganze Fluthhöhen, welche zu Brest während der Jahre 1711, 1712, 1714, 1715 und 1716 am Tage der Quadratur und drey Tage hernach beobachtet worden sind; 24 dieser Quadraturen fallen in die Nähe der Nachtgleichen, und 24 in die Nähe der Sonnenwenden. . . . Satz 30.

Ausdrücke, welche aus der Interpolation dieser Höhen in allen diesen Quadraturen entstehen. Das Minimum der ganzen Fluthhöhen folgt auf die Quadratur nach demselben Zeitraum, nach welchem ihr Maximum auf die Syzygien folgt. Das Minimum der ganzen Fluthhöhe würde 3^{me},0990 (9 Fuſs 6,48 Zoll) seyn, wenn Sonne und Mond sich gleichförmig in der Ebene des Aequators bewegten. Die Vergleichung dieser Fluthhöhe mit derselben Fluthhöhe in seinem Maximum giebt, daſs in den mittlern Entfernungen die Wirkung des Mondes sehr nahe dreymal so groſs ist, als die Wirkung der Sonne. Nimmt man den Zwischenraum zwischen zweyen auf einander folgenden Morgen- oder Abendfluthen in den Quadraturen zur Einheit an, so ist die Abnahme der ganzen Fluthhöhe in der Gegend der Quadraturen nach den Beobachtungen dem Quadrat der Zeit in den Koeffizienten 0^{me},2272 (8,39 Zoll) multiplicirt, gleich, wenn man vom Minimum ausgeht: die Theorie giebt diesen Koeffizienten sehr nahe eben so groſs. . Satz 31.

Dieser Koeffizient ist in den Quadraturen der Nachtgleichen $0^{me},3123$ (11,54 Zoll), und in den Quadraturen der Sonnenwenden $0^{me},1412$ (5,22 Zoll): die Theorie giebt sehr nahe dieselben Resultate. Die Wirkung der Abweichungen der Sonne und des Mondes ist bey den Fluthen in den Quadraturen sehr beträchtlich, welches der Theorie gemäſs ist. Satz 32.

Die Abendfluthen übertreffen zu Brest die Morgenfluthen in der Nähe der Quadraturen der Frühlingsnachtgleichen; in den Herbstnachtgleichen findet das entgegengesetzte Statt, so wie dies vermöge der Ungleichheiten der zweyten Art seyn muſs. . . Satz 33.

Ausdrücke für die Zeiten und für die Zwischenzeiten der Fluthen in den Syzygien. Satz 34.

Tafel für die Zeiten der ganzen Fluthhöhen der ersten Tafel am Tage der Syzygien und drey Tage hernach. Ausdruck für diese Zeiten und für ihre Verspätigungen von einem Tag zum andern nahe beym Maximum. Diese Verspätigung ist nach den Beobachtungen gleich $0^{tag},027052$ ($0^{st}.38'.57'',2$). Vergleicht man sie mit der Theorie, so giebt sie die Wirkung des Monds sehr nahe dreymal so groſs als die der Sonne. Bestätigung dieses Resultats durch eine groſse Anzahl ganzer Fluthhöhen, welche entfernt von den Syzygien beobachtet worden sind. . . . Satz 35.

Die tägliche Verspätigung der Fluth ist in den Syzygien der Sonnenwenden ungefähr um $\frac{1}{8}$ gröſser als in den Syzygien der Nachtgleichen, welches mit der Theorie beynahe übereinstimmt. . . . Satz 36.

Die tägliche Verspätigung der Fluthen in den Syzygien ändert sich sehr merklich, wenn sich die Entfernung des Monds von der Erde ändert: eine Minute ($= 32'',4$) Aenderung im scheinbaren Mondshalbmesser giebt $258''$ ($= 0^{st}.3'.42'',9$). Aenderung dieser Verspätigung. Dieses Resultat stimmt vollkommen mit der Theorie überein. . Satz 37.

Ausdruck der Zeiten und der Zwischenzeiten der Fluthen in den Quadraturen. . Satz 38.

Tafel der Zeiten der ganzen Fluthhöhen der 4ten Tafel, welche sich auf die Quadraturen beziehen. Ausdruck dieser Zeiten und ihrer täglichen Verspätigung beym Minimum der Fluthen. Diese Verspätigung ist nach den Beobachtungen gleich $0^{tag},05267$ ($1^{st}.15'.50'',7$); sie ist nach der Theorie sehr nahe eben so groſs. Diese Verspätigung ist in den Quadraturen der Nachtgleichen gröſser als in denen der Sonnenwenden, und zwar nach der Theorie im Verhältniſs von 13 zu 9; welches beynahe mit den Beobachtungen übereinstimmt. . . . Satz 39.

Die Theorie giebt, daſs die Fluthen in den Quadraturen sich mit den Entfernungen des Monds von der Erde ändern, aber um dreymal weniger, als in den Syzygien; dieſs bestätigen die Beobachtungen. . . . Satz 40.

Zahlen - Ausdruck der Fluthhöhen zu Brest. Formel zur Bestimmung der gröſsten ganzen Fluthhöhen, die in unsern Häfen Statt haben müssen. . Satz 41.

Sehr einfache und leicht in Tafeln darzustellende Formel zur Bestimmung der Zeit des hohen Wassers. . . . Satz 42.

Wiederholung der vorzüglichsten Erscheinungen der Ebbe und Fluth und ihrer Uebereinstimmung mit der Theorie der allgemeinen Schwere. . . Satz 43.

5tes Kapit. *Von den Schwankungen der Atmosphäre* . Seite 334

Allgemeine Gleichungen für diese Schwankungen. Ihre Bestimmung läſst sich auf die Bestimmung der Schwankungen des Meeres im Fall einer beständigen Tiefe bringen. Zahlenausdruck für diese Schwankungen in einer Hypothese, welche sich der Natur hinlänglich nähert, um eine richtige Idee über die Wirkung der Sonne und des Monds auf die Atmosphäre zu geben. Diese Wirkung kann durch eine groſse Anzahl sehr genauer Barometerbeobachtungen zwischen den Wendekreisen erkannt werden. Sie kann aber nicht die beständigen Ostwinde daselbst hervorbringen. Es scheint nicht, daſs das Zeichen der Abweichung der beiden Gestirne merklichen Einfluſs auf die Aenderungen der Atmosphäre hat. Satz 44.

Fünftes Buch.

Von den Bewegungen der himmlischen Körper um ihre eigenen Schwerpunkte. . . . Seite 339

1stes Kapitel. *Von den Bewegungen der Erde um ihren Schwerpunkt.* Seite 339

Differenzialgleichungen dieser Bewegungen. . . Satz 1.

Bestimmung der Momente der Trägheit der Erde für ihre drey Hauptaxen. Die Kugel ist nicht der einzige feste Körper, wo alle Momente der Trägheit einander gleich sind. Allgemeine Gleichung des festen Körpers, der diese Eigenschaft besitzt. . Satz 2.

Entwickelung der Kräfte, welche die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt stöhren, in Reihen. Ist die Oberfläche der Erde elliptisch, so bleibt von diesen Reihen bloſs ihr erstes Glied übrig, und man kann ihre Bewegung immer in dieser Hypothese bestimmen, ohne einen merklichen Irrthum zu befürchten zu haben. . . Satz 3.

Sehr genäherte Differenzialausdrücke für die Bewegung der Nachtgleichepunkte und für die Nutation der Erdaxe, in Beziehung auf eine feste Ebene. . Satz 4.

Entwickelung und Integration dieser Ausdrücke, wenn man auf die Beweglichkeit der Sonnen- und Mondsbahnen, Rücksicht nimmt. . . . Satz 5.

Ausdrücke für die Bewegung der Nachtgleichepunkte und für die Neigung der Erdaxe gegen die wahre Ekliptik. Die Wirkung der Sonne und des Monds auf das Erdsphäroid hat einen beträchtlichen Einfluſs auf die Aenderungen der Schiefe der Ekliptik und der Länge des Jahres, welche vermöge der bloſsen Verrückung der Sonnenbahn Statt haben wür-

würden, so dafs sie nur ungefähr ein Viertheil ihres Werthes behalten; diese Unterschiede sind nur nach zwey oder drey Jahrhunderten, von der gegebenen Epoche an, merklich. Satz 7.

Die Aenderungen der Umwälzungsbewegung der Erde sind unmerklich, und man kann diese Bewegung als gleichförmig ansehen. . . Satz 8.

Die Aenderungen des mittlern Tages sind ebenfalls unmerklich, und man kann seine Dauer als beständig ansehen. . . . Satz 9.

Untersuchung des Einflusses der Schwankungen des Meeres auf die Bewegungen des Erdsphäroids um seinen Schwerpunkt. Die Analysis führt auf folgenden merkwürdigen Lehrsatz: *die Erscheinungen der Präcession und der Nutation sind vollkommen identisch mit denen, welche Statt haben würden, wenn das Meer eine feste Masse mit dem Sphäroid, welches es bedeckt, machte* . . Satz 10 und 11.

Dieser Lehrsatz gilt, welches auch immer die Unregelmäfsigkeiten der Tiefe des Meeres und der Widerstand, welchen es in seinen Schwankungen erfährt, seyn mögen. Die Ströhme des Meeres, die Flüsse, die Erdbeben und die Winde ändern die Umwälzung der Erde nicht. Satz 12.

Zahlenausdrücke für die Neigung der Erdaxe, und für die Lage der Nachtgleichen auf einer festen Ebene und auf der Erdbahn: Formeln für die Aenderung der geraden Aufsteigung und der Abweichung der Sterne. . . . Satz 13.

Folgen, welche aus den Erscheinungen der Präcession und der Nutation auf die Beschaffenheit der Erde entstehen. Diese Erscheinungen sind so beschaffen, als ob die Erde ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid wäre; die Abplattung dieses Ellipsoids ist zwischen den Grenzen $\frac{1}{304}$ und $\frac{1}{578}$ enthalten. Entwickelung der Erscheinungen, welche von der Gestalt der Erde abhängen; Uebereinstimmung derselben mit der Theorie der Schwere. Satz 14.

2tes Kapit. *Von den Bewegungen des Mondes um seinen Schwerpunkt.* Seite 405

Astronomische Theorie der wirklichen Libration des Monds. . . Satz 15.

Differenzialgleichungen für die Bewegung des Monds um seinen Schwerpunkt. Endlicher Ausdruck seiner wirklichen Libration. Die mittlere Umwälzungsbewegung des Mondes ist vermöge der Anziehung der Erde auf das Mondsphäroid genau seiner mittlern Umlaufsbewegung um die Erde gleich, und hat dieselben Sekularungleichheiten. . Satz 16.

Ausdrücke für die Bewegung der Knoten und der Neigung des Mondsäquators gegen die wahre Ekliptik. Die mittlere Bewegung dieser Knoten ist der mittlern Bewegung der Knoten der Mondsbahn gleich, und der niedersteigende Knoten des Mondsäquators stimmt immer mit dem aufsteigenden Knoten der Bahn überein. Die mittlere Neigung des Mondsäquators gegen die wahre Ekliptik ist beständig. Die Sekularbewegungen der Ekliptik ändern diese Resultate nicht. . . . Satz 17.

Folgen, welche aus der Libration des Mondes auf die Gestalt und Beschaffenheit des Mondsphäroids entstehen. Der Unterschied zwischen den Momenten der Trägheit für seine Hauptaxen ist gröfser als im Fall der Gleichartigkeit und als im Fall, wenn der Mond ursprünglich flüssig gewesen wäre. . . . Satz 18.

Die Wirkung der Sonne auf das Mondsphäroid hat keinen merklichen Einflufs auf die Bewegungen dieses Sphäroids um seinen Schwerpunkt. . . Satz 19.

3tes Kapit. *Von den Bewegungen der Saturnsringe um ihren Schwerpunkt.* Seite 424

Differenzialgleichungen dieser Bewegungen; Integration dieser Gleichungen. Die Ringe würden ohne die Umwälzung und Abplattung Saturns, wegen der Anziehung der Sonne und des letzten Saturnssatelliten, aufhören in einer Ebene zu seyn: die Wirkung Saturns erhält sie beständig sehr nahe in der Ebene seines Aequators, so wie auch die Bahnen der sechs ersten Satelliten. Die Satelliten des Uranus bewegen sich in einer Ebene, woraus folgt, dafs dies die Ebene des Aequators dieses Planeten ist, und dafs er sich schnell um sich selbst dreht. . . . Satz 20, 21 und 22.

Nachricht an den Leser.

Hiermit ist der theoretische Theil geendiget. Der praktische wird noch einen Band ausmachen, und so wie selbiger in Paris erscheint, wird auch die deutsche Uebersetzung daselbst veranstaltet werden.

Bey demselben Verleger sind folgende Schriften erschienen:

Anacharsis, des jüngern, Reise durch Griechenland, vierthalb hundert Jahre vor der gewöhnlichen Zeitrechnung. Aus dem Französischen des Abt Barthélemy übersetzt von Hrn. Bibliothekar Biester. Neue Ausg. 7 Bände compl. mit 33 Kupfertafeln und 7 Titelkupfern, auf grofs Median Engl. Papier. 12 Thlr. 12 Gr.

— derselben wohlfeile neue Ausgabe, 7 Bände compl., mit denselben Kupf. 1793. gr. 8. Druckpap. 9 Thlr.

Anacharsis Reise (Fortsetzung der in) enthaltenen Geschichte von Alt-Griechenland, 1ster Theil: Alexander der Eroberer, vom Dr. Fefsler. gr. 8. mit zwey Kupfert. und einem Titelkupfer. 1797. auf engl. Median-Papier. 1 Thlr. 12 Gr.

— dieselbe auf Median-Druckpap. 1 Thlr., auf Schweizerpapier. 2 Thlr. 12 Gr.

Adèle et Théodore ou lettres sur l'éducation, par Mad. de Genlis. 3 Vol. gr. 12. 3 Thlr.

Anacreons Lieder, griechisch. Mit einem vollständigen griechisch-deutschen Wortregister, von K. H. Jördens. 8. 1789. 8 Gr.

Ancillon, Lud. Fréd. Judicium de judiciis circa argumentum Cartesianum pro existentia Dei ad nostra usque tempora latis, quatuor in Academia Berolinensi habitis praelectionibus expositum et evictum. 8maj. 1782. 12 Gr.

Anweisung, wie ökonomische und militärische Situationskarten nach bestimmten Grundsätzen zu zeichnen sind; durch XV theils illuminirte, von C. Jäck gestochene, Kupferabdrücke erläutert. Ein Heft Kupfer in Querfolio, und ein Heft Erklärung derselben, in 8. 1799. 3 Thlr.

Apollodori bibliotheca. Mit einem vollständigen griechisch-deutschen Wortregister, von K. H. Jördens. gr. 8. 1789. 12 Gr.

Böttigers, des Hrn. Ob. Consist. Rath, Zustand der neuesten Litteratur, der Künste und Wissenschaften in Frankreich, in Auszügen und Erläuterungen. 2 Bändchen. 1795 und 1796. 1 Thlr. 2 Gr.

Bürja, des Hrn. Prof., der selbstlehrende Algebraist; oder deutliche Anweisung zur ganzen Rechenkunst, worunter sowohl die Arithmetik und gemeine Algebra, als auch die Diffe-

Wiederholung der vorzüglichsten Erscheinungen der Ebbe und Fluth und ihrer Uebereinstimmung mit der Theorie der allgemeinen Schwere. . . Satz 43.

5tes Kapit. *Von den Schwankungen der Atmosphäre* . Seite 334

Allgemeine Gleichungen für diese Schwankungen. Ihre Bestimmung läfst sich auf die Bestimmung der Schwankungen des Meeres im Fall einer beständigen Tiefe bringen. Zahlenausdruck für diese Schwankungen in einer Hypothese, welche sich der Natur hinlänglich nähert, um eine richtige Idee über die Wirkung der Sonne und des Monds auf die Atmosphäre zu geben. Diese Wirkung kann durch eine grofse Anzahl sehr genauer Barometerbeobachtungen zwischen den Wendekreisen erkannt werden. Sie kann aber nicht die beständigen Ostwinde daselbst hervorbringen. Es scheint nicht, dafs das Zeichen der Abweichung der beiden Gestirne merklichen Einflufs auf die Aenderungen der Atmosphäre hat. Satz 44.

Fünftes Buch.

Von den Bewegungen der himmlischen Körper um ihre eigenen Schwerpunkte. . . . Seite 339

1stes Kapitel. *Von den Bewegungen der Erde um ihren Schwerpunkt.* Seite 339

Differenzialgleichungen dieser Bewegungen. . . Satz 1.

Bestimmung der Momente der Trägheit der Erde für ihre drey Hauptaxen. Die Kugel ist nicht der einzige feste Körper, wo alle Momente der Trägheit einander gleich sind. Allgemeine Gleichung des festen Körpers, der diese Eigenschaft besitzt. . Satz 2.

Entwickelung der Kräfte, welche die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt stöhren, in Reihen. Ist die Oberfläche der Erde elliptisch, so bleibt von diesen Reihen blofs ihr erstes Glied übrig, und man kann ihre Bewegung immer in dieser Hypothese bestimmen, ohne einen merklichen Irrthum zu befürchten zu haben. . . Satz 3.

Sehr genäherte Differenzialausdrücke für die Bewegung der Nachtgleichepunkte und für die Nutation der Erdaxe, in Beziehung auf eine feste Ebene. . Satz 4.

Entwickelung und Integration dieser Ausdrücke, wenn man auf die Beweglichkeit der Sonnen- und Mondsbahnen, Rücksicht nimmt. . . . Satz 5.

Ausdrücke für die Bewegung der Nachtgleichepunkte und für die Neigung der Erdaxe gegen die wahre Ekliptik. Die Wirkung der Sonne und des Monds auf das Erdsphäroid hat einen beträchtlichen Einflufs auf die Aenderungen der Schiefe der Ekliptik und der Länge des Jahres, welche vermöge der blofsen Verrückung der Sonnenbahn Statt haben wür-

würden, so dafs sie nur ungefähr ein Viertheil ihres Werthes behalten; diese Unterschiede sind nur nach zwey oder drey Jahrhunderten, von der gegebenen Epoche an, merklich. Satz 7.

Die Aenderungen der Umwälzungsbewegung der Erde sind unmerklich, und man kann diese Bewegung als gleichförmig ansehen. . . Satz 8.

Die Aenderungen des mittlern Tages sind ebenfalls unmerklich, und man kann seine Dauer als beständig ansehen. . . . Satz 9.

Untersuchung des Einflusses der Schwankungen des Meeres auf die Bewegungen des Erdsphäroids um seinen Schwerpunkt. Die Analysis führt auf folgenden merkwürdigen Lehrsatz: *die Erscheinungen der Präcession und der Nutation sind vollkommen identisch mit denen, welche Statt haben würden, wenn das Meer eine feste Masse mit dem Sphäroid, welches es bedeckt, machte* . . Satz 10 und 11.

Dieser Lehrsatz gilt, welches auch immer die Unregelmäfsigkeiten der Tiefe des Meeres und der Widerstand, welchen es in seinen Schwankungen erfährt, seyn mögen. Die Ströhme des Meeres, die Flüsse, die Erdbeben und die Winde ändern die Umwälzung der Erde nicht. Satz 12.

Zahlenausdrücke für die Neigung der Erdaxe, und für die Lage der Nachtgleichen auf einer festen Ebene und auf der Erdbahn: Formeln für die Aenderung der geraden Aufsteigung und der Abweichung der Sterne. . . . Satz 13.

Folgen, welche aus den Erscheinungen der Präcession und der Nutation auf die Beschaffenheit der Erde entstehen. Diese Erscheinungen sind so beschaffen, als ob die Erde ein durch Umdrehung entstandenes Ellipsoid wäre; die Abplattung dieses Ellipsoids ist zwischen den Grenzen $\frac{1}{304}$ und $\frac{1}{578}$ enthalten. Entwickelung der Erscheinungen, welche von der Gestalt der Erde abhängen; Uebereinstimmung derselben mit der Theorie der Schwere. Satz 14.

2tes Kapit. *Von den Bewegungen des Mondes um seinen Schwerpunkt.* Seite 405

Astronomische Theorie der wirklichen Libration des Monds. . . Satz 15.

Differenzialgleichungen für die Bewegung des Monds um seinen Schwerpunkt. Endlicher Ausdruck seiner wirklichen Libration. Die mittlere Umwälzungsbewegung des Mondes ist vermöge der Anziehung der Erde auf das Mondsphäroid genau seiner mittlern Umlaufsbewegung um die Erde gleich, und hat dieselben Sekularungleichheiten. . Satz 16.

Ausdrücke für die Bewegung der Knoten und der Neigung des Mondsäquators gegen die wahre Ekliptik. Die mittlere Bewegung dieser Knoten ist der mittlern Bewegung der Knoten der Mondsbahn gleich, und der niedersteigende Knoten des Mondsäquators stimmt immer mit dem aufsteigenden Knoten der Bahn überein. Die mittlere Neigung des Mondsäquators gegen die wahre Ekliptik ist beständig. Die Sekularbewegungen der Ekliptik ändern diese Resultate nicht. . . . Satz 17.

Folgen, welche aus der Libration des Mondes auf die Gestalt und Beschaffenheit des Mondsphäroids entstehen. Der Unterschied zwischen den Momenten der Trägheit für seine Hauptaxen ist größser als im Fall der Gleichartigkeit und als im Fall, wenn der Mond ursprünglich flüssig gewesen wäre. . . . Satz 18.

Die Wirkung der Sonne auf das Mondsphäroid hat keinen merklichen Einfluſs auf die Bewegungen dieses Sphäroids um seinen Schwerpunkt. . . Satz 19.

3tes Kapit. *Von den Bewegungen der Saturnsringe um ihren Schwerpunkt.* Seite 424

Differenzialgleichungen dieser Bewegungen; Integration dieser Gleichungen. Die Ringe würden ohne die Umwälzung und Abplattung Saturns, wegen der Anziehung der Sonne und des letzten Saturnssatelliten, aufhören in einer Ebene zu seyn: die Wirkung Saturns erhält sie beständig sehr nahe in der Ebene seines Aequators, so wie auch die Bahnen der sechs ersten Satelliten. Die Satelliten des Uranus bewegen sich in einer Ebene, woraus folgt, daſs dies die Ebene des Aequators dieses Planeten ist, und daſs er sich schnell um sich selbst dreht. . . . Satz 20, 21 und 22.

Nachricht an den Leser.

Hiermit ist der theoretische Theil geendiget. Der praktische wird noch einen Band ausmachen, und so wie selbiger in Paris erscheint, wird auch die deutsche Uebersetzung daselbst veranstaltet werden.

Bey demselben Verleger sind folgende Schriften erschienen:

Anacharsis, des jüngern, Reise durch Griechenland, vierthalb hundert Jahre vor der gewöhnlichen Zeitrechnung. Aus dem Französischen des Abt Barthélemy übersetzt von Hrn. Bibliothekar Biester. Neue Ausg. 7 Bände compl. mit 33 Kupfertafeln und 7 Titelkupfern, auf groſs Median Engl. Papier. 12 Thlr. 12 Gr.

— derselben wohlfeile neue Ausgabe, 7 Bände compl., mit denselben Kupf. 1793. gr. 8. Druckpap. 9 Thlr.

Anacharsis Reise (Fortsetzung der in) enthaltenen Geschichte von Alt-Griechenland, 1ster Theil: Alexander der Eroberer, vom Dr. Feſsler. gr. 8. mit zwey Kupfert. und einem Titelkupfer. 1797. auf engl. Median-Papier. 1 Thlr. 12 Gr.

— dieselbe auf Median-Druckpap. 1 Thlr., auf Schweizerpapier. 2 Thlr. 12 Gr.

Adèle et Théodore ou lettres sur l'éducation, par Mad. de Genlis. 3 Vol. gr. 12. 3 Thlr.

Anacreons Lieder, griechisch. Mit einem vollständigen griechisch-deutschen Wortregister, von K. H. Jördens. 8. 1789. 8 Gr.

Ancillon, Lud. Fréd. Judicium de judiciis circa argumentum Cartesianum pro existentia Dei ad nostra usque tempora latis, quatuor in Academia Berolinensi habitis praelectionibus expositum et evictum. 8maj. 1782. 12 Gr.

Anweisung, wie ökonomische und militärische Situationskarten nach bestimmten Grundsätzen zu zeichnen sind; durch XV theils illuminirte, von C. Jäck gestochene, Kupferabdrücke erläutert. Ein Heft Kupfer in Querfolio, und ein Heft Erklärung derselben, in 8. 1799. 3 Thlr.

Apollodori bibliotheca. Mit einem vollständigen griechisch-deutschen Wortregister, von K. H. Jördens. gr. 8. 1789. 12 Gr.

Böttigers, des Hrn. Ob. Consist. Rath, Zustand der neuesten Litteratur, der Künste und Wissenschaften in Frankreich, in Auszügen und Erläuterungen. 2 Bändchen. 1795 und 1796. 1 Thlr. 2 Gr.

Bürja, des Hrn. Prof., der selbstlehrende Algebraist; oder deutliche Anweisung zur ganzen Rechenkunst, worunter sowohl die Arithmetik und gemeine Algebra, als auch die Diffe-

renz. und Integr. Rechnung begriffen ist. 2 Theile. gr. 8. 1802. Zweyte verbesserte Auflage. 2 Thlr. 12 Gr.

Bürja, des Hrn. Prof., der selbstlehrende Geometer; oder deutliche Anweisung zur Meſskunst, worin sowohl die eigentliche Geometrie, als auch die ebene und sphärische Trigonometrie, nebst einer Anleitung zum Nivelliren und Landmessen, enthalten ist. 2 Theile. gr. 8. mit Titelkupf. und 545 Holzschnitten. Zweyte verbess. Auflage. 1802. 3 Thlr. 12 Gr.

— höhere Meſskunst; oder deutliche Anweisung zur Geometrie der krummen Linien. 2 Bände. gr. 8. mit 229 Holzschnitten. 1788. 2 Thlr. 12 Gr.

— Grundlehren der Statik, oder desjenigen Theils der Mechanik, welcher vom Gleichgewicht bey festen Körpern und Maschinen handelt. gr. 8. mit 165 Holzschnitten und Titelkupfer. 1789. 1 Thlr. 8 Gr.

— Grundlehren der Hydrostatik, oder desjenigen Theils der Mechanik, welcher vom Gleichgewicht des Wassers, der Luft, und überhaupt aller flüssigen Materien, wie auch von den auf dieses Gleichgewicht gegründeten Maschinen, handelt. gr. 8. mit Titelkupfer und 121 Holzschnitten. 1790. 1 Thlr.

— Grundlehren der Dynamik, oder desjenigen Theils der Mechanik, welcher von den festen Körpern im Zustande der Bewegung handelt. gr. 8. mit Titelkupfer und 160 Holzschnitten. 1791. 1 Thlr. 8 Gr.

— Grundlehren der Hydraulik, oder desjenigen Theils der Mechanik, welcher von der Bewegung und dem Widerstande flüssiger Materien handelt. gr. 8. mit 90 Holzschnitten und einem Titelkupfer. 1792. 1 Thlr. 4 Gr.

Denina, des Herrn Abt, Geschichte Piemonts und der übrigen Staaten des Königs von Sardinien; nebst einer geographisch-statistischen Beschreibung dieser Länder, nach ihrem Umfange vom Jahre 1792, und einer Uebersicht der neuesten Staatsveränderungen in Italien, von ebendemselben. Aus der Italienischen Handschrift des Herrn Verfassers übersetzt von Fr. Straſs, Prof. am Königl. Cadettencorps. gr. 8. Erster Theil. 1800. 2 Thlr. 18 Gr.

Dictionnaire de l'Académie française, revu, corrigé et augmenté par l'Académie elle-même. Nouv. édition, enrichie de la traduct. allemande des mots par S. H. Catel. 4 Vol. gr. 4. 1800. 10 Thlr. 12 Gr.

Euler, Leonh., vollständige Anleitung zur Differenz. Rechnung. Aus dem Lateinischen übersetzt, und mit Zusätzen und Anmerkungen versehen vom Hrn. Prof. J. A. C. Michelsen. 3 Theile. 1790 bis 1793. 3 Thlr. 12 Gr.

Desselben Supplement zur Differenzial-Rechnung, worin, auſser den Zusätzen und Berichtigungen, auch noch andere analytische Untersuchungen, welche gröſstentheils die combinatorische Analysis betreffen, enthalten sind, vom Hrn. Prof. Grüson. gr. 8. 1798. 1 Thlr. 12 Gr.

Exercices de Prononciation de Grammaire et de Construction, par Mons. le Prof. Catel et Mad. de Genlis. 2 Vol. 1798 bis 99. 1 Thlr. 8 Gr.

Fables de Florian. Nouv. édition. 16. avec. fig. 1797. 18 Gr.
Florians Fabeln, französisch und deutsch; herausgegeben vom Hrn. Prof. Catel. 2 Bände, mit Kupfern. 16. 1796 und 97. 1 Thlr. 8 Gr.
Fables de la Fontaine. 2 Vol. 8. 1791. 18 Gr.

Genlis, Fr. von, die beiden Mütter, oder die Verläumdung. Aus dem Französischen übersetzt von Mad. Bernard, geb. Gad. 3 Theile. 1800 bis 1802. 3 Thlr.
Geographie, Chronologie, Staaten- Gelehrten- und Künstler-Geschichte, Maafs- Münz- und Gewichtskunde von Alt-Griechenland. In 41 Kupfertafeln und 12 Tabellen, herausgegeben von Biester. gr. 4. 1793. 2 Thlr. 12 Gr.
Gorgy's, des Hrn. von, sämmtliche Werke, frey übersetzt von J. F. Junger. 6 Bände compl. 3 Thlr. 16 Gr.
Grüson, J. P., grofses Einmaleins von Eins bis Zehntausend. gr. Fol. 1799. 1 Thlr. 8 Gr.
— vollständige Anleitung zur niedern, höhern, und angewandten Mathematik, in sofern solche sowohl dem Offizier überhaupt, als auch dem Ingenieur, Artilleristen und Seemann unentbehrlich ist. Erster Theil, welcher die Arithmetik enthält. gr. 8. 1799. 1 Thlr. 12 Gr.
— — — 2ter Theil, welcher die Longimetrie, Planimetrie, Stereometrie etc. enthält, nebst 16 Kupfertafeln. gr. 8. 3 Thlr.
— Pinakothek, oder Sammlung allgemein-nützlicher Tafeln für Jedermann. Erfunden von Grüson. gr. 8. 2 Thlr. 12 Gr.

Kant, Iman., Kritik der Urtheilskraft. Dritte Auflage. 8. 1799. 1 Thlr. 12 Gr.
Kiesewetter, Prof., Grundrifs einer reinen allgemeinen Logik nach Kantischen Grundsätzen, zum Gebrauch für Vorlesungen, begleitet mit einer weitern Auseinandersetzung für diejenigen, die keine Vorlesungen darüber hören können. 1ster Theil. Dritte völlig umgearbeitete und vermehrte Aufl. gr. 8. 1802. 2 Thlr.
— Deren 2ter Theil, enthaltend Grundsätze einer angewandten Logik nach Kantischen Grundsätzen, zum Gebrauch für Vorlesungen, mit einer weitern Auseinandersetzung für diejenigen, die keine Vorlesungen darüber hören können. gr. 8. 1796. 1 Thlr. 6 Gr.
— Compendium einer allgemeinen Logik, sowohl der reinen als angewandten, nach Kantischen Grundsätzen, zum Gebrauch für Vorlesungen. gr. 8. 1796. 16 Gr.
— Logik zum Gebrauch für Schulen. gr. 8. 1797. 9 Gr.

Lacroix, S. F., Lehrbegriff des Differenzial- und Integral-Calculs. Aus dem Französischen übersetzt. Mit einigen Zusätzen und Anmerkungen begleitet von J. P. Grüson. 2 Theile, mit 6 Kupfertafeln. 1799 bis 1800. 3 Thlr. 8 Gr.
Lagrange, de, Theorie der analytischen Funktionen. Aus dem Französischen von Grüson 2 Theile. 1798. 1 Thlr. 12 Gr.
Laplace, Mechanik des Himmels. Aus dem Französischen übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen, von J. C. Burckhardt. 2 Theile, gr. 4. 1800 bis 1802. 10 Thlr. 12 Gr.

BAYERISCHE STAATS- BIBLIOTHEK

Mères, les, rivales, par Mad. de Genlis. 3 Vol. gr. 8. avec figures belle édit. en caractères de Didot. 1800. 4 Thlr. 12 Gr.

Michelsen, J. A. C., Anleitung zur Buchstabenrechnung und Algebra, auch für diejenigen, welche der Gelegenheit zum mündlichen Unterricht beraubt, selbige durch eignen Fleiſs erlernen wollen. Zweyte Auflage. 8. 1790. 1 Thlr. 8 Gr.

Montaigne, Mich., Gedanken und Meinungen über allerley Gegenstände. Ins deutsche übersetzt von Bode, 7 Bände. 1793 bis 99, mit den Bildnissen des Verfassers und Uebersetzers. 3 Thlr. 8 Gr. Jetzt wegen des Nachdrucks. 3 Thlr. 12 Gr.

Oeuvres du Duc Mancini Nivernois en 10 Vol. 16. 1799. 7 Thlr.

Der Schreibmeister, oder Anweisung, wie ein jeder selbst seine Kinder lehren kann schön und deutlich zu schreiben. Nach 194 gestochenen Vorschriften von C. Jäck, auf starke Pappe geklebt, nebst dem dazu gehörigen Kasten. 1792. 2 Thlr. 12 Gr.

Derselbe, unaufgezogen. Folio. 1 Thlr. 16 Gr.

— Zweytes Heft, oder Anweisung, eine schöne deutsche Geschäftshand zu schreiben, von demselben. Querfol. 1 Thlr. 16 Gr.

— Drittes Heft, oder Anweisung, eine französische Hand im englischen und französischen Ductus zu schreiben, und sich in der sogenannten Coulée - Schrift zu üben. Querfolio. 1 Thlr. 16 Gr.

— Viertes Heft, oder Anweisung, eine schöne deutsche Hand zu schreiben, und sich in der Kanzley - und Frakturschrift zu üben. Querfolio. 1 Thlr. 8 Gr.

Traité de Mécanique céleste, par Laplace. 2 Vol. 4. Paris, 1800. 10 Thlr. 12 Gr.

Veillées, les, du Château, ou Cours de Morale à l'usage des Enfans, par Mad. de Genlis. Ouvrage revu et corrigé par Mons. de la Veaux. Nouv. Ed. 4 Vol. 8. 1 Thlr. 12 Gr.

Villaume Anfangsgründe zur Erkenntniſs der Erde, des Menschen und der Natur. 5 Bände. 1789 bis 91. 8. enthält eine vollständige Geographie. 5 Thlr. 18 Gr.

Vorzeichnungen in Buchstaben und Zügen für Schriftstecher, Mahler, Graveurs, Pitschierstecher, Steinmetzen, Schriftschneider, Glasschleifer, Jouvelier, und für jeden der regelmäſsige und zierliche Buchstaben zu stechen, zu mahlen, oder in und aus Metall zu formen hat, von Carl Jäck. 1 stes und 2 tes Heft. 4. 1800. 2 Thlr.

Voyageur, le, par Madame de Genlis. Ouvrage utile à la Jeunesse et aux Etrangers. 16. 1800. 21 Gr.

BAYERISCHE STAATS- BIBLIOTHEK MUENCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Laplace, Pierre Simon <<de>>,

Mechanik des Himmels

Bd.: Zweyter Theil

Berlin 1802

4 Astr.u. 91 a-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10049396-3
VD18 90708202